

文章编号: 1001-0920(2004)10-1147-04

一种融合 PCA 和 KFDA 的人脸识别方法

陈才扣^{1,2}, 杨静宇¹, 杨 健¹

(1. 南京理工大学 计算机科学与工程系, 江苏 南京 210094; 2 扬州大学 计算机科学与工程系, 江苏 扬州 225009)

摘要: 提出一种融合 PCA 和 KFDA 的人脸识别方法, 即在进行非线性映射之前, 首先利用经典的主分量分析(C-PCA)进行降维, 然后执行 KFDA. 为进一步降低整个算法的计算时间, 又提出一种 I-PCA + KFDA 方法, 它直接基于图像矩阵的主分量分析(I-PCA). ORL 标准人脸库的试验结果表明, 与现有的核 Fisher 鉴别分析方法相比, 两种方法可将特征抽取的速度分别提高 3 倍和 7 倍, 其识别精度没有丝毫的降低.

关键词: 主分量分析; 图像矩阵; 核 Fisher 鉴别分析; 特征抽取; 人脸识别

中图分类号: TP391

文献标识码: A

Fusion of PCA and KFDA for face recognition

CHEN Cai-kou^{1,2}, YANG Jing-yu¹, YANG Jian¹

(1. Department of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2 Department of Computer Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China Correspondent: CHEN Cai-kou, E-mail: chencaik@21cn.com)

Abstract: A fusion of PCA and KFDA for face recognition is developed. The algorithm includes two stages: firstly, the classical principal component analysis (C-PCA) is employed to condense the dimension of image vector. Then kernel Fisher discriminant analysis (KFDA) is applied to the reduced dimension of training samples. On this basis, a more efficient method, called I-PCA + KFDA, is proposed. Different from the previous method where C-PCA is based on vectors, I-PCA is to exploits image matrices to directly construct the image total scatter matrix. The experimental results on ORL face databases indicate that the proposed method is more efficient than KFDA while retaining the same recognition accuracy.

Key words: principal component analysis; image matrix; kernel Fisher discriminant analysis; feature extraction; face recognition

1 引言

当前, 核方法^[1-4]已成为模式识别领域的一个迅速发展的新方向. 它的主要思想是由 Vapnik^[1]提出并应用于支持向量机 (SVM). 其后, Scholkopf 等^[2]将核方法应用于特征抽取, 提出了核主分量分析 (KPCA) 方法. 实验结果表明, KPCA 不仅能抽取非线性特征, 而且具有更优的识别结果. Mika 等^[3]和 Roth 等^[4]利用核方法将 Fisher 线性鉴别分析进

一步拓广到非线性情形, 提出了核 Fisher 鉴别分析 (KFDA) 方法. KFDA 抽取的是高维特征空间中最佳鉴别特征, 本质上是原始输入空间中的非线性最佳鉴别特征.

尽管核方法在图像等模式识别领域取得成功的应用, 但也存在如下一些问题: 1) 构造特征空间 H 的核矩阵 K 所耗费的计算量非常大. 例如特征空间中最简单的核矩阵 $K = k(x_i, x_j)$, $i, j = 1, 2,$

收稿日期: 2003-11-03; 修回日期: 2004-02-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60072034); 教育部博士点基金资助项目 (20020288013).

作者简介: 陈才扣 (1967—), 男, 江苏姜堰人, 讲师, 博士生, 从事模式识别、图像检索等研究; 杨静宇 (1941—), 男, 河北秦皇岛人, 教授, 博士生导师, 从事计算机视觉、信息融合等研究.

..., N , N 为训练样本的总数 由于核函数 $k(x_i, x_j)$ 需要计算两个向量间的内积, 当向量的维数很高时 (如人脸识别中训练样本的维数高达上万维), 计算 K 所需的计算量为 $O(nN^2)$, 而人脸等图像识别通常都是典型的小样本问题, 训练样本的数目比它的维数小得多, 即 $N \ll n$ 2) 当训练样本数 N 很大时, 一方面会使核矩阵的存储空间急剧增加, 因为核矩阵的维数为 $N \times N$; 另一方面会造成核矩阵的不可逆

对于上述第 2 个问题, Scholkopf 等^[2] 提出了缩减集方法 为得到最优缩减集, 现有算法普遍采用一种近似算法的迭代法 当训练样本集较大时, 迭代法耗费的计算量是很可观的, 而该方法并没有降低原始训练样本的维数 n 本文面对的人脸识别是一个典型的小样本问题, 第 2 个问题不是很突出, 所以研究重点放在解决第 1 个问题上

经典的主分量分析^[5,6] (C-PCA) 是线性特征抽取的最重要的技术之一, 采用 C-PCA 分析技术进行人脸识别, 最重要的方法是 Eigenfaces^[7] 方法 经过 C-PCA 变换后的样本模式, 不仅能消除模式样本间的相关性, 实现模式样本的维数压缩, 而且能最大限度地保持原有样本模式的结构分布 为此, 本文提出一种融合 C-PCA 和 KFDA 的人脸识别方法, 即在非进行非线性映射之前, 首先利用经典的主分量分析降维, 然后执行核 Fisher 鉴别分析 为进一步降低经典 PCA 的处理时间, 使算法具有更高的效率, 本文对 C-PCA 进行改进, 提出了直接基于图像矩阵的主分量分析 (I-PCA). ORL 标准人脸库的试验结果验证了所提出算法的有效性

2 基于图像矩阵的主分量分析

Liu 等^[8] 和杨健^[9] 提出一种线性鉴别分析的新方法, 其基本思想是利用图像矩阵直接构造图像散布矩阵, 在此基础上进行鉴别分析 本文对 C-PCA 进行改进, 提出了直接基于图像矩阵的主分量分析方法 (I-PCA). 该方法在处理图像识别问题时, 不需事先将图像矩阵转化为图像向量, 而是直接利用图像矩阵本身构造的图像总体散布矩阵, 取其 d 个最大本征值所对应的标准正交的本征向量作为投影轴

设 X 表示 n 维单位化的列向量, 将 $m \times n$ 的图像矩阵 A 通过线性变换

$$Y = AX \quad (1)$$

直接投影到 X 上 于是得到一个 m 维列向量 Y , 称为图像 A 的投影特征向量 定义准则

$$J_p(X) = \text{tr}(T_s), \quad (2)$$

其中: T_s 表示投影特征 Y 的总体散布矩阵, tr 表示取矩阵的迹 最大化准则 (2) 的直观意义是寻找投影方向 X , 使得投影后所得特征向量的总体散布量最大 T_s 可表示为

$$T_s = E(Y - EY)(Y - EY)^T = E(A - EA)X(A - EA)X^T. \quad (3)$$

则总体散布量为

$$\text{tr}(T_s) = X^T[E(A - EA)^T(A - EA)]X. \quad (4)$$

定义图像总体散布矩阵

$$G_t = E(A - EA)^T(A - EA). \quad (5)$$

由此定义容易证明 G_t 为 $n \times n$ 的非负定矩阵 故式 (2) 的准则函数为

$$J_p(X) = X^T G_t X. \quad (6)$$

该准则称为广义总体散布量准则 最大化该准则的单位向量 X 称为最优投影轴, 其物理意义是图像矩阵在 X 方向上投影后, 所得特征向量的总体分散程度最大

一般说, 在样本类别较多的情况下, 单一的最优投影方向是不够的, 人们希望寻找一组满足标准正交条件且极大化准则函数 (6) 的最优投影轴 X_1, X_2, \dots, X_d 准则函数 (6) 等价于

$$J_R(X) = \frac{X^T G_t X}{X^T X}, \quad (7)$$

式 (7) 即为矩阵 G_t 的 Rayleigh 商 由 Rayleigh 商的极值性质^[10], 最优投影轴 X_1, X_2, \dots, X_d 可取 G_t 的 d 个最大本征值所对应的标准正交的本征向量 具体说, 设 G_t 的本征值满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 且对应的标准正交的本征向量为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 则最优投影轴可取 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$

设最优图像投影轴为 X_1, X_2, \dots, X_d , 令 $Y_k = AX_k, k = 1, 2, \dots, d$, 则可得到一组图像投影特征向量 Y_1, Y_2, \dots, Y_d 它们可合并为一个 $N = m \times d$ 维图像 A 的整体投影特征

$$Y = [Y_1^T, Y_2^T, \dots, Y_d^T]^T, \quad (8)$$

用于核 Fisher 鉴别分析 (KFDA).

3 核 Fisher 鉴别分析

本节利用上述经典主分量分析或基于图像矩阵的主分量分析, 对原始输入空间中的训练样本进行降维变换, 再通过某非线性映射 ϕ 由预先选定的核函数隐式地确定) 变换到某高维特征空间 H . 在特征空间 H 上, 训练样本的类内散布矩阵 S_w^ϕ 和类间散布矩阵 S_b^ϕ 分别定义为

$$S_b^\phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c N_i (m_i^\phi - m^\phi)^\top (m_i^\phi - m^\phi)^\top, \quad (9)$$

$$S_w^\phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{N_i} (\Phi_{Y_j}) - m_i^\phi (\Phi_{Y_j}) - m_i^\phi)^\top. \quad (10)$$

其中

$$m^\phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \Phi_{Y_i}, m_i^\phi = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_{Y_j},$$

$$i = 1, 2, \dots, c;$$

Y_i 是经 C-PCA / F-PCA 变换后的样本向量; c 是训练样本的类数

在特征空间 H 上应用 Fisher 鉴别准则函数

$$J_f^\phi(w) = \frac{w^\top S_b^\phi w}{w^\top S_w^\phi w}, \quad (11)$$

其中 w 是特征空间 H 内的任意非零向量 特征空间 H 的维数很高甚至可以是无限维, 并且不知道非线性映射 Φ 的具体形式, 所以必须确定鉴别向量 w 的表达形式

3.1 鉴别向量 w 表达式的确定

定义 1 定义子空间 $V = \text{span}\{\Phi_{X_1}, \Phi_{X_2}, \dots, \Phi_{X_N}\}$, 其正交补空间为 V^\perp , 特征空间 $H = V \oplus V^\perp$.

引理 1 设 $T \in R^{n \times n}, \forall X, Y \in R^n$, 则 $(TX, Y) = (X, TY)$ 成立的充要条件是 T 为实对称矩阵

定理 1 对于任一向量 $w \in H, w = v_1 + v_2$, 其中 $v_1 \in V, v_2 \in V^\perp$, 根据 Fisher 鉴别准则函数, 有 $J_f^\phi(w) = J_f^\phi(v_1)$.

证明 设 S 表示特征空间 H 上的类内散布矩阵或类间散布矩阵 根据散布矩阵的定义, 易知 S 是实对称矩阵且由 Φ_{X_i} 通过线性运算生成的 根据定义 1, $\Phi_{X_i} \in V$, 则有 $Sv_2 = 0$ 根据引理 1 以及 S 的定义, 有

$$v_1, Sv = Sv, v_1,$$

$$w, Sw = (v_1 + v_2), S(v_1 + v_2) = v_1, Sv_1 + v_1, Sv_2 + v_2, Sv_1 + v_2, Sv_2 = v_1, Sv_1.$$

当 S 取为 S_b^ϕ 和 S_w^ϕ 时, 有

$$w, S_b^\phi w = v_1, S_b^\phi v_1, w, S_w^\phi w = v_1, S_w^\phi v_1.$$

因此

$$J_f^\phi(w) = \frac{w, S_b^\phi w}{w, S_w^\phi w} = \frac{v_1, S_b^\phi v_1}{v_1, S_w^\phi v_1} = J_f^\phi.$$

由定理 1 可知, 最优鉴别向量可在子空间 V 内选取, 这对 Fisher 鉴别准则而言, 不会损失任何有效鉴别信息 所以最优鉴别向量 w 可表示为

$$w = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_{X_i}, \quad (12)$$

其中 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^\top \in R^N$.

3.2 特征空间 H 的 Fisher 鉴别分析

在特征空间 H 中寻找最优的线性鉴别向量 (对应于原始空间中的非线性鉴别向量), 必须将鉴别准则变换为仅包含内积或核函数的形式 将式 (9), (10) 和 (12) 代入 (11), 得

$$w^\top S_b^\phi w = \alpha^\top K_b \alpha, w^\top S_w^\phi w = \alpha^\top K_w \alpha \quad (13)$$

其中

$$K_b = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^c N_j (\mu_j - \mu) (\mu_j - \mu)^\top,$$

$$K_w = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^{N_j} (\zeta_j - \mu_j) (\zeta_j - \mu_j)^\top,$$

$$\zeta_j = [k(X_{1j}, X_{1j}), \dots, k(X_{Nj}, X_{Nj})]^\top,$$

$$\mu_j =$$

$$\left[\frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \Phi_{X_{1k}} \Phi_{X_{1k}} \dots \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \Phi_{X_{Nk}} \Phi_{X_{Nk}} \right]^\top,$$

$$\mu =$$

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Phi_{X_1} \Phi_{X_1} \dots \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Phi_{X_N} \Phi_{X_N} \right]^\top.$$

结合式 (13), 可得到特征空间 H 上的 Fisher 鉴别准则函数的等价形式

$$J_f^\phi(\alpha) = \frac{w^\top S_b^\phi w}{w^\top S_w^\phi w} = \frac{\alpha^\top K_b \alpha}{\alpha^\top K_w \alpha} \quad (14)$$

由广义 Rayleigh 商的极值性质^[10], 使得准则 (14) 极大化的最优解向量集为广义特征方程

$$K_b \alpha = \lambda K_w \alpha \quad (15)$$

的 d 个最大特征值所对应的特征向量 $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^d$. 式 (15) 至多存在 $c - 1$ 个非零特征向量, 故式 (14) 最优解向量的个数 $d \leq c - 1$, 其中 c 为训练样本的总类别数 新的检验样本 Z 在特征空间 H 上的最优鉴别向量 w 上的投影为

$$w^\top \Phi(Z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \Phi_{X_k} \Phi(Z) =$$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k k(X_k, Z) =$$

$$\alpha^\top [k(X_1, Z), \dots, k(X_N, Z)]^\top = \alpha^\top \zeta, \quad (16)$$

在特征空间 H 内, 设 w_1, w_2, \dots, w_d 为所确定的投影轴, 则线性变换

$$Y = W^\top \Phi(X) = [w_1 \dots w_d]^\top \Phi(X) =$$

$$\begin{bmatrix} w_1^\top \Phi(X) \\ \vdots \\ w_d^\top \Phi(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha^1)^\top \zeta \\ \vdots \\ (\alpha^d)^\top \zeta \end{bmatrix} =$$

$$[\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^d]^T \zeta, \quad (17)$$

可用于最优特征的抽取

4 算法实现

1) 分别利用 C-PCA / I-PCA 对原始输入空间中的训练样本 $x_i \in R^n (i = 1, 2, \dots, N)$ 降维, 得到降维后的训练样本 $y_i \in R^m, m \ll n, i = 1, 2, \dots, N$;

2) 对降维后训练样本进行核 Fisher 鉴别分析;

3) 利用式 (17) 计算每个原始样本的最终特征向量;

4) 利用最近邻分类器或最小距离分类器进行分类识别

本文的人脸识别算法结构如图 1 所示

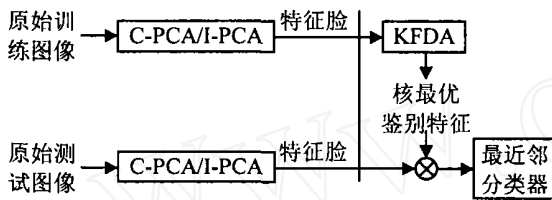


图 1 人脸识别算法结构

5 试验结果

ORL 标准人脸库由 40 人, 每人 10 幅 112×92 图像组成 其中: 有些图像拍摄于不同时期; 人的脸

表 1 ORL 人脸库的 C-PCA + KFDA 试验结果

投影轴数	60	65	70	75	80	85	90	95	100
最小距离	0.945	0.950	0.945	0.960	0.960	0.970	0.960	0.960	0.960
最近邻	0.940	0.935	0.955	0.960	0.970	0.970	0.970	0.965	0.965

表 2 ORL 人脸库的 I-PCA + KFDA 试验结果

投影轴数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
最小距离	0.845	0.950	0.955	0.965	0.970	0.970	0.960	0.965	0.965
最近邻	0.855	0.955	0.960	0.970	0.970	0.970	0.965	0.970	0.965

表 3 最佳识别率对比 %

识别率	KFDA	C-PCA + KFDA	I-PCA + KFDA
最小距离	97	97	97
最近邻	97	97	97

表 4 特征抽取和识别时间对比 s

时 间	特征抽取时间	分类时间	总时间
KFDA	650.79	25.16	675.95
C-PCA + KFDA	308.21	25.04	330.25
I-PCA + KFDA	69.09	25.11	94.20

由表 4 可见, 与 KFDA 相比, 本文方法具有明显的速度优势, 而且其识别精度完全相同

部表情和脸部细节具有不同程度的变化, 比如笑或不笑, 眼睛或睁或闭, 戴或不戴眼镜; 人脸姿态也有相当程度的变化, 深度旋转和平面旋转可达 20° ; 人脸的尺度变化多达 10%.

实验中以每人的 5 幅图像作为训练样本, 其余的 5 幅作为测试样本, 这样训练样本和测试样本总数均为 200 选用的核函数为高斯核函数, 参数 $\sigma = 1.5e8$

第 1 步: 分别利用 C-PCA 和 I-PCA 对原始输入训练样本进行降维, 用 C-PCA 抽取 60~100 个主分量, 结果见表 1 对于 I-PCA, 构造图像总体散布矩阵 G_i , 计算出前 10 个最大本征值所对应的标准正交的本征向量 X_1, X_2, \dots, X_d , 选取其中的 1~9 作为投影轴抽取式 (8) 的特征, 结果见表 2 人脸灰度图像是 112×92 矩阵, 若取 k 个投影轴, 则所得整体投影特征向量的维数为 $112k$.

第 2 步: 对第 1 步得到的两种低维训练样本, 利用 KFDA 分别抽取 39 个 C-PCA + KFDA 最优鉴别向量和 I-PCA + KFDA 最优鉴别向量 作为比较, 直接对原始训练样本利用核 Fisher 鉴别分析抽取最优非线性特征, 获得 39 个最优鉴别向量 在每个投影空间内, 分别利用最近邻分类器、最小距离分类器进行分类识别, 识别结果分别如表 3 和表 4 所示

6 结 论

本文提出了 C-PCA + KFDA 方法, 即首先进行 PCA, 然后执行 KFDA. 实验结果验证了该方法的有效性 经典的 PCA 方法是基于图像向量的方法, 而图像 (如人脸) 向量的维数通常高达上万维 为进一步缩减时间, 本文又提出了直接基于图像矩阵的 PCA (I-PCA) 方法 ORL 标准人脸库的试验结果表明, 与现有的核 Fisher 鉴别分析方法相比, 本文的两种方法可将特征抽取的速度分别提高 3 倍和 7 倍, 而且保持了原有的识别性能 本文方法同样可应用于 KPCA 和 SVM.

(下转第 1154 页)

表1 NCS系统各回路具体参数

回路数	K_i	T_i	w_i	α_i	β_i	δ_i^l (ms)	c_i (ms)	f_i^{\min} (Hz)	f_i^{\max} (Hz)
1#	0.3	5		0.3	2.14			68.18	
2#	0.4	4		0.4	4.28			59.88	
3#	10	0.5	3	2/3	0.5	6.42	2.14	53.37	93.46
4#	0.6	2		0.6	8.56			48.14	
5#	0.7	1		0.7	10.7			43.84	

采用本文提出的工程化求解方法,经少量运算就能很快得到系统优化采样频率为: $f_1^* = 93.46$ Hz, $f_2^* = 77.2$ Hz, $f_3^* = 61.63$ Hz, $f_4^* = 50.98$ Hz, $f_5^* = 43.84$ Hz, $\min\{\Delta J\} = 250.5895 \times 10^{-14}$. 在相同条件下,对各回路采样频率相应区间以步长 $\Delta = 0.01$ Hz 进行全局遍历搜索,得到系统优化值为: $f_1^* = 93.46$ Hz, $f_2^* = 77.19$ Hz, $f_3^* = 61.63$ Hz, $f_4^* = 50.98$ Hz, $f_5^* = 43.84$ Hz, $\min\{\Delta J\} = 250.6274 \times 10^{-14}$. 可见二者具有一致的结果,但前者的计算量仅为后者计算量的 1.568×10^{-16} .

6 结 论

在多回路网络化控制系统中,网络带宽、传输时延、网络利用率、系统采样频率等因素相互制约.在已选定控制网络类型的情况下,回路传输时延和网络利用率对各回路优化采样频率影响很大.本文运用非线性规划理论分析和推导了此类优化问题的解,归纳了易于计算机编程实现的工程化求解方法.所提出的优化算法具有一定的实际应用价值.

(上接第1150页)

参考文献(References):

- [1] Vapnik V. *The Nature of Statistical Learning Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [2] Bernhard Scholkopf, Alexander Smola, Klaus Robert Muller. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem [J]. *Neural Computer*, 1998, 10: 1299-1319.
- [3] Sebastian Mika, Gunnar Ratsch, Jason Weston, et al. Fisher discriminant analysis with kernels [A]. *IEEE Workshop on Neworks for Signal Processing* [C]. Piscataway, 1999. 41-48.
- [4] Volker Roth, Volker Steinhage. Nonlinear discriminant analysis using kernel functions [A]. *Proc of Neural Information Processing Systems* [C]. Denver, 1999. 568-574.
- [5] Pentland A. Looking at people: Sensing for ubiquitous and wearable computing [J]. *IEEE Trans on Pattern*

参考文献(References):

- [1] 彭可, 陈际达, 邹润民, 等. 控制系统网络化及控制系统与信息网络集成技术[J]. *信息与控制*, 2002, 31(5): 441-445.
(Peng Ke, Chen Ji-da, Zou Run-min, et al. Networking of control system and integration technology of control system with computer network [J]. *Information and Control*, 2002, 31(5): 441-445.)
- [2] Lian Feng-li, James R Moyné. Network design consideration for distributed control systems [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, 10(2): 297-308.
- [3] Lian Feng-li, James R Moyné. Time delay modeling and sample time selection for networked control systems [J]. *Proc of ASME — Dynamics Systems and Control Division*, 2002, 70: 313-320.
- [4] Danbing Seto, John P Lehoczky. On task schedulability in real-time control systems [A]. *IEEE Real-time Systems Symp* [C]. Washington, 1996. 13-21.
- [5] 刘怀, 王绪伟, 胡继峰, 等. 控制系统周期性任务调度中优化采样频率的求取[J]. *计算机工程与应用*, 2002, 38(14): 76-78.
(Liu Huai, Wang Xuwei, Hu Jifeng, et al. Solving optimal sampling frequencies for periodic task scheduling in control system [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2002, 38(14): 76-78.)
- [6] 陈开明. 非线性规划[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1991. 27-33.

Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(1): 107-119.

- [6] Maxim A Grudin. On internal representations in face recognition systems [J]. *Pattern Recognition*, 2000, 33(8): 1161-1177.
- [7] Turk M, Pentland A. Face recognition using eigenfaces [A]. *Proc IEEE Conf on Computer Vision and Pattern Recognition* [C]. Hawaii, 1991. 586-591.
- [8] Liu K, Cheng YQ, Yang JY, et al. Algebraic feature extraction for image recognition based on an optimal discriminant criterion [J]. *Pattern Recognition*, 1993, 26(6): 903-911.
- [9] 杨健. 线性投影分析的理论及算法及其在特征抽取中的应用研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2002.
- [10] 程云鹏. 矩阵论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1999. 294-302.