文章编号: 1001-0920(2004)10-1163-04

# 基于模糊子集合拟合对非线性系统的模糊控制

杨治平[1], 曹长修[2]
(1. 重庆师范大学 现代教育技术系, 重庆 400047; 2. 重庆大学 自动化学院, 重庆 400044)

**摘　要**: 实际受控系统都存在非线性和不确定性, 使得参数化模型控制算法难以实施. 为此, 提出一种非参数化模型的模糊控制算法, 即在非线性系统中对局部过程实施模糊分段线性化, 对分段线性化的过程进行联接, 将分段线性化的模糊模型集合拟合为全局非线性模型. 其控制律是由局部线性化的模糊控制律经模糊联接而构成整体非线性系统的模糊控制律. 通过稳定性证明和仿真验证, 论证了所给算法的有效性.

**关键词**: 非线性系统; 模糊模型; 局部线性化; 全局稳定性
**中图分类号**: TP271. 3　　**文献标识码**: A

# Fuzzy control of nonlinear systems based on synthesis of fuzzy sub-model

*YANG Zhi-ping*[1], *CAO Chang-xiu*[2]
(1. Department of Modern Educational Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China; 2. College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China. Correspondent: YANG Zhi-ping, E-mail: yzp417@163.com)

**Abstract**: Nonlinearity and uncertainty make it difficult to control systems in practice. A fuzzy control scheme is proposed for nonlinear processes. Fuzzy linearized sub-processes are used and connected to structure the whole nonlinear system. The fuzzy control of nonlinear system is fulfilled according to synthesis of fuzzy sub-models. Stability proof and simulation show the effectiveness of the presented algorithms.

**Key words**: nonlinear system; fuzzy model; local linearization; global stability

## 1 引　　言

实际受控系统都存在非线性, 这种"黑箱"特性或"灰箱"特性使得许多控制方案很难实施. 为对这类受控系统进行有效控制, 现已推出多种控制方法, 但切合实际的控制算法却很少. 模糊控制算法对模型的要求不高, 对先验知识所需不多, 使得该类方案容易实施, 算法构成也不复杂. 本文在这方面作了进一步探索, 提出了基于模糊集合拟合的非线性系统以及模糊控制算法, 并给出了理论证明和实例验证.

Takagi-Sugeno[1,2]通过模糊模型的应用, 给出了局部线性模型代替整体非线性系统的方法. 本文则通过构建局部线性化的模糊模型, 将各模糊子模型联接后构成模型集合, 以拟合整体非线性系统. 拟合后的非线性系统是否符合稳定性要求, 是控制律设计以及控制算法能否实施的关键. 为此, 给出了对拟合的非线性系统的稳定性证明, 确立了模糊控制算法成立的依据. 在控制器的设计上, 参照文献[3]的并行分布补偿原理, 给出了整体非线性系统的模糊控制律. 为适合多变量系统控制和数据观测, 在模糊控制中结合状态空间设计方法, 提出了模糊控制的稳定性判据, 最终实现了非线性系统的模糊控制.

**收稿日期**: 2003-12-09; **修回日期**: 2004-06-17.
**作者简介**: 杨治平(1957—), 男, 辽宁辽阳人, 副教授, 硕士, 从事自适应控制、模糊控制等研究; 曹长修(1942—), 男, 山东诸城人, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、数字图像处理等研究.

## 2　非线性系统的模糊拟合

根据 T-S 的分段模糊拟合原理,整体非线性系统可由局部分段模糊线性系统来近似拟合,分段模糊子模型经过模糊运算连接,可代替整体非线性系统.根据模糊集合理论,非线性模型构建过程如下:

设有 $i$ 个子系统,采用 $r$ 个模糊规则,则时延系统的模糊子对象为

If $z_1(t)$ is $\mu_{i1}$ and $\cdots$ and $z_p(t)$ is $\mu_{ip}$,

$$\text{Then } \mathring{x}(t) = A_{1i}x(t) + A_{2i}x(t-\tau_i(t)) + B_iu(t), \tag{1}$$

$$y(t) = C_{1i}x(t) + C_{2i}x(t-\tau_i(t)), \tag{2}$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t\in[0,\tau],\ \tau_i(t)\le\tau \tag{3}$$

其中:$\mu_{ij}$ 是模糊集合;$x(t)\in R^n$ 是状态向量;$u(t)\in R^m$ 是输入向量;$y(t)\in R^q$ 是输出向量;$A_{1i}, A_{2i}, B_i, C_{1i}, C_{2i}$ 是适当维的常数矩阵;$r$ 是 If-Then 规则数;$z_1(t),\cdots,z_p(t)$ 是与验前知识有关的前置变量;$\tau_i(t)\le\tau(i=1,2,\cdots,r)$ 是有界时延;$\varphi(t)$ 是定义在区间 $[0,\tau]$ 上的状态向量初始连续函数.

对于给定的向量对 $(x(t),u(t))$,模糊拟合系统的状态向量变化和最终输出分别为

$$\mathring{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))[A_{1i}x(t) + A_{2i}x(t-\tau_i(t)) + B_iu(t)]}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[A_{1i}x(t) + A_{2i}x(t-\tau_i(t)) + B_iu(t)], \tag{4}$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))[C_{1i}x(t) + C_{2i}x(t-\tau_i(t))]}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[C_{1i}x(t) + C_{2i}x(t-\tau_i(t))]. \tag{5}$$

其中

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), \cdots, z_p(t)],$$

$$w_i(t) = \prod_{j=1}^{p} v_{ij}(z_j(t)),$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{j=1}^{r} w_j(z(t))}.$$

式中:$z_1(t),\cdots,z_p(t)$ 是与系统输出有关的变量,设其不取决于输入变量 $u(t)$,这样可使式(4) 和(5) 的计算避免复杂的解模糊过程;$v_{ij}(z_j(t))$ 是 $z_j(t)$ 在 $\mu_{ij}$ 上的隶属函数;$w_i(z(t))\ge 0,\ i=1,2,\cdots,r$, $\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) > 0$; $h_i(z(t))\ge 0,\ i=1,2,\cdots,r$, $\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t)) = 1$.

经各子系统拟合后,可用状态向量形式表示为

$$\mathring{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[A_{1i}x(t) + A_{2i}x(t-\tau_i(t))]. \tag{6}$$

为拟合整个非线性系统,Takagi-Sugino 给出了参与拟合的各子系统,并且证明了各子系统的稳定性,但没有论证拟合后整个系统的稳定性,这使得全局控制律的设计依据显得不足.为保证整体控制律的设计更加科学严密,还需给出拟合后的整体非线性系统的全局稳定性的证明.这里参照文献[4]的稳定控制原理,引用 Lyapunov 稳定性原理,通过 Lyapunov 稳定条件可推出:

如果存在一普通矩阵和 $r$ 个矩阵 $s_i$,则有

$$A_{1i}^{T}P + PA_{1i} + P + PA_{2i}S_iA_{2i}^{T}P < 0,$$
$$P \ge S^{-1},\ i=1,2,\cdots,r. \tag{7}$$

式(7) 称为系统稳定的 Lyapunov 条件.为给出上述稳定性的证明,选择 Lyapunov 函数

$$V(x(t)) = x^{T}(t)Px(t), \tag{8}$$

当选定正定矩阵 $P$ 后,显然存在有界数 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$,使得

$$\sigma_1\|x(t)\|^2 \le V(x(t)) \le \sigma^2\|x(t)\|^2. \tag{9}$$

这里取 $\sigma_1 = \lambda_{\min}(p)$, $\sigma_2 = \lambda_{\max}(p)$.与式(8) 的 Lyapunov 函数 $V(x(t))$ 对应的全局模型的导函数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) = {} & \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[x^{T}(t)(A_{1i}^{T}P + PA_{1i})x(t) + 2x^{T}(t)PA_{2i}x(t-\tau_i(t))] \le \\ & \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[x^{T}(t)(A_{1i}^{T}P + PA_{1i} + PA_{2i}S_iA_{2i}^{T}P)x(t) + x(t-\tau_i(t))S_i^{-1}x(t-\tau_i(t))] \le \\ & \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[x^{T}(t)(A_{1i}^{T}P + PA_{1i} + PA_{2i}S_iA_{2i}^{T}P)x(t) + V(x(t-\tau_i(t)))].\end{aligned} \tag{10}$$

考虑与状态变量有关的动态时延 $\theta$,如果存在实数 $v > 1$,使得 $V(x(t-\theta)) < V(x(t))$, $\theta\in[0,\tau]$,则

$$\dot{V}(x(t)) < \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[x^{T}(t)(A_{1i}^{T}P + PA_{1i} +$$

$$PA_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm{T}}P)x(t) + vV(x(t))]. \qquad (11)$$

显然, 如果

$$\theta(v) = A_{1i}^{\mathrm{T}}P + PA_{1i} + PA_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm{T}}P + VP < 0, \qquad (12)$$

则对于所有的 $i$, 当 $\dot{V}(x(t)) < 0$ 时, 整个模糊系统是渐近稳定的. 当系统连续变化时, 选择适当的 $v$, 使得 $v = 1 + \delta$ 充分小, 这样对于所有的 $i$, 则有 $\theta(v) < 0$ 成立.

上述证明过程表明, 可通过 T-S 模型, 对 $r$ 个子系统求解对称正定矩阵 $P$ 而获得整体非线性模型, 系统成立的稳定性判据是通过求解 Lyapunov 函数导出的. 在此基础上, 模糊控制器的设计便具有稳定的依据.

## 3　状态反馈模糊控制器设计

上节给出了基于模糊算法的模糊模型, 以状态向量表示的整体非线性模糊模型如式(6)所示. 在此基础上, 基于状态向量的函数式, 结合 Lyapunov 函数给出模糊模型的全局稳定性证明, 为状态向量控制奠定必要的设计基础. 构建基于现代控制理论的控制器有两种方法: 一种是基于输出反馈的设计方法; 另一种是基于状态反馈的设计方法. 本节给出基于状态反馈的方法设计模糊控制器. 参照模糊控制规则[4,5], 对受控对象 $i$ 构建所给模糊模型的控制律

If $z_1(t)$ is $\mu_{i1}$ and $\cdots$ and $z_p(t)$ is $\mu_{ip}$,

Then $u(t) = -F_ix(t)$, $i = 1, 2, \cdots, r$. (13)

其中: $u$ 为控制量, $x$ 为状态向量, $F$ 是保证系统稳定控制的基于状态反馈的增益矩阵. 对各子模型进行联结后, 可获得全局模型的全状态反馈模糊控制律

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))F_ix(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))F_ix(t). \qquad (14)$$

状态反馈模糊控制器的设计必须保证有时延闭环控制系统的局部增益, 状态的变化也必须包含增益矩阵. 因此得到

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = {} & \sum_{i,j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))[(A_{1i} - B_iF_j)x(t) + A_{2i}x(t-\tau_i(t))] = \\ & \sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t))[G_{ii}x(t) + A_{2i}x(t-\tau_i(t))] + \\ & \sum_{i,j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))[(G_{ij} + G_{ji})x(t) + \\ & A_{2i}x(t-\tau_i(t)) + A_{2j}x(t-\tau_j(t))],\end{aligned} \qquad (15)$$

其中 $G_{ij} = A_{1i} - B_iF_j$. 对于状态反馈律, 需要保证整体状态反馈模糊控制律实施后的全局稳定性. 如果式(15)是渐近稳定的, 则存在矩阵 $x > 0$, $S_i > 0$, $Y_i$ 满足 $S_i > x$; 同时还应有下列矩阵不等式成立, 即

$$\begin{aligned}& xA_{1i}^{\mathrm{T}} + A_{1i}x - B_iY_i - Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} + \\ & x + A_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm{T}} < 0,\end{aligned} \qquad (16)$$

$$\begin{aligned}& xA_{1i}^{\mathrm{T}} + A_{1i}x + xA_{1j}^{\mathrm{T}} - A_{1j}x - B_iY_j - \\ & Y_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} - B_jY_i - Y_i^{\mathrm{T}}B + 2x + \\ & A_{2i}S_iA_{1j}^{\mathrm{T}} + A_{2j}S_jA_{2j}^{\mathrm{T}} < 0.\end{aligned} \qquad (17)$$

式(16)和(17)是基于 Lyapunov 函数给出的, 详见文献[4]. 满足式(16)和(17)并基于式(17)求解状态反馈增益

$$F_i = Y_ix^{-1}, \ i = 1, 2, \cdots, r. \qquad (18)$$

由式(18)解出的反馈增益阵 $F$ 代入式(14), 可得全局模型的全状态反馈模糊控制律, 第 2 节给出的全局模糊模型稳定性的证明, 是保证系统稳定控制的必要基础. 在此基础上构建的基于状态空间的模糊控制律, 还必须给出其充分性证明. 现证明如下:

选择 Lyapunov 函数(8), 其中 $P = x^{-1} > 0$. 则有

$$\begin{aligned}& \dot{V}(x(t)) = \\ & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))[x^{\mathrm{T}}(t)(G_{ij}^{\mathrm{T}}P + \\ & PG_{ij})x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_{2i}x(t-\tau_i(t))] = \\ & \sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t))[x^{\mathrm{T}}(t)(G_{ii}^{\mathrm{T}}P + PG_{ii})x(t) + \\ & 2x^{\mathrm{T}}PA_{2i}x(t-\tau_i(t))] + \\ & \sum_{i,j=1}^{r} h_i^2(z(t))h_j(z(t))\{x^{\mathrm{T}}(t)[(G_{ij} + G_{ji})^{\mathrm{T}}P + \\ & P(G_{ij} + G_{ji})]x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_{2i}x(t- \\ & \tau_i(t)) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_{2j}x(t-\tau_j(t))\} \le \\ & \sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t))[x^{\mathrm{T}}(t)(G_{ii}P + PG_{ii} + \\ & PA_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm{T}}P)x(t) + x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i(t))S_i^{-1}x(t- \\ & \tau_i(t))] + \sum_{i,j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))\{x^{\mathrm{T}}(t)[(G_{ij} + \\ & G_{ji})^{\mathrm{T}}P + P(G_{ij} + G_{ji}) + PA_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm{T}}P + \\ & PA_{2j}S_jA_{2j}^{\mathrm{T}}P]x(t) + x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i(t))S_i^{-1}x(t- \\ & \tau_i(t)) + x^{\mathrm{T}}(t-\tau_j(t))S_j^{-1}x(t-\tau_j(t))\} \le\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t))[x^{\mathrm T}(t)(G_{ii}^{\mathrm T}P + PG_{ii} + PA_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm T}P)x(t) + V(x(t-\tau_i(t)))] + \sum_{i,j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))\{x^{\mathrm T}(t)[(G_{ij}+G_{ji})P + P(G_{ij}+G_{ji}) + PA_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm T}P + PA_{2j}S_jA_{2j}^{\mathrm T}P]x(t) + V(x(t-\tau_i(t))) + V(x(t-\tau_j(t)))\}. \quad (19)$$

如果存在实数$V(x(t-\theta)) < vV(x(t))$, 当$\theta \in [0, \tau]$时, 则有

$$\dot V(x(t)) < \sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t))[x^{\mathrm T}(t)(G_{ii}^{\mathrm T}P + PG_{ii} + PA_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm T}P + vP)x(t)] + \sum_{i,j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))x^{\mathrm T}(t)[(G_{ij} + G_{ji})^{\mathrm T}P + P(G_{2j}+G_{ji}) + PA_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm T}P + PA_{2j}S_jA_{2j}^{\mathrm T}P + 2vP]x(t). \quad (20)$$

在式(20)中, 如果

$$xG_{ii}^{\mathrm T} + G_{ii}x + vx + A_{2i}S_iA_{2j}^{\mathrm T} \le 0,$$
$$x(G_{ij}+G_{ji}) + (G_{ij}+G_{ji})x + 2vx + A_{2i}S_iA_{2i}^{\mathrm T} + A_{2j}S_jA_{2j}^{\mathrm T} \le 0,\ i<j,$$

则必然有$\dot V(x(t)) < 0$, 使得式(20)满足稳定性要求

从上述推论中可以看出, 导出的状态反馈模糊控制律, 是通过求解Lyapunuv矩阵$P = x^{-1} > 0$和$r$个矩阵$S_i > 0$, 并且满足$S_i > P^{-1}$. 它是状态反馈控制律本身的控制机制, 这便证明了状态向量控制器设计的充分性

## 4　仿真验证

为检验对非线性系统的控制效果, 将模型参数和系数矩阵、模糊控制的隶属函数以及计算的控制器参数施加于所给模型 仿真中分别设置不同的系统时延值, 观察系统的响应状况 由图1的仿真曲线可以看出($k$为采样序列, $y(k)$为系统输出), 系统输出表现出良好的动态特性, 相关的控制指标较为理想, 系统控制也是稳定的

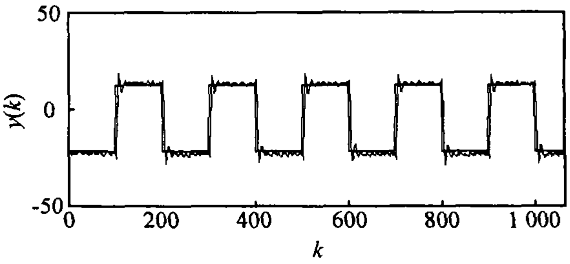


图1　非线性系统在模糊控制下的响应特性

## 5　结　　论

非线性系统因其不确定性而难以建模, 并且系统存在一定程度的时延, 使得系统控制更加困难 为保证系统的控制质量以及受控系统的稳定性, 人们正在探索各种控制方法 本文给出了基于模糊模型的控制方法, 首先根据T-S模糊模型构建子系统的线性模型; 然后将这些模糊子模型进行联接, 构成模糊子模型集合以代替整个非线性系统 拟合的非线性系统在控制中是否稳定, 文中利用Lyapunov稳定性理论给予了证明; 在此基础上, 运用状态空间理论和矩阵不等式, 依据模糊控制规则设计了模糊控制器, 并给出了控制算法的稳定性证明 从仿真结果看, 所给的控制算法是有效的, 控制器的设计是成功的

参考文献(References):

[1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116-132.

[2] Jang J S. Adaptive-network-based fuzzy inference system[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1993, 23(6): 665-684.

[3] Zheng F, Cheng M, Gao W B. Feedback stabilization of linear systems with distributed delays in state and control variables[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(10): 1714-1718.

[4] Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. An approach to fuzzy control of nonlinear system[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 14-23.

[5] 李士勇. 模糊控制、神经控制和智能控制论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996.