

文章编号: 1001-0920(2004)10-1171-04

## 分数阶线性系统的内部和外部稳定性研究

王振滨, 曹广益, 朱新坚

(上海交通大学 自动化系, 上海 200030)

**摘要:** 介绍了分数阶线性定常系统的状态方程描述和传递函数描述. 运用拉普拉斯变换和留数定理, 给出并证明了分数阶线性定常系统的内部和外部稳定性条件, 并讨论了其相互关系. 以一个粘弹性系统的实例验证了上述方法的正确性.

**关键词:** 分数阶系统; 分数导数; 线性定常; 状态空间描述; 稳定性

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Research on the internal and external stability of fractional order linear systems

WANG Zhen-bin, CAO Guang-yi, ZHU Xin-jian

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China. Correspondent: WANG Zhen-bin, E-mail: wzb123@sjtu.edu.cn)

**Abstract:** The state-space representation and the transfer function representation of fractional order linear time-invariant systems are introduced. Internal and external stability conditions for fractional order linear time-invariant systems are given using Laplace transform and residue theorem. An example of a viscoelastic system is given to show the effectiveness of the proposed methods.

**Key words:** fractional order systems; fractional derivative; linear time-invariant; state-space representation; stability

### 1 引言

分数微积分已有 300 多年的历史, 它是研究任意阶次的导数和积分的一门学科. 分数微积分理论的发展主要集中在纯数学领域, 且只是数学家研究的对象. 近年来, 由于计算机科学的快速发展, 使得许多以前不能计算的问题迎刃而解, 目前它已成为一个研究热点, 并在多个领域得到了应用, 如粘弹性体建模、声学、流变学、聚合化学、分形控制等<sup>[1-4]</sup>.

将分数微积分应用于控制领域是近年来的研究课题之一. 一些学者作了相关研究, 如 Oustaloup 等

提出了 CRONE 控制<sup>[5]</sup>; Podlubny 提出了分数阶  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器<sup>[3,6]</sup>; Ikeda 等研究了用于柔软构造物振动控制的分数阶阻尼器<sup>[7]</sup>; Tenreiro 研究了分数阶数字控制系统<sup>[8]</sup>等. 在同等条件下, 分数阶系统与整数阶系统相比具有以下优点: 1) 分数阶系统是整数阶系统的推广, 后者只是前者的特例; 2) 分数阶系统具有更强的记忆功能, 特别适合描述各种材料的记忆、遗传、机械和电特性<sup>[3]</sup>; 3) 分数阶系统更易稳定; 4) 分数阶 PD 控制器的调节范围更大. 其缺点是分数阶系统计算复杂, 收敛较慢且振荡剧烈.

**收稿日期:** 2003-12-04; **修回日期:** 2004-02-19

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (50206012); 国家 863 计划基金资助项目 (2003AA 517020); 上海市科技发展基金资助项目 (011607033).

**作者简介:** 王振滨 (1973—), 男, 江苏镇江人, 博士生, 从事分数阶线性系统、分数阶控制器等研究; 曹广益 (1941—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事建模与动态分析、机器人控制等研究.

稳定性是研究任何系统都必须考虑的首要问题,对于分数阶系统也不例外.考虑到分数阶系统的传递函数一般不是复变量  $s$  的有理函数,因而分数阶系统的稳定性分析要比整数阶系统复杂得多.本文运用拉氏变换和留数定理讨论分数阶线性定常系统的内部和外部稳定性条件及其相互关系

## 2 分数阶系统的状态方程和传递函数描述

### 2.1 状态方程描述

本文考虑的分数阶系统为同元次线性定常系统.所谓同元次是指系统中所有的分数导数项的阶次为某一有理数(整数或分数)的倍数,其状态方程可描述为

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

分数阶状态向量  $x(t)$  的  $\alpha$  阶 Caputo 导数定义为<sup>[3]</sup>

$${}_0D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau, \quad t > 0 \quad (2)$$

其零初始值条件下的拉氏变换为<sup>[3]</sup>

$$L\{D_t^\alpha x(t)\} = s^\alpha X(s), X(s) = L\{x(t)\}, \quad (3)$$

其中  $x(t)$  为分数阶状态变量,以标量函数  $u(t)$  和  $y(t)$  分别表示系统的输入和输出,  $A, B, C, D$  为适当维数的矩阵,则利用拉氏变换不难得出式(1)的解

$$x(t) = E_{\alpha,1}(At)^\alpha x(0) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha) Bu(\tau) d\tau, \quad (4)$$

其中  $E_{\alpha,\beta}(z)$  为双变量 Mittag-Leffler 函数<sup>[3]</sup>.

### 2.2 传递函数描述

同传统整数阶情形一样,可将分数阶状态方程转化为分数阶传递函数的形式

$$G(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D. \quad (5)$$

但只有当分数阶传递函数的微分阶次是同元次时,才可将其转化为分数阶状态方程.即当分数阶传递函数的所有微分阶次都含有一个共同的实数因子  $\alpha$  时,这种转换才有意义,而  $\alpha$  就是分数阶状态方程的阶次

## 3 分数阶系统的稳定性

**引理 1** 给定拉氏变换式  $H(s) = (s^\alpha - \lambda)^{-n}$ ,  $0 < \alpha < 1, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}, s$  为拉氏变量,则其拉氏逆变换  $h(t)$  为

$$h(t) = L^{-1}\left((s^\alpha - \lambda)^{-n}\right) = \sum_{k=1}^n Q(\alpha, tp_k) e^{tp_k} -$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{n-1} \frac{e^{-t\lambda} (-1)^k C_n^k \lambda^k x^{\alpha(n-k)} \sin[\alpha\pi(n-k)]}{[x^{2\alpha} - 2\lambda x^\alpha \cos(\alpha\pi) + \lambda^2]^n} dx. \quad (6)$$

其中:  $C_n^k$  为二项式系数,  $H(s)$  的极点  $p_k (k = 1, 2, \dots, n)$  定义为

$$p_k = |p_k| e^{j\theta_k}, \theta_k \in [-\pi, \pi] \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} |p_k| &= |\lambda|^{1/\alpha}, \\ \theta_k &= \frac{\arg(\lambda)}{\alpha} + \frac{2k\pi}{\alpha}, \\ -\frac{\alpha}{2} - \frac{\arg(\lambda)}{2\pi} < k < \frac{\alpha}{2} - \frac{\arg(\lambda)}{2\pi}. \end{aligned}$$

多项式函数  $Q(\alpha, tp_k)$  由函数  $F(s) = (s^\alpha - \lambda)^{-n} e^{st}$  在极点  $p_k$  处的留数确定

**证明** 考虑如下封闭曲线的积分

$$\int_{\Gamma_s} (s^\alpha - \lambda)^{-n} e^{st} ds, \quad (8)$$

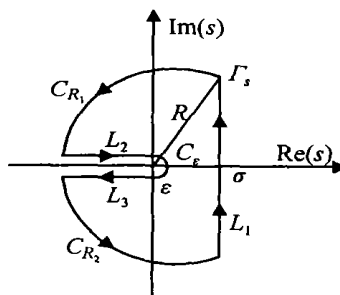


图 1 闭曲线  $\Gamma_s$

其中有向闭曲线  $\Gamma_s$  如图 1 所示.图中  $\sigma = \text{Re}(s)$ ,  $L_1$ ;  $\Gamma_s$  由有向线段和圆弧  $L_1, C_{R_1}, L_2, C_\epsilon, L_3, C_{R_2}$  组成.则式(8)可改写为

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} F(s) ds &= \int_{L_1} F(s) ds + \int_{C_{R_1}} F(s) ds + \int_{L_2} F(s) ds + \\ &+ \int_{C_\epsilon} F(s) ds + \int_{L_3} F(s) ds + \int_{C_{R_2}} F(s) ds \quad (9) \end{aligned}$$

利用曲线积分不难证明

$$\begin{cases} \left| \int_{C_\epsilon} F(s) ds \right| \rightarrow 0 (\epsilon \rightarrow 0), \\ \left| \int_{C_{R_1}} F(s) ds \right| \rightarrow 0, \left| \int_{C_{R_2}} F(s) ds \right| \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty); \end{cases} \quad (10)$$

$$\int_{L_2} F(s) ds + \int_{L_3} F(s) ds =$$

$$2j \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} (-1)^{k+1} C_n^k \lambda^k x^{\alpha(n-k)} \sin[\alpha\pi(n-k)]}{[x^{2\alpha} - 2\lambda x^\alpha \cos(\alpha\pi) + \lambda^2]^n} dx \quad (11)$$

由留数定理知

$$\int_{\Gamma_s} F(s) ds = 2\pi j \sum_{k=1}^q \text{Res}[(s^\alpha - \lambda)^{-n} e^{st}, p_k] \quad (12)$$

由拉氏逆变换的定义知

$$L^{-1}((s^\alpha - \lambda)^{-n}) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma - jR}^{\sigma + jR} (s^\alpha - \lambda)^{-n} e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_1} F(s) ds \quad (13)$$

当  $\epsilon > 0, R \rightarrow \infty$  时, 将式(10) ~ (13) 代入(9), 不难验证式(6) 成立. 若  $h(t) \in L^1(R, R)$  成立, 则只需  $\text{Re}(p_k) < 0, k = 1, 2, \dots, q$ , 即  $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$

**引理 2** 给定拉氏变换式  $Z(s) = s^{\alpha-1}(s^\alpha - \lambda)^{-n}, 0 < \alpha < 1, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}, s$  为拉氏变量, 则其拉氏逆变换  $z(t)$  为

$$z(t) = L^{-1}(s^{\alpha-1}(s^\alpha - \lambda)^{-n}) = \sum_{k=1}^q V(\alpha, tp_k) e^{tp_k} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} (-1)^k C_n^k \lambda^k x^{\alpha(n-k+1)-1} \sin[\pi\alpha(n-k-1)]}{[x^{2\alpha} - 2\lambda x^\alpha \cos(\alpha\pi) + \lambda^2]^n} dx \quad (14)$$

其中:  $Z(s)$  的极点  $p_k (k = 1, 2, \dots, q)$  的定义同式(7), 多项式函数  $V(\alpha, tp_k)$  由函数  $D(s) = s^{\alpha-1}(s^\alpha - \lambda)^{-n} e^{st}$  在极点  $p_k$  处的留数确定

证明类似于引理 1 的证明, 故略

### 3.1 外部稳定性

**定理 1** 在零初始条件下, 系统(1) 为有界输入-有界输出(BBO)稳定的, 其充分必要条件是: 当其传递函数阵  $G(w) (w = s^\alpha)$  是  $w$  的真的有理分式函数阵时,  $G(w)$  的每一个元传递函数  $g_{ij}(w)$  的所有极点  $\lambda$  满足

$$|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2, \forall i \quad (15)$$

证明 当  $g_{ij}(w)$  为真的有理分式时, 可利用部分分式法将其展开为有限项之和, 其中每一项的形式为

$$\beta_i (s^\alpha - \lambda)^{-n_i}, \forall i \quad (16)$$

其中:  $\lambda$  为  $g_{ij}(w)$  的极点,  $\beta_i$  和  $n_i$  可为零或非零常数. 考虑到式(16) 所对应的拉氏逆变换为<sup>[3]</sup>

$$\beta_i t^{\alpha n_i - 1} E_{\alpha, \alpha}^{(n_i)}(\lambda t^\alpha), \forall i, \quad (17)$$

其中  $E_{\alpha, \alpha}^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha, \alpha}(x)$ , 若  $n_i = 0$  则为  $\delta$  函数. 由

此可知, 由  $g_{ij}(w)$  取拉氏逆变换导出的  $g_{i,j}(t)$  是有限个  $\beta_i t^{\alpha n_i - 1} E_{\alpha, \alpha}^{(n_i)}(\lambda t^\alpha)$  之和, 和式中可能含有  $\delta$  函数项. 由引理 1 知, 当且仅当式(15) 满足时,  $\beta_i t^{\alpha n_i - 1} E_{\alpha, \alpha}^{(n_i)}(\lambda t^\alpha)$  为绝对可积, 即  $g_{i,j}(t)$  为绝对可积. 从而系统为 BBO 稳定的<sup>[9]</sup>.

### 3.2 内部稳定性

**定理 2** 系统(1) 是渐近稳定的, 其充要条件是矩阵  $A$  的所有特征值  $\lambda (\det(\lambda I - A) = 0)$  满足  $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2, \forall i$  (18)

证明 系统(1) 的零输入响应  $\Phi(t; 0, x_0, 0)$  的拉氏变换为

$$\Phi(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1} x(0) \quad (19)$$

设矩阵  $A_{n \times n}$  有相异的  $m$  个特征根  $\lambda_i (\sigma_i \text{重}), \lambda_i (\sigma_i \text{重}), \dots, \lambda_m (\sigma_m \text{重}), \sum_{k=1}^m \sigma_k = n$ . 存在非奇异阵  $P$ , 使得

$$J = P^{-1}AP, J \text{ 为约当阵. 则式(19) 可改写为} \quad \Phi(s) = PE(s)P^{-1}x(0), \quad (20)$$

其中

$$E(s) = (s^\alpha I - J)^{-1} s^{\alpha-1} \quad (21)$$

易知上三角阵  $E(s)$  的非零元素包含因式

$$s^{\alpha-1} (s^\alpha - \lambda_i)^{-n_i}, i = 1, \dots, m, n_i = 1, \dots, \sigma_i \quad (22)$$

上式的拉氏逆变换为<sup>[3]</sup>

$$e_{i, n_i}(t) = t^{\alpha(n_i-1)} E_{\alpha, \alpha}^{(n_i)}(\lambda_i t^\alpha), \quad i = 1, \dots, m, n_i = 1, \dots, \sigma_i \quad (23)$$

由引理 2 知, 当且仅当式(20) 成立时,  $e_{i, n_i}(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty), i = 1, \dots, m, n_i = 1, \dots, \sigma_i$ , 即原系统是渐近稳定的, 或是内部稳定的<sup>[9]</sup>.

**推论 1** 设线性定常系统(1) 是内部稳定的, 则其必是 BBO 稳定的

证明 由系统(1) 的运动分析可知, 其脉冲响应矩阵  $G(t)$  为

$$G(t) = t^{\alpha-1} CE_{\alpha, \alpha}(A t^\alpha)B + D \delta(t) \quad (24)$$

当系统渐近稳定时, 由双变量 Mittag-Leffler 函数的性质有<sup>[3]</sup>

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A t^\alpha) = 0 \quad (25)$$

于是, 利用上面两式即可导出  $G(t)$  的每一个元  $g_{i,j}(t)$  均满足关系式

$$\int_0^{\infty} |g_{i,j}(t)| dt < \infty, \forall i, j, \quad (26)$$

其中  $k$  为有限常数. 这表明系统是 BIBO 稳定的<sup>[9]</sup>.

**推论 2** 设线性定常系统(1) 是 BBO 稳定的, 则不能保证系统必是渐近稳定的

证明 由系统结构的规范分解定理知, 通过引入线性非奇异变换, 可将系统分解为能控能观测、能控不能观测、不能控能观测和不能控不能观测 4 部分, 而输入输出特性只能反映系统的能控能观测部分. 因此, 系统的 BIBO 稳定只是意味着其能控能观测部分为渐近稳定的, 它既不表明也不要求系统的其他部分是渐近稳定的

推论 3 设线性定常系统 (1) 是能控能观测的, 则其内部稳定性与外部稳定性是等价的

证明 利用推论 1, 可知由内部稳定性可导出外部稳定性. 根据推论 2 的证明, 可知此时外部稳定意味着内部稳定

#### 4 实例验证

给定某粘弹性系统如下:

$$mD^2x(t) + cD^\alpha x(t) + kx(t) = u(t),$$

$$x(0) = a_1, \dot{x}(0) = a_2$$

其中:  $m, c, k$  分别表示质量、阻尼系数和弹性系数;  $u(t)$  表示施加外力;  $D^\alpha x(t)$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 表示位移函数  $x(t)$  的  $\alpha$  阶导数. 取  $m = 1, c = 1.5, k = 1, \alpha = 0.5, a_1 = 0, a_2 = 1, u(t) = 1$  (单位阶跃输入), 则其状态空间描述为

$$D^{0.5}x(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx.$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1.5 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = 0.7479 \pm 1.0299i,$$

$$\lambda_{3,4} = -0.7479 \pm 0.2407i$$

显然定理 2 满足, 故原系统是稳定的

#### 5 结论

本文讨论了分数阶线性定常系统的外部 and 内部稳定性条件及其相互关系, 并通过一个粘弹性系统的实例验证了其正确性. 实际上, 分数阶线性定常系统是传统整数阶线性定常系统的推广, 即当系统的微分阶次  $\alpha = 1$  时, 本文所有关于分数阶系统的结论都与传统整数阶系统是一致的

#### 参考文献 (References):

- [1] Miller K S, Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1993
- [2] Oldham K B, Spanier J. *The Fractional Calculus* [M]. New York: Academic, 1974
- [3] Podlubny I. *Fractional Differential Equations* [M]. San Diego: Academic Press, 1999
- [4] Carpinteri A, Mainardi F. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* [M]. Wien: Springer, 1997
- [5] Oustaloup A, Sabatier J, Lanusse P. From fractal robustness to CRONE control [J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 1999, 2(1): 1-30
- [6] Podlubny I. Fractional-order systems and controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208-214
- [7] Ikeda F, Kawata S. An optimal design of fractional differential active mass dampers for structures equipped with viscoelastic dampers [A]. *5th Int Conf on Motion and Vibration Control* [C]. Movic, 2000: 223-228
- [8] Tenreiro Machado J A. Analysis and design of fractional-order digital control systems [J]. *J of Systems Analysis, Modelling and Simulation*, 1997, 27(1): 107-122
- [9] 郑大钟. *线性系统理论* [M]. 北京: 清华大学出版社, 1990: 121-124

(上接第 1170 页)

- [6] Fridrich J. Symmetric ciphers based on two-dimensional chaotic maps [J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1998, 8(6): 1259-1284
- [7] Cheng H, Li X. Partial encryption of compressed images and video [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2000, 48(8): 2439-2451

- [8] 冯登国, 吴文玲. *分组密码的设计与分析* [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000
- [9] Schneier B. 吴世忠, 祝世雄, 张文政, 等译. *应用密码学: 协议、算法与 C 源程序* [M]. 北京: 机械工业出版社, 2000