

文章编号: 1001-0920(2004)10-1183-04

## 二级倒立摆摆起控制的研究

么健石, 侯祥林, 徐心和

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

**摘要:** 通过对二级倒立摆系统的理论分析, 研究二级摆从自然悬垂位置摆到倒立点位置的摆起控制问题, 提出了基于动态设计变量优化算法的复杂非线性系统控制策略。仿真实验证明, 该策略可成功地实现圆轨和直轨两种二级倒立摆的摆起控制, 并且算法具有较快的收敛速度和较高的计算精度。

**关键词:** 二级倒立摆; 摆起控制; 动态设计变量优化

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Study on swing-up control of double inverted pendulum

YAO Jian-shi, HOU Xiang-lin, XU Xin-he

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China

Correspondent: Yao Jian-shi, Email: yaojianshi@163.com)

**Abstract:** Through the analysis of the relevant theories on double inverted pendulum and the study on swing-up control of a double pendulum from hanging to the upright position, a sophisticated nonlinear system control strategy based on dynamic design variable optimization is presented. Simulation experiments show that the strategy successfully realizes the swing-up control over both rotational and car-pole double inverted pendulums with higher convergence speed and computation accuracy.

**Key words:** double inverted pendulum; swing-up control; dynamic design variable optimization

### 1 引言

二级倒立摆是一个复杂非线性、强耦合、多变量的自然不稳定系统, 它也是双足行走机器人、火箭飞行姿态控制等许多控制对象的最简单模型。对倒立摆机构的控制常常用来检验控制理论的有效性。关于二级倒立摆的研究主要涉及两个问题: 一是摆杆在倒立点位置的稳定和镇定控制; 二是摆杆从自然悬垂位置摆到倒立点位置的摆起控制<sup>[1]</sup>。针对二级倒立摆系统的稳定和镇定问题已提出了多种控制方案。应用传统控制理论中的状态反馈<sup>[2,3]</sup>和动态观测器理论<sup>[4]</sup>, 分别实现了二级倒立摆的平衡控制。在智能控制领域, 应用模糊控制<sup>[5]</sup>、神经网络控制<sup>[6]</sup>、拟人控制<sup>[7]</sup>, 都成功地实现了二级倒立摆的平衡稳定。

本文主要研究二级倒立摆的上、下摆杆从自然悬垂位置转换到倒立点位置的摆起控制问题, 提出一种新的开环优化控制策略。即通过在规定的时间内向系统施加一前馈控制序列, 使上、下摆杆摆到倒立点位置且速度为零。寻找一组最优控制序列便成为摆起控制的关键, 即将摆起控制问题转化为最优化问题。为获得最优摆起控制序列, 提出一种新的优化算法——动态设计变量优化算法, 基于该算法计算最优摆起控制序列。

### 2 系统描述和建模

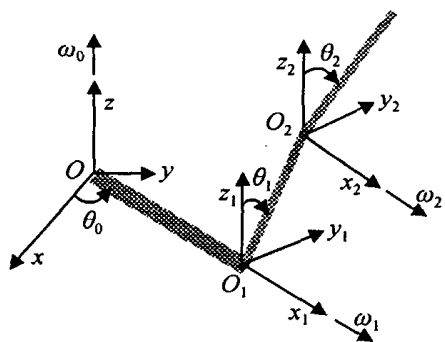
#### 2.1 二级倒立摆物理特性

为实现双摆的摆起控制, 研究圆形轨道和直线轨道两种二级倒立摆系统, 其坐标体系构建分别如

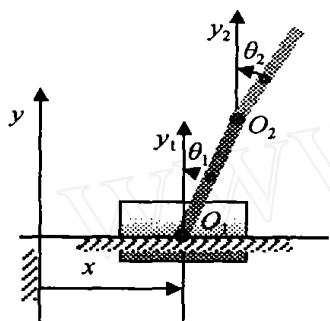
收稿日期: 2003-09-15; 修回日期: 2004-02-16

基金项目: 国家 863 计划基金资助项目 (2001AA 422270)。

作者简介: 么健石(1972—), 男, 辽宁沈阳人, 博士生, 从事最优控制、非线性控制等研究; 徐心和(1940—), 男, 河北山海关人, 教授, 博士生导师, 从事足球机器人、人工智能等研究。



(a) 圆轨倒立摆



(b) 直轨倒立摆

图1 二级倒立摆力学模型

图1(a)和(b)所示 这种双摆系统具有以下特性:

1) 系统由两个摆杆(上摆、下摆)和一个水平转动的转杆(或直线运动的小车)组成 两个摆杆绕转轴在垂直面上转动,具有两个自由度  $\theta_1$  和  $\theta_2$ ; 转杆(或小车)在水平面上转动(或直线运动),具有一个自由度  $\theta_0$ (或  $x$ ). 可见,二级倒立摆是一个三自由度的物理系统

2) 系统的上、下摆杆不受扭矩或力的控制,只能依赖惯性作旋转运动; 水平转杆(或小车)在扭矩(或力)的控制下产生主动运动 因此,二级倒立摆是一个典型的欠激励系统,即受激励的自由度数少于系统总的自由度数目

3) 从图1可以看出,圆轨倒立摆由于水平转杆的转动,使系统在三维空间中运动; 而直轨倒立摆则只在二维空间内运动 因此前者的动力学模型较后者要复杂一些

### 2.2 系统建模

在图1所示的坐标系下,通过坐标齐次变换,根据拉格朗日法<sup>[8]</sup>建立二级倒立摆的动力学方程

$$M \ddot{\Theta} + C \dot{\Theta} + G = F. \quad (1)$$

其中:圆轨倒立摆数学模型为

$$M = \begin{bmatrix} J_0 + m_1(L_0^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1) + m_2(L_0^2 + (L_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)^2) & (m_1 l_1 + m_2 L_1) L_0 \cos \theta_1 & m_2 L_0 l_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) L_0 \cos \theta_1 & J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 L_0 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2m_2 L_1 l_2 (\sin \theta_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + c_0 & - (m_2 L_0 l_1 + m_2 L_0 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2) \sin 2\theta_1 \dot{\theta}_1 & - m_2 L_0 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 \sin 2\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ - (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 - m_2 L_1 l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 & c_1 + c_2 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - c_2 \\ - (m_2 L_1 \sin \theta_1 + m_2 l_2 \sin \theta_2) l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 & - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - c_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1 \\ - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

直轨倒立摆数学模型为

$$M = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 & J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos \theta_2 & m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 0 & c_1 + c_2 & m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - c_2 \\ 0 & - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 - c_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta \\ - m_2 g l_2 \sin \theta \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}.$$

模型物理参数如表 1 所示

建立最优化问题

表 1 模型物理参数

$$\min (F(u)). \tag{2}$$

物理量及单位	圆轨倒立摆	直轨倒立摆
水平转杆转动惯量 $J_0 / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.029 83	
下摆杆相对质心的转动惯量 $J_1 / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.002 07	0.004 96
上摆杆相对质心的转动惯量 $J_2 / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.000 36	0.004 96
小车质量 $m_0 / \text{kg}$		1.328
下摆杆质量 $m_1 / \text{kg}$	0.313	0.220
上摆杆质量 $m_2 / \text{kg}$	0.095	0.220
水平杆长度 $L_0 / \text{m}$	0.165	
下摆杆长度 $L_1 / \text{m}$	0.20	0.317
下摆杆质心到转轴的长度 $l_1 / \text{m}$	0.116 9	0.304
上摆杆质心到转轴的长度 $l_2 / \text{m}$	0.085	0.304
水平杆与转轴的摩擦系数 $c_0 / (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s})$	0.055 3	22.915
下摆杆与转轴的摩擦系数 $c_1 / (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s})$	0.005 4	0.007 1
上摆杆与转轴的摩擦系数 $c_2 / (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s})$	0.002 5	0.007 1

其中: 目标函数为控制指标  $F(u) = \sum_{i=1}^6 (x_i(t_f))^2$ ; 设

控制变量为每个时间段上的控制律  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T, u \in R^n$ . 则系统状态方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,i+1} = f_1(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{6,i}, u_i), \\ \dot{x}_{2,i+1} = f_2(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{6,i}, u_i), \\ \vdots \\ \dot{x}_{6,i+1} = f_6(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{6,i}, u_i). \end{cases} \tag{3}$$

### 3.2 目标函数的动态形成

给定系统参数和初始条件  $x_{i,1} (i = 1, 2, \dots, 6)$ , 设置控制时间  $t_f$ . 当给出控制量  $u_1, u_2, \dots, u_n$  时, 通过状态方程 (3), 采用龙格-库塔法进行一步计算, 由  $u_1$  和  $x_{i,1} (i = 1, 2, \dots, 6)$  计算  $x_{i,2} (i = 1, 2, \dots, 6)$ ; 由  $u_k$  和  $x_{i,k} (i = 1, 2, \dots, 6)$  计算  $x_{i,k+1} (i = 1, 2, \dots, 6)$ , 它是部分设计变量  $u_1, u_2, \dots, u_k$  函数; 由  $u_n$  和  $x_{i,n} (i = 1, 2, \dots, 6)$  计算  $x_{i,n+1} (i = 1, 2, \dots, 6)$ , 它是  $u_1, u_2, \dots, u_n$  函数. 由此形成目标函数  $F(u) = \sum_{i=1}^6 (x_{i,n+1}(u))^2$ .

## 3 摆起控制策略

二级倒立摆是一个三自由度、6 个状态变量的复杂非线性系统. 为能实时、快速地将上、下摆杆从自然悬垂位置摆到倒立点位置, 且双摆的速度接近于零, 本文通过前馈控制向系统施加一控制序列, 以满足双摆摆起的性能要求. 确定一组最优的控制序列便成为摆起控制的关键问题, 为此提出一种新的数值优化算法——动态设计变量优化算法<sup>[9]</sup>.

动态设计变量优化算法的核心思想是: 将所研究系统中未知量的计算问题转化为最优化中设计变量的计算问题. 其中目标函数具有框架式程序结构, 每个设计变量的含义在程序运行中根据输入条件动态排序获得, 目标函数值在动态累积中形成. 该算法按以下 3 个步骤进行.

### 3.1 确定设计变量, 建立系统状态方程

设在给定时间  $t_f$  内, 系统上、下摆杆从悬垂位置摆到倒立点位置. 可将时间  $[t_0, t_f]$  分成  $n$  段, 每段时间间隔为  $\Delta t = (t_f - t_0)/n$ . 对应的控制量为  $u_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 状态变量为  $x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{6,i} (i = 1, 2, \dots, n + 1)$ .

### 3.3 梯度函数的形成, 动态设计变量的优化

目标函数  $F(u)$  是  $u_1, u_2, \dots, u_n$  复杂显函数, 具有繁琐嵌套关系, 利用梯度优化法需计算梯度值

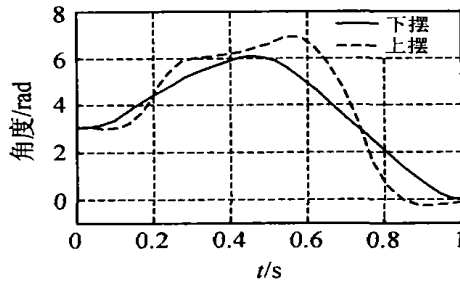
$$\text{Grad}[F(u)] = \left[ \frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n} \right]^T. \tag{4}$$

采用差商代替偏导数  $\frac{\partial F}{\partial u_j} = \frac{F(u) - F(u)}{du}, j = 1, 2, \dots, n$ . 其中:  $u = [u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n]^T, u_j = [u_1, u_2, \dots, u_j + du, \dots, u_n]^T$ . 这样便可采用变尺度优化方法, 针对含有动态设计变量的目标函数进行寻优计算, 最终得到一组最优的控制序列  $u = [u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n]^T$ .

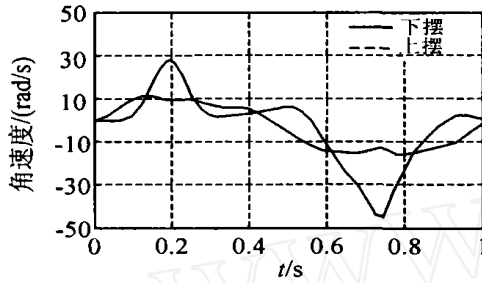
## 4 仿真实验

### 4.1 采用式 (1) 中圆轨倒立摆模型进行仿真

给定优化计算的初始参数, 设定摆起时间为 1 s, 控制序列的时间间隔为 20 ms, 确定由 50 个控制量组成开环前馈控制序列. 程序仿真计算表明, 经过 36 次迭代优化计算, 目标函数值收敛到 0.009 942, 计算出摆杆状态变量随时间的变化如图 2 所示.



(a) 角度随时间的变化

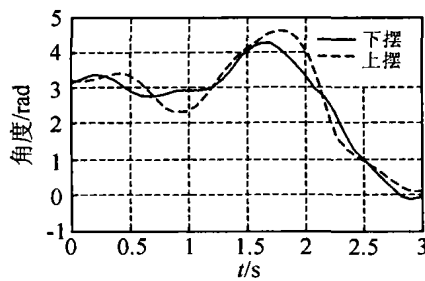


(b) 角速度随时间的变化

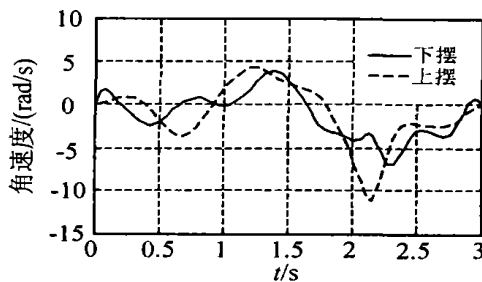
图2 上、下摆杆状态变量随时间的变化

#### 4.2 采用式(1)中直轨倒立摆模型进行仿真

给定优化计算的初始参数, 设定摆起时间为3 s, 控制序列的时间间隔为30 ms, 确定由100个控制量组成开环前馈控制序列。程序仿真计算表明, 经过209次迭代优化计算, 目标函数值收敛到0.009236, 由此计算出摆杆状态变量随时间的变化, 如图3所示。通过对二级倒立摆系统的仿真实验



(a) 角度随时间的变化



(b) 角速度随时间的变化

图3 上、下摆杆状态变量随时间的变化

可以看出, 基于动态设计变量优化算法的摆起控制策略是有效的。在迭代计算过程中, 该算法具有较快的收敛速度和较高的计算精度。

## 5 结论

本文在对具有多变量特性的二级倒立摆摆起控制问题研究中, 发现系统变量数目越多, 传统的数值算法和优化算法越难以获得理想的控制律。为此提出了动态设计变量优化算法, 并将该算法引入倒立摆摆起过程控制律的计算。分别对圆轨和直轨二级倒立摆进行仿真实验, 获得了理想的多变量过程控制律, 实现了二级摆的摆起控制。该算法也为其他复杂非线性、多变量系统的控制提供了有效方法。

### 参考文献(References):

- [1] Takahashi T, Inooka H. Swing-up control of a pendulum [A]. *The Int Conf on Advanced Mechatronics* [C]. Tokyo, 1989. 5: 21-24.
- [2] Furuta K, Hiroyuki K, Kosuge K. Digital control of double inverted pendulum on an inclined rail [J]. *Int J Control*, 1980, 32(5): 907-924.
- [3] Sahba M. Computer-aided design of feedback controllers for nonlinear system with applications to control of a double-inverted pendulum [J]. *IEE Proc D*, 1983, 130(6): 350-358.
- [4] Mori S, Nishihara H, Furuta K. Control of unstable mechanical system control of pendulum [J]. *Int J Control*, 1976, 23(5): 673-692.
- [5] 程福雁, 钟国民, 李友善. 二级倒立摆的参变量模糊控制 [J]. *信息与控制*, 1995, 24(3): 189-192. (Cheng Fuyan, Zhong Guomin, Li Youshan. A parameter fuzzy controller for a double inverted pendulum [J]. *Information and Control*, 1995, 24(3): 189-192.)
- [6] Anderson C W. Learning to control an inverted pendulum using neural networks [J]. *IEEE Control System Magazine*, 1989, 9(3): 31-37.
- [7] 张明廉, 孙昌龄, 杨亚伟. 拟人控制二维单倒立摆 [J]. *控制与决策*, 2002, 17(1): 53-56. (Zhang Minglian, Sun Changling, Yang Yawei. Human-inhibiting control for 2-D inverted pendulum [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(1): 53-56.)
- [8] 白井良明. 王棣棠译. 机器人工程 [M]. 北京: 科学出版社, 2000. 13-29.
- [9] 侯祥林, 顾立忠, 徐心和. 圆轨单级倒立摆的摆起过程控制 [J]. *控制与决策*, 2003, 18(4): 483-486. (Hou Xianglin, Gu Lizhong, Xu Xinde. Swing up control of a circular rail single inverted pendulum [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4): 483-486.)