

文章编号: 1001-0920(2004)10-1142-05

双臂柔性机械手的终端滑模控制

张袅娜^{1,2}, 冯 勇¹, 孙黎霞¹

(1. 哈尔滨工业大学 电气工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2 长春工业大学 自动控制系, 吉林 长春 130012)

摘 要: 提出一种用于双臂柔性机械手系统的终端滑模控制方法, 以解决其非最小相位控制问题。重新定义了柔性机械手系统的输出, 通过输入输出线性化, 将系统分解为输入输出子系统和内部子系统。设计逆动态终端滑模控制策略, 使输入输出子系统在有限时间内收敛到零, 选择适当的控制器参数, 使零动态子系统在平衡点附近渐近稳定, 从而保证整个系统的渐近稳定。仿真结果证明了该设计方法的有效性。

关键词: 柔性机械手; 有限时间控制; 终端滑模控制

中图分类号: TP24 **文献标识码:** A

Terminal sliding mode control of two-link flexible manipulators

ZHANG Niao-na^{1,2}, FENG Yong¹, SUN Lixia¹

(1. Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2 Department of Automation, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China Correspondent: FENG Yong, E-mail: yfeng@hope.hit.edu.cn)

Abstract: A terminal sliding mode control strategy is proposed for a two-link flexible manipulator to address its nonminimum phase characteristics. The outputs of the manipulator system are redefined. The system is decomposed into two parts by input-output linearization, namely an input-output subsystem and the zero dynamics respectively. A terminal sliding mode control strategy is designed to make the input-output subsystem converge to zeros in finite time. Moreover, the zero dynamics can be asymptotically stable at equilibrium point by choosing proper controller parameters. Thus, the whole original two-link flexible manipulator control system is guaranteed to be asymptotically stable. Simulation results are presented to validate the design.

Key words: flexible link manipulator; finite time control; terminal sliding mode control

1 引 言

柔性机械手以其高负载/自重比、低能耗、高速度、适用于直接驱动模式等优点, 在机器人的应用领域极具吸引力, 但由于它是强耦合、非线性、时变、多输入多输出的分布参数系统, 且本身固有的振动特性, 其动力学行为非常复杂, 对控制器的设计提出了很高的要求。研究人员在这一领域做了许多工作, 已提出一些控制策略, 如 PD 控制^[1]、变结构控制^[2,3]、自适应控制^[4]等。

从柔性机械手关节的转矩输入到端点位移输出

的传函为非最小相位, 当控制输入有界时, 这一特性阻碍了端点位移渐近跟踪期望轨迹。如果不采用端点位移, 而以易于控制的关节电机转角作为系统输出, 则难以抑制柔性机械手的振动, 会带来很大的端点轨迹跟踪误差。

本文根据近来提出的一种重新定义输出的解决方法^[5-8], 首先采用关节电机转角和柔性模态变量的线性组合作为柔性机械手系统的输出, 通过输入输出线性化, 将系统分解为输入输出子系统和内部子系统两部分; 然后设计逆动态终端滑模控制器, 使

收稿日期: 2003-12-04; 修回日期: 2004-04-05

作者简介: 张袅娜(1972—), 女, 吉林长春人, 讲师, 博士生, 从事变结构控制、鲁棒控制等研究; 冯勇(1962—), 男, 江苏南京人, 教授, 博士生导师, 从事变结构控制、鲁棒控制等研究。

得输入输出子系统在有限时间内收敛; 最后通过选择控制器参数, 使柔性机械手系统的零动态子系统在平衡点附近渐近稳定, 从而保证整个柔性机械手系统的渐近稳定. 本文提出的控制方法设计过程简单, 易于实现. 仿真结果表明, 所提出的逆动态终端滑模控制策略可有效抑制柔性机械手系统的振动, 从而保证整个系统稳定.

2 双臂柔性机械手的动力学模型

双臂柔性机械手通过两个安装在关节处的电机驱动两个柔性臂转动, 其模型如图 1 所示. 其中: $O X_0 Y_0$ 为固定的参考坐标, $O X_1$ 和 $O X_2$ 为两个柔性机械手臂视为刚性时的中心线, $O X_1 Y_1$ 和 $O X_2 Y_2$ 为分别绕中心 O 和 O' 旋转的局部坐标.

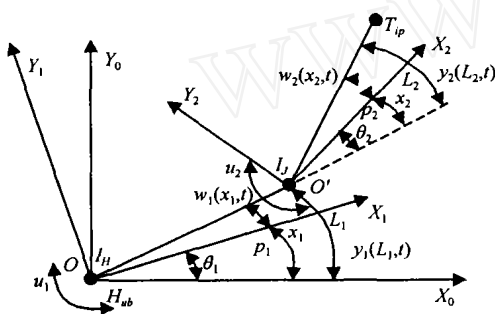


图 1 双臂柔性机械手模型

双臂柔性机械手的数学模型如下:

$$M(\theta, q) \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_r + E_1 \dot{\theta} \\ f_f + Kq + E_2 \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t). \quad (1)$$

其中: $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t)]^T \in R^2$ 为关节角向量; $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t)]^T \in R^{2r}$ 为柔性模态向量, $q_i = [q_{i1}, \dots, q_{ir}]^T$; $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T \in R^2$ 为控制转矩向量; $E_1 \in R^{2 \times 2}$ 和 $E_2 \in R^{2r \times 2r}$ 均为正定阻尼矩阵; $K \in R^{2r \times 2r}$ 为正定刚度矩阵; $M(\theta, q) \in R^{(r+1) \times (r+1)}$ 维正定惯量矩阵; $f_r(\theta, q) \in R^2$ 和 $f_f(\theta, q) \in R^{2r}$ 分别为受重力、哥氏力和离心力影响的项. 柔性机械手的端点位移为

$$y_i(L_i, t) = L_i \dot{\theta}_i + \sum_{j=1}^r \phi_{ie_j} q_{ij}(t) = L_i \dot{\theta}_i + \Phi_{ie}^T q_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

本文的控制目的是: 调节柔性机械手的端点位移 $y_i(L_i, t)$, 使其从任意的初始状态精确且快速地达到零, 即实现柔性机械手端点的点到点的调节 PTP (Point to Point).

3 双臂柔性机械手逆动态终端滑模控制

重新定义柔性机械手系统的输出为关节电机

转角变量与柔性模态变量的线性组合, 并对系统进行输入输出线性化, 将其分解为由重新定义的输出构成的输入输出子系统和由柔性模态构成的内部子系统两部分. 定义系统状态变量为

$$x = [\theta^T \ q^T \ \dot{\theta}^T \ \dot{q}^T]^T,$$

矩阵 $N(\theta, q)$ 为

$$N(\theta, q) = M^{-1}(\theta, q) =$$

$$[N_{11}(\theta, q) \ N_{12}(\theta, q); N_{21}(\theta, q) \ N_{22}(\theta, q)] \quad (3)$$

将柔性机械手系统方程(1)重新写成如下形式:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4)$$

其中

$$f(x) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ -N_{11}(f_r + E_1 \dot{\theta}) - N_{12}(f_f + Kq + E_2 \dot{q}) \\ -N_{21}(f_r + E_1 \dot{\theta}) - N_{22}(f_f + Kq + E_2 \dot{q}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$g(x) = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ N_{11}(\theta, q) \ N_{21}(\theta, q)]^T. \quad (6)$$

重新定义柔性机械手系统的输出 $z(t)$ 为

$$z(t) = \lambda_0 \theta(t) + \lambda_1 q(t) = g_1^T x(t). \quad (7)$$

其中: $g_1^T = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]$, 设计参数 λ_0 和 λ_1 分别为 2×2 维和 $2 \times 2r$ 维对角阵, 且 λ_0 对角线上各元素均为非零值. 对于柔性机械手系统(4), 根据重新定义的输出(7)进行输入输出线性化, 得到系统的输入输出子系统

$$\dot{z}(t) = \alpha(\lambda_0, \lambda_1, x) + \beta(\lambda_0, \lambda_1, x)u(t). \quad (8)$$

其中

$$\alpha(\lambda_0, \lambda_1, x) =$$

$$\begin{bmatrix} -(\lambda_0 N_{11} + \lambda_1 N_{21})(f_r + E_1 \dot{\theta}) - (\lambda_0 N_{12} + \lambda_1 N_{22})(f_f + Kq + E_2 \dot{q}) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\beta(\lambda_0, \lambda_1, x) = [\lambda_0 N_{11}(\theta, q) + \lambda_1 N_{21}(\theta, q)] \quad (10)$$

本文提出一种逆动态终端滑模控制器, 利用终端滑模有限时间到达的特点, 使得输入输出子系统在有限时间内收敛. 首先引入终端滑模超曲面

$$s(t) = \dot{z}(t) + c_1 \text{diag}(z(t)^{q/p}). \quad (11)$$

其中: $c_1 = \text{diag}[c_{11} \ c_{12}]$, $c_{1i} > 0 (i = 1, 2)$ 为终端滑模设计参数; p 和 q 均为奇数, 且满足 $p > q$.

引理 1 对于输入输出子系统(8), 如果终端滑模超曲面选为式(11)的形式, 控制输入 $u(t)$ 设计为如下形式:

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n(t), \quad (12)$$

$$u_{eq} = -\beta(\lambda_0, \lambda_1, x)^{-1}(\alpha(\lambda_0, \lambda_1, x) +$$

$$\frac{d}{dt} c_{1z}^{q/p-1}(t) \dot{z}(t), \quad (13)$$

$$u_n(t) = -\beta(\lambda_0, \lambda_i, x)^{-1} [k \operatorname{sgn}(s(t))] \quad (14)$$

其中: $k = \operatorname{diag}[k_1 \ k_2] (k_i > 0)$ 为设计参数, $\operatorname{sgn}(s) = \operatorname{diag}[\operatorname{sgn}(s_1) \ \operatorname{sgn}(s_2)]$ 则输入输出子系统(8)的状态 $z(t)$ 和 $\dot{z}(t)$ 将在有限时间内收敛到零

证明 首先证明输入输出子系统的状态 $\dot{z}(t)$ 和 $z(t)$ 从任意初始状态到达滑模的时间是有限的考虑 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} s^T(t) s(t),$$

对 $s(t)$ 沿时间求导, 并将控制律(12) ~ (14) 代入, 得

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \dot{z}(t) + \frac{d}{dt} c_{1z}(t)^{q/p-1} z(t) = \\ &\alpha(\lambda_0, \lambda_i, x) + \beta(\lambda_0, \lambda_i, x) u(t) + \\ &\frac{d}{dt} c_{1z}(t)^{q/p-1} z(t) = -k \operatorname{sgn}(s(t)). \end{aligned} \quad (15)$$

对 $V(t)$ 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= s(t)^T \dot{s}(t) \\ &- m \ln(k_1, k_2) |s(t)| < 0, \quad s(t) \neq 0 \end{aligned}$$

根据 Lyapunov 稳定性定理, 输入输出子系统的状态 $z(t)$ 和 $\dot{z}(t)$ 可在有限时间内从任意初始状态收敛到滑模面 $s(t) = 0$ 由式(15) 得

$$\dot{s}_i = -k_i \operatorname{sgn}(s_i), \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

设 $s(0) = [s_1(0), s_2(0)]^T$, $z(t)$ 和 $\dot{z}(t)$ 到达滑模 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的时间分别为 t_{s1} 和 t_{s2} 对式(16) 积分, 有 $t_{si} = |s_i(0)|/k_i, i = 1, 2$

下面证明当系统到达滑模平面后, $z(t)$ 和 $\dot{z}(t)$ 将在有限时间内滑动到原点 ($z(t) = 0, \dot{z}(t) = 0$). 设 $z(t)$ 和 $\dot{z}(t)$ 在终端滑模上滑动到原点 ($z(t) = 0, \dot{z}(t) = 0$) 的时间为 $t_{ri}, i = 1, 2$ 由式(11), 当输入输出子系统状态在终端滑模上时, 有 $\dot{z}_i + c_{1i} z_i^{q/p} = 0, i = 1, 2$ 从 t_{si} 到 t_{ri} 对时间积分, 得

$$\begin{aligned} t_{ri} &= \frac{p}{c_{1i}(p-q)} z_i^{1-q/p}(t_{si}) + t_{si} = \\ &\frac{p}{c_{1i}(p-q)} z_i^{1-q/p} \frac{|s_i(0)|}{k_i} + \frac{|s_i(0)|}{k_i}. \end{aligned} \quad (17)$$

定义 $t_r = \max(t_{r1}, t_{r2})$, 则输入输出子系统状态 $z(t)$ 和 $\dot{z}(t)$ 将在有限时间 t_r 内从任意初始状态滑动到原点 ($z(t) = 0, \dot{z}(t) = 0$).

综上所述, 如果终端滑模超曲面选为式(11) 的形式, 控制输入 $u(t)$ 设计为式(12) ~ (14) 的形式, 则输入输出子系统(8) 的状态 $z(t)$ 和 $\dot{z}(t)$ 将在有限时间内收敛到零

柔性机械手系统为 $2(r+1)$ 维, 输入输出子系统仅为 2 维, 其余 $2r$ 维的系统状态即为柔性模态变量, 构成了柔性机械手系统的内部子系统 由系统方程(4) 得

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -N_{21}(f_r + E_1 \dot{\theta}) - N_{22}(f_f + \\ &Hq + E_2 \dot{q}) + N_{21}u \end{aligned} \quad (18)$$

当特定的控制输入 u 使得输入输出子系统输出为零时, 内部子系统即为零动态子系统 保证零动态子系统局部稳定, 即可保证整个闭环系统的局部渐近稳定 根据输入输出子系统(8), 得

$$\dot{z}(t) = \alpha(\lambda_0, \lambda_i, x) + \beta(\lambda_0, \lambda_i, x) u(t) = 0$$

解得

$$u(t) = -\beta^{-1}(\lambda_0, \lambda_i, x) \alpha(\lambda_0, \lambda_i, x).$$

代入式(18), 得柔性机械手系统的零动态子系统

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \\ &-N_{21}(f_r + D_1 \dot{\theta}) - N_{22}(f_f + Hq + \\ &D_2 \dot{q}) - N_{21} \beta^{-1}(\lambda_0, \lambda_i, x) \alpha(\lambda_0, \lambda_i, x) = \\ &[-N_{22} + N_{21}(\lambda_0 N_{11} + \lambda_i N_{21})^{-1} \times \\ &(\lambda_0 N_{12} + \lambda_i N_{22})](f_f + Hq + D_2 \dot{q}). \end{aligned} \quad (19)$$

在平衡点 $x = 0$ 处将零动态子系统线性化 定义 Ω 为 $x = 0$ 的邻域, 在 Ω 域将式(3) 中的矩阵 N 在 $x = 0$ 处按泰勒级数展开, 可得常值矩阵项 N_0 和 x 的高阶项之和 $f_{\text{hot}}(x)$ 的形式

$$N(\theta, q) \Big|_{x=\Omega} = M^{-1}(\theta, q) \Big|_{x=\Omega} = N_0 + f_{\text{hot}}(x). \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} N_0 &= M^{-1}(\theta, q) \Big|_{x=0} = \\ &\begin{bmatrix} N_{11}(0) & N_{12}(0) \\ N_{21}(0) & N_{22}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{110} & N_{120} \\ N_{210} & N_{220} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

分析 $f_f(\theta, q)$, 可发现它仅为状态变量 x 的高阶项, 即有

$$f_f(\theta, q) \Big|_{x=\Omega} = f_{\text{hot}}(x). \quad (22)$$

将式(20) 和(22) 代入零动态子系统(19), 有

$$\ddot{q} = -P_0 H q - P_0 E_2 \dot{q} + f_{\text{hot}}(x), \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} P_0 &= N_{220} - N_{210}(\lambda_0 N_{110} + \\ &\lambda_i N_{210})^{-1}(\lambda_0 N_{120} + \lambda_i N_{220}). \end{aligned} \quad (24)$$

将式(23) 改写为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = A(\lambda_0, \lambda_i) \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_{\text{hot}}(x) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中

$$A(\lambda_0, \lambda_i) = \begin{bmatrix} 0 & I; -P_0 K & -P_0 E_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

引理 2 如果 λ_0 和 λ_i 选取适当的值, 使得式

(26) 中矩阵 $A(\lambda_0, \lambda_1)$ 的特征值全部为负, 则柔性机械手系统的零动态子系统 (19) 将在平衡点 $(q = \mathbf{0}, \dot{q} = \mathbf{0})$ 处渐近稳定

证明 由文献[9]中的定理 3.1, 如果 λ_0 和 λ_1 选取适当的值, $A(\lambda_0, \lambda_1)$ 的特征值全部为负, 则柔性机械手系统的零动态子系统 (19) 在平衡点 $(q = \mathbf{0}, \dot{q} = \mathbf{0})$ 处局部渐近稳定

综合引理 1 和引理 2, 可提出柔性机械手逆动态终端滑模控制系统设计的定理:

定理 1 对于柔性机械手系统 (4), 如果按式 (8) 重新定义其输出, 选取合适的参数 λ_0 和 λ_1 , 使得式 (26) 的矩阵 A 的特征值严格为负, 并且终端滑模选为式 (11) 的形式, 逆动态终端滑模控制器 $u(t)$ 设计为式 (12) ~ (14) 的形式, 则系统 (4) 将在平衡点附近渐近稳定

证明 根据参数 λ_0 和 λ_1 , 按式 (7) 对柔性机械手系统 (4) 进行输入输出线性化, 可得到输入输出子系统 (8). 由引理 1 知, 如果终端滑模选为式 (11) 的形式, 逆动态终端滑模控制器 $u(t)$ 设计为式 (12) 的形式, 则输入输出子系统将在有限时间内收敛到零. 由引理 2 知, 如果选取参数 λ_0 和 λ_1 使式 (26) 的矩阵 A 的特征值严格为负, 则零动态子系统将在平衡点 $(q = \mathbf{0}, \dot{q} = \mathbf{0})$ 处渐近稳定. 因此, 原柔性机械手系统 (4) 将在系统原点附近渐近稳定, 其端点位移输出 $y_i(L_i, t) (i = 1, 2)$ 也将渐近收敛到零.

下面以一个双臂柔性机械手为例, 说明 λ_0 和 λ_1 与 $A(\lambda_0, \lambda_1)$ 特征值之间的关系. 机械手的参数如下:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 = 0.8 \text{ m}, \rho_1 = 1.1718 \text{ kg/m}, \\ \rho_2 = 0.5859 \text{ kg/m}, M_{n1} = 0.5 \text{ kg}, M_{n2} = 0, \\ EI_1 = 544.32 \text{ N} \cdot \text{m}^2, EI_2 = 68.04 \text{ N} \cdot \text{m}^2, \\ J_1 = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_2 = 0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_h = 0 \end{aligned}$$

为便于分析式 (19) 所定义的零动态子系统的动态响应, 令 $\lambda_0 = \text{diag}[\lambda_{01}, \lambda_{02}]$, $\lambda_1 = \text{diag}[\lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}]$, R 为 $A(\lambda_0, \lambda_1)$ 特征值的最大实部

当 $\lambda_{00} = \lambda_{01} = 1$ 时, λ_1 与 R 之间的等高线如图 2 所示; 当 $\lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 2$ 时, $\lambda_{00}, \lambda_{01}$ 与 R 之间的等高线如图 3 所示. 图中 R 被离散为间隔为 0.01 的数值, 不同的曲线代表不同的 R 值, R 的绝对值沿箭头方向逐渐增大, 表示系统的特征值逐渐远离坐标原点, 系统收敛速度加快.

改变 λ_0 和 λ_1 的数值可改变零动态子系统的性能. 如果 λ_0 和 λ_1 选择合适, 则零动态子系统不但渐

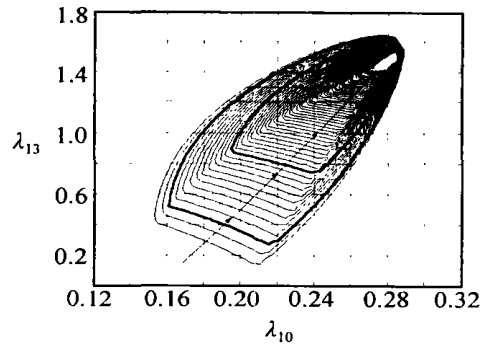


图 2 λ_1 与 R 之间的等高线

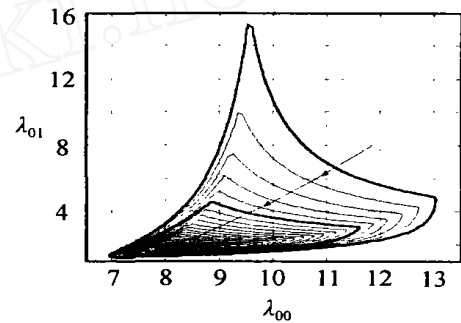


图 3 λ_0 与 R 之间的等高线

近稳定, 而且系统收敛速度加快; 如果 λ_0 和 λ_1 选择不当, 则零动态子系统将不稳定. 因此可根据图 2 和图 3 合理地选择 λ_0 和 λ_1 的数值.

4 仿真研究

模型中每个柔性机械手臂均采用两个柔性模态, 采用定理 1 中的参数. 滑模选为 $s(t) = \dot{z}(t) + 0.5z(t)^{3/5}$; 选择 $\lambda_0 = \text{diag}[7.68, 1.45]$, $\lambda_1 = \text{diag}[2, 2, 2, 2]$; 系统状态初值选为 $\theta(0) = 1$, $\Theta(0) = 0.5$, 其余状态初值均为零.

仿真结果如图 4~ 图 9 所示. 由仿真结果可见, 柔性机械手系统的端点位移渐近收敛到零, 并且柔性模态也渐近收敛, 表明本文提出的逆动态终端滑模控制策略是有效的. 与文献[5~ 8]相比, 重新定义的系统输出中的设计参数由原来的 2 个增至 6 个, 参数的取值范围由原来的 [0, 1] 之间增至整个实数范围, 使得保证零动态子系统稳定的设计参数选择余地增大, 系统的收敛速度加快.

5 结论

本文重新定义了柔性机械手系统的输出, 使其零动态子系统在平衡点附近为最小相位系统. 所设计的逆动态终端滑模控制器, 可保证输入输出子系统的状态在有限时间内收敛到零, 并通过选择合适

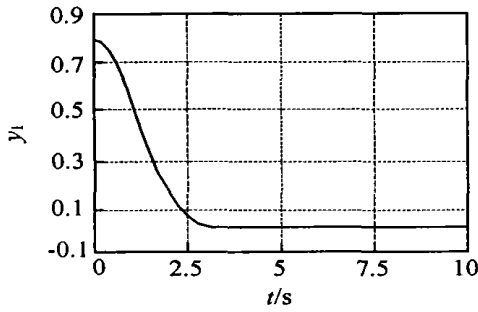


图 4 柔性机械手的端点位移 $y_1(L, t)$

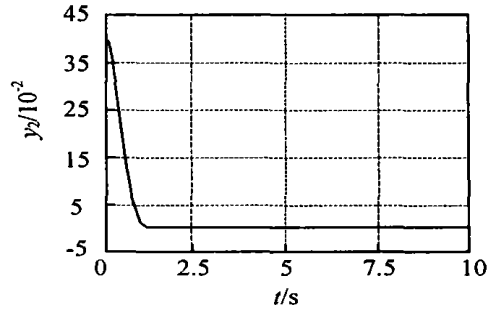


图 5 柔性机械手的端点位移 $y_2(L, t)$

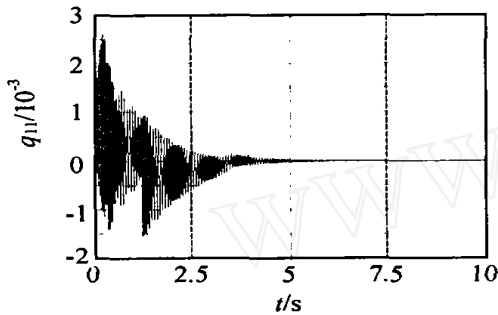


图 6 第 1 个柔性机械手的柔性模式 q_{11}

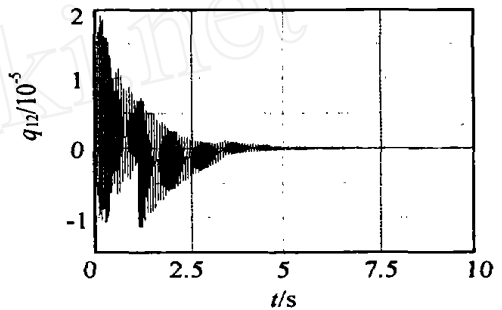


图 7 第 1 个柔性机械手的柔性模式 q_{12}

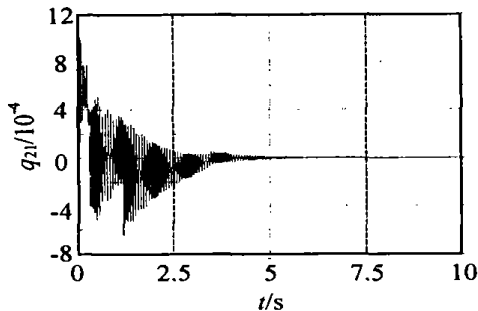


图 8 第 2 个柔性机械手的柔性模式 q_{21}

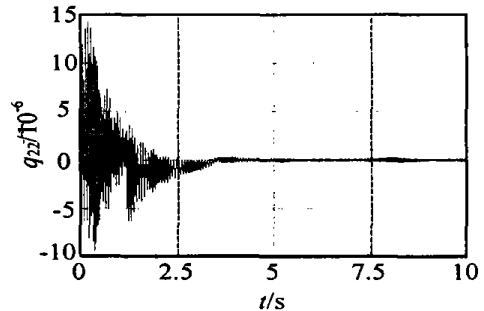


图 9 第 2 个柔性机械手的柔性模式 q_{22}

的参数, 保证柔性机械手系统的零动态子系统在平衡点处渐近稳定, 从而保证整个柔性机械手系统的渐近稳定。本文提出的终端滑模控制策略设计过程简单, 易于实现。

参考文献(References):

[1] Wang D, Vidyasagar M. Transfer function for a single flexible link [A]. *Proc IEEE Int Conf on Robotic Automation* [C]. Scottsdale, 1989. 1042-1047.
 [2] Moallem M, Patel R V, Khorasani K. *Flexible-link Robot Manipulators* [M]. London: Springer-Verlag, 2000.
 [3] Eric H K F, Cedric K M L. Variable structure tracking control of a single-link flexible arm using time-varying sliding surface [J]. *J of Robotic Systems*, 1999, 16(12): 715-726.
 [4] Hwang S T, Elmsahy A. An active adaptive tracking

controller for planar flexible manipulator [A]. *Proc IEEE/RSJ Int Conf Intelligent Robots System* [C]. Raleigh, 1992. 1689-1696.
 [5] Luca A D, Lanari L. Achieving minimum phase behavior in a one-link flexible arm [A]. *Int Symp on Intelligent Robotics* [C]. Bangalore, 1991. 224-235.
 [6] Madhavan S K, Singh S N. Inverse trajectory control and zero-dynamics sensitivity of an elastic manipulator [J]. *Int J of Robotic Automation*, 1991, 6(4): 179-191.
 [7] Damaren C J. Modal properties and control system design for two-link flexible manipulators [J]. *Int J of Robotics Research*, 1998, 17(6): 667-678.
 [8] Chen Y P, Yeung K S. Sliding-mode control of multi-link flexible manipulators [J]. *Int J Control*, 1991, 54(2): 257-278.
 [9] Slotine J J E, Li W P. *Applied Nonlinear Control* [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.