

文章编号: 1001-0920(2004)10-1190-04

## 基于小波逼近和尺度变换的非参数辨识方法

郑军, 颜文俊, 诸静

(浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 提出一种以非正交小波为基函数并应用小波多尺度分析的系统脉冲响应辨识方法, 该方法以小波级数的形式逼近脉冲响应过程。从理论上证明了经小波尺度变换后系统随机噪声的方差值减小, 即噪声得到有效的抑制, 从而大大提高了辨识精度。应用实例验证了所得结果的正确性和算法的实用性。

**关键词:** 小波级数; 尺度变换; 函数逼近; 系统辨识

**中图分类号:** TP273.5      **文献标识码:** A

## Nonparametric identification approach based on wavelet approximation and scale transformation

ZHENG Jun, YAN Wen-jun, ZHU Jing

(College of Electric Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China Correspondent: ZHENG Jun, E-mail: dbzj@netease.com)

**Abstract:** A pulse response identification approach based on orthonormal scaling transformation and non-orthonormal wavelet as basis functions is proposed. Wavelet function expansion is applied to express the pulse response function. The random noises of systems are shown to be restrained effectively through orthonormal scaling transformation, and estimation precision is improved. An application example shows a satisfactory identification result and feasibility of the method.

**Key words:** wavelet series; scale transformation; function approximation; system identification

### 1 引言

面对一些强非线性的复杂控制对象(如冶金、化工等工业过程), 要建立起精确的参数模型是不现实的, 而辨识出系统的阶跃响应、脉冲响应等非参数模型则更为实际。文献[1]指出: 相关分析法是获取系统脉冲响应曲线的一种常用方法, 但它对信号的长度和平稳性有较高的要求, 不利于快速跟踪系统动态特性的变化。文献[2]提出将系统脉冲响应  $g(t)$  的辨识转化为  $g(t)$  在一组正交函数基上投影系数的辨识。本文以此为基础, 考虑将小波函数作为基函数去逼近  $g(t)$ 。

近年来, 基于小波分析理论的各种应用研究迅速发展。传统的函数正交基无法兼顾时频分辨率, 而紧支撑的小波函数则具有时频联合局部性和多尺度分析能力<sup>[3,4]</sup>, 它在非线性函数逼近方面所表现出的最佳逼近和全局逼近能力日益受到人们的重视。事实上, 文献[5]已证明对于函数  $f(x) \in L^2(R)$ , 存在有限个小波基函数, 对  $f$  可实现任意精度的逼近。有人提出用正交小波函数和正交尺度函数逼近系统脉冲响应过程, 但由于正交基构造复杂, 除个别小波(如 Harr 小波)外, 其余大多无法用解析形式表达, 算法难以实际应用。

收稿日期: 2003-12-31; 修回日期: 2004-03-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60374028)。

作者简介: 郑军(1976—), 男, 浙江常山人, 博士生, 从事小波分析、系统建模等研究; 诸静(1938—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统控制、机器人控制等研究。

本文提出用可显式表达的非正交小波(如墨西哥草帽小波)为逼近基构建系统的脉冲响应过程,并使用最小二乘辨识法增强算法的实用性.同时从小波多分辨率分析理论出发,证明了经正交尺度变换后,系统随机噪声的方差值将减小,并给出了相应的定理.对辨识数据进行有效尺度变换后,噪声的影响将得到明显的抑制,从而提高了辨识精度.实验结果表明,同相关分析法相比,本文方法的辨识精度有了很大的改进.

## 2 尺度函数与小波

**定义 1** 定义  $L^2(R)$  的闭子空间  $V_j$  满足如下条件:

- 1)  $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$ ;
- 2)  $\text{cl}_{L^2} \{ \phi_{j,z} \} = L^2(R)$ ;
- 3)  $\phi_{j,z} = \{0\}$ ;
- 4)  $V_{j+1} = V_j + W_j, j \in Z$ ;
- 5)  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, j \in Z$ .

**定义 2** 如果用  $V_j = \text{cl}_{L^2(R)} \{ \phi_{j,k} : k \in Z \}$  ( $j \in Z$ ) 定义的  $L^2(R)$  子空间  $V_j$  满足定义 1 的各种性质,并且  $\{ \phi_{j,k} : k \in Z \}$  是  $V_j$  的一个 Riesz 基,则函数  $\phi_{j,k} \in L^2(R)$  称为一个尺度函数,其中尺度函数  $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$  ( $j, k \in Z$ ) 生成一个  $L^2(R)$  的多分辨率分析  $\{V_j\}$ . 更进一步,如果  $\phi$  满足  $\phi_{j,k} = \delta_{k,l}$ , 则  $\phi$  是一正交归一尺度函数. 其中

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l; \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

**定义 3** 如果在子空间  $W_j$  中找到一带通函数  $\psi_j(t)$ , 满足:

- 1)  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(t) dt = 0$ ;
- 2) 容许条件为  $\int_0^{\infty} |\hat{\psi}_j(\omega)| |\omega| d\omega < \infty$ ;
- 3) 其整数位移集合  $\{ \psi_{j,k}(t - k) : k \in Z \}$  构成  $W_j$  的正交归一基.

则  $\psi_j(t)$  称为正交小波函数.

由文献[6]知,尺度函数和小波满足如下二尺度关系:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_{0k} \phi(2t - k), \quad (1)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_{1k} \phi(2t - k). \quad (2)$$

其中分解滤波器系数  $h_{0k}$  和  $h_{1k}$  与  $j$  无关,对于任意相邻尺度其值都相同.

对于任一离散时间序列  $\{x(k), k = 1, 2, \dots\}$ , 其

正交尺度变换  $ST_x(n)$  过程如下(小波变换过程类似):

- 1)  $x(n) = \sum_k h_{0k} x(2n - k)$ ;
- 2) 对  $x(n)$  进行偶数位置补零插值, 可得

$$x(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n+1}{2}\right), & n = 1, 3, \dots; \\ 0, & n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

3) 利用重构滤波器  $g_{0k}$  对插值后的数据进行卷积计算, 可得

$$ST_x(n) = \sum_k g_{0k} x(n - k).$$

基于以上预备知识,可证明以下两个定理:

**定理 1**  $\sum_k h_{0k}^2 = \sum_k h_{1k}^2 = 1$ .

**证明** 由式(1)易知

$$\phi(t) = \sum_k h_{0k} \phi(2t - k) + \sum_l h_{0l} \phi(2t - l). \quad (3)$$

对式(3)两边积分, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \sum_k h_{0k} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k) dt + \sum_l h_{0l} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - l) dt = \sum_k h_{0k} h_{0l} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k) \phi(2t - l) dt$$

考虑到  $\phi$  的正交归一性, 可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k) \phi(2t - l) dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1, k = l$$

因此  $\sum_k h_{0k}^2 = 1$ . 同理可证  $\sum_k h_{1k}^2 = 1$ .

重构滤波器满足

$$\sum_k g_{0k}^2 = \sum_k g_{1k}^2 = 1.$$

**定理 2** 设有一零均值、方差为  $R$  的白噪声序列  $\{v(k), k = 1, 2, \dots\}$ , 经正交尺度变换后, 其方差值  $R\{ST_v\} < R$ .

**证明** 依照上述正交尺度变换过程, 可得

$$ST_v(k) = \sum_n g_{0n} \sum_l h_{0l} v(k - n + 1 - l).$$

其中  $n$  值的选取需满足  $k - n$  为奇数的条件(因偶数位置补零), 即重构滤波器系数只有一半可用. 则变换后序列的均值为

$$E\{ST_v\} =$$

$$\sum_n g_{0n} \sum_l h_{0l} E\{v(k - n + 1 - l)\} = 0,$$

方差为

$$R\{ST_v\} =$$

$$E\left\{\left(\sum_n g_{0n} h_{0lv}(k-n+1-l)\right)^2\right\} =$$

$$E\left\{\sum_n g_{0n}^2 h_{0lv}^2(k-n+1-l)^2\right\} =$$

$$\sum_n g_{0n}^2 h_{0lv}^2 E\{v(k-n+1-l)^2\} =$$

$$\sum_n g_{0n}^2 h_{0lv}^2 R.$$

由定理 1 知  $h_{0lv}^2 = 1$ , 由重构滤波器系数只有一半知  $\sum_n g_{0n}^2 < 1$ , 因此  $R\{ST_v\} < R$ .

定理 2 表明, 经正交尺度变换后, 零均值高斯随机序列的方差减小, 即噪声序列得到有效的抑制. 这将大大增强输出信号的信噪比, 从而提高系统的辨识精度.

### 3 脉冲响应辨识

基于脉冲响应的系统权函数模型描述如下:

$$y(k) = \sum_n^k p(k-n)u(n) + v(k). \quad (4)$$

其中:  $u(n)$  为系统输入信号,  $p(k-n)$  为系统脉冲响应过程(权函数),  $v(k)$  为系统噪声. 鉴于紧支小波具有良好的时频局部特性, 可用小波函数为基函数去逼近  $p(k)$ . 考虑到一般的正交小波很难显式表达, 为便于算法实现, 本文用非正交小波(如墨西哥草帽小波)作为基函数, 有

$$p(k-n) = \sum_{i=1}^I a_i \Psi_i(k-n). \quad (5)$$

其中:  $\Psi_i(k) = \Psi(k-i)$  为小波基函数,  $I$  为小波基个数,  $a_i$  为待估计参数. 将式(5)代入式(4), 得

$$y(k) = \sum_n^k \sum_{i=1}^I a_i \Psi_i(k-n)u(n) + v(k) =$$

$$\sum_{i=1}^I \sum_n^k a_i u(n) \Psi_i(k-n) + v(k) =$$

$$\sum_{i=1}^I a_i N_i(k) + v(k), \quad (6)$$

式中

$$N_i(k) = \sum_n^k u(n) \Psi_i(k-n). \quad (7)$$

对式(6)两边进行正交尺度变换, 得

$$ST_y(k) = \sum_{i=1}^I a_i ST_{N_i}(k) + ST_v(k). \quad (8)$$

然后采用最小二乘法, 估计出小波基系数  $a_i$ . 代入式(5), 便可得到系统脉冲响应曲线.

基于小波逼近和尺度变换的系统脉冲响应辨识算法总结如下:

1) 选定用于非线性函数逼近的非正交小波和小波基个数  $I$ , 用于尺度变换的正交小波函数, 系统采样周期  $T$  以及辨识数据长度  $K$  等参数;

2) 根据输入序列  $\{u(k), k = 1, 2, \dots, K\}$ , 得到系统输出  $\{y(k), k = 1, 2, \dots, K\}$ ;

3) 根据式(7)计算  $N_i(k), k = 1, 2, \dots, K$ ;

4) 对  $y(k)$  和  $N_i(k)$  进行正交尺度变换, 得到变换后数据序列  $ST_y(k)$  和  $ST_{N_i}(k)$ ;

5) 对变换后数据采用最小二乘参数估计法估计出参数  $a_i$ ;

6) 将参数  $a_i$  代入式(5), 得到系统脉冲响应函数.

### 4 应用实例

以全数字直流调速系统为实验对象. 已知直流电机转速与电枢电压间的传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{T_m T_1 s^2 + T_m s + 1}$$

其中: 电机系数  $K = 7.576$ , 机电时间常数  $T_m = 0.2$  s, 电磁时间常数  $T_1 = 0.03$  s, 系统动态过程为 1 s. 该系统经离散化(加零阶保持环节, 采样周期  $T = 0.01$  s)传递函数为

$$G(z) = \frac{0.056z^{-1} - 0.006z^{-2} - 0.051z^{-3}}{1 - 2.703z^{-1} + 2.419z^{-2} - 0.717z^{-3}}$$

系统离散脉冲响应过程(权序列)如图 1 所示.

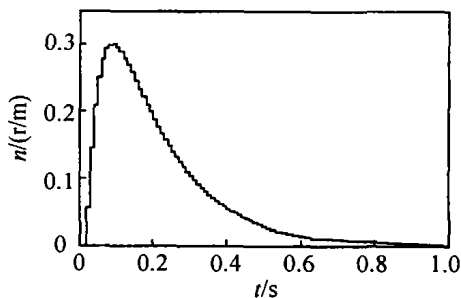


图 1 系统脉冲响应序列

首先用常规的相关分析法进行估计. 输入数据是 300 个伪随机二进序列(PRBS), 干扰  $v$  为白噪声序列(标准差  $\sigma = 0.1$ ), 得到的估计曲线如图 2 中虚线所示. 经计算, 相关分析法所得结果平均误差  $\bar{e} = 0.0435$ , 估计误差较大, 结果不能令人满意.

然后以本文提出的算法进行估计. 以墨西哥草帽小波  $\Psi(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2}$  为逼近基, 基小波个数  $I = 100$ ; 以 db5 小波为正交尺度变换函数, 取实验数据长度  $K = 300$ ; 输入序列  $u$  为零均值随机序列, 同样取干扰  $v$  为白噪声序列(标准差  $\sigma = 0.1$ ). 所得估计曲线如图 2 中实线所示. 与相关分析法相比, 辨

识精度有了明显的改善

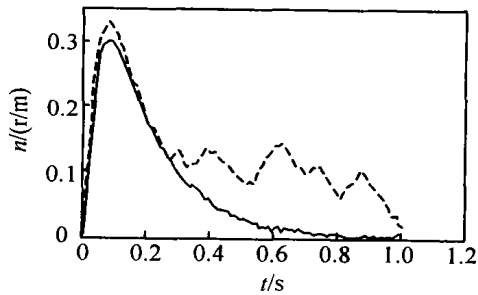


图 2 本文方法与相关分析法的对比

为反映尺度变换对提高估计精度的功效, 尺度变换前后的误差曲线如图 3 所示. 经计算, 尺度变换前平均估计误差  $\bar{e}_2 = 0.0059$ , 尺度变换后平均误差  $\bar{e}_3 = 0.0022$ . 由此可见, 尺度变换能有效地抑制干扰的影响, 提高输出信号的信噪比, 从而进一步降低估计误差, 更好地逼近系统真实的脉冲响应过程.

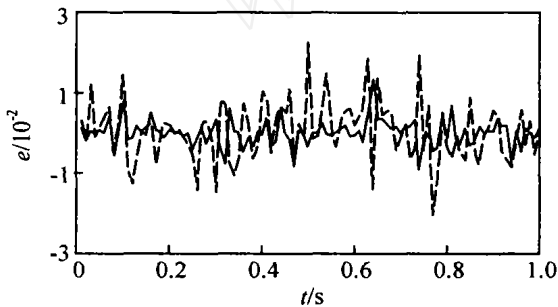


图 3 尺度变换前后辨识误差对比

实验结果验证了该算法的正确性和实用性

## 5 结 语

本文提出用紧支非正交小波作为基函数逼近系统脉冲响应过程, 并证明了经正交尺度变换后系统干扰将得到有效的抑制, 从而可提高系统的辨识精度. 理论分析和实验结果验证了算法的正确性和实用性. 小波基具有良好的时频联合局部性, 其辨识结果具有明确的频域物理意义, 并能有效地跟踪时变系统的参数变化. 该算法如能结合递推算法(如递推最小二乘法、随机梯度算法等), 便可应用于时变系统的过程估计. 因此, 该算法在一些复杂的非参数辨识领域(如工业生产过程)具有良好的应用前景.

## 参考文献 (References):

- [1] 冯培悌. 系统辨识[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1999. 43-53.
- [2] Eykhoff D. *System Identification-parameter and State Estimation* [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1974. 157-182.
- [3] Zhang Qinghua. Using wavelet network in nonparametric estimation [J]. *IEEE Trans on Neural Network*, 1997, 8(2): 227-236.
- [4] Zhang J, Walter G, Mial Y. Wavelet neural networks for function learning [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1995, 43(6): 1485-1497.
- [5] Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1990, 36(5): 961-1005.
- [6] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1995. 2-29.

(上接第 1189 页)

- [3] Yen J, Liao J C, Bogju L, et al. A hybrid approach to modeling metabolic systems using a genetic algorithm and simplex method [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1998, 28(2): 173-191.
- [4] Li Shouzhi, Li Minyan, Pan Yongxiang. Genetic annealing algorithms and its convergence analysis [J]. *Control Theory and Applications*, 2002, 19(3): 376-380.
- [5] Yiu-wing Leung, Yiping Wang. An orthogonal genetic algorithm with quantization for global numerical optimization [J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2001, 5(1): 41-53.
- [6] Coloni A, Dorigo M, Maniezzo V. Distributed optimization by ant colonies [A]. *Proc 1st European Conf on Artificial Life [C]*. Paris: Elsevier, 1991. 134-142.
- [7] Wang Lei, Wu Qidi. Further example study on ant system algorithm based continuous space optimization [A]. *Proc of the World Congress on Intelligent Control and Automation [C]*. Shanghai, 2002. 3: 2541-2545.
- [8] Michalewicz Z. *Genetic Algorithm + Data Structure = Evolution Programs* [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1994.