第19卷 第10期 控 制 与 决 策 2004年10月
Vol 19 No. 10 Control and Decision Oct 2004

文章编号: 1001-0920(2004)10-1194-03

一类非线性两层规划问题的递阶优化解法

郑丕谔, 赵玉超, 刘国宏, 李瑞波
(天津大学 系统工程研究所, 天津 300072)

摘 要: 提出一种求解一类非线性两层规划问题的新方法. 通过引入解耦向量将非线性两层规划问题分解为独立且易于求解的子问题, 利用两级递阶结构第1级求解若干优化的子问题, 而在第2级利用第1级求解的结果调整解耦向量. 所提出的方法借助于分解-协调原理并按迭代方式最终求得问题的最优解. 对于含整数的规划问题, 通过连续化处理后也可按该方法方便地求解. 算例表明所提出的算法是简便而有效的.

关键词: 非线性两层规划; 连续化方法; 分解-协调; 递阶优化
中图分类号: C934 **文献标识码**: A

Hierarchical optimization method for a class of nonlinear bilevel programming problems

ZHENG Pi-e, ZHAO Yu-chao, LIU Guo-hong, LI Rui-bo
(Institute of Systems Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China. Correspondent: ZHENG Pi-e, E-mail: zhengpie@hotmail.com)

Abstract: A novel method for a class of nonlinear bilevel programming problems is proposed. By introducing a decoupling vector, a bilevel programming problem is decomposed into independent optimization sub-problems, which are easily solved at level 1 of a two-level hierarchical structure. At level 2 the decoupling vector is then updated using solutions from level 1. Based on decomposition-coordination principle, the proposed method can finally solve the optimal solution of the bilevel programming problem in an iterative fashion. For programming problems with integers, continualization technique is employed and continualized problems can be easily solved using the proposed method. Numerical examples are used to demonstrate simplicity and effectiveness of the proposed method.

Key words: nonlinear bilevel programming; continualized method; decomposition-coordination; hierarchical optimization

1 引 言

在管理科学、决策科学、系统科学、经济学等学科中, 经常会遇到非线性两层规划问题. 对于这类问题的求解方法, 例如网格搜索法、模拟退火法等, 文献[1]已有总结与评价. 这些方法基本上都局限于某种特殊结构, 或局限于求局部最优解. 文献[2]利用混合遗传算法, 只是求解了一种特殊结构的两层规划问题. 对于非线性含整数的两层规划问题, 解决的方法则更少见. 文献[3]探讨了一种模拟退火与内罚函数相结合的方法. 文献[4]将两层规划问题转化为单目标问题后再进行求解. 上述方法在实际运用中都比较繁琐, 并且当决策变量的维数和约束条件数较大时, 更是无能为力.

本文提出一种新颖的算法, 可以简便地求出一类非线性两层规划问题的全局最优解, 并可解决含整数的规划问题.

收稿日期: 2003-11-03; 修回日期: 2004-03-15.
作者简介: 郑丕谔(1942—), 男, 福建莆田人, 教授, 博士生导师, 从事大系统、神经网络等研究; 赵玉超(1979—), 男, 河北晋州人, 硕士生, 从事金融经济系统决策及应用的研究.

考虑如下形式的非线性两层规划问题:

$$\min_x F(x,y), \tag{1a}$$

$$\text{s.t. } G_i(x,y) \le 0,\ i=1,2,\cdots,m_1; \tag{1b}$$

$$\min_y f(x,y), \tag{1c}$$

$$\text{s.t. } g_j(x,y) \le 0,\ j=1,2,\cdots,m_2. \tag{1d}$$

其中: $x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}, F: R^{n_1} \times R^{n_2} \to R^1, f: R^{n_1} \times R^{n_2} \to R^1$. 假定上下级目标函数和约束条件均为凸的

2　两层规划问题的分解

为分解两层规划问题, 对问题(1) 引入解耦向量[5]

$$z = u(x,y),\ z \in R^m,\ m \le n_1 + n_2. \tag{2}$$

于是, 问题(1) 可分解成下面两个优化问题:

$$\min_x F(x,z), \tag{3a}$$

$$\text{s.t. } G_i(x,z) \le 0,\ i=1,2,\cdots,m_1; \tag{3b}$$

$$\min_y f(z,y), \tag{3c}$$

$$\text{s.t. } g_j(z,y) \le 0,\ j=1,2,\cdots,m_2. \tag{3d}$$

可以看出, 当 z 为固定值时, 问题(3) 是两个独立的优化子问题 通过设计二级递阶结构并应用分解-协调原理, 它们很容易求解

3　分解-协调递阶优化算法

对于问题(3), 当选择 z 为协调向量时, 可安排在二级递阶结构内求解, 如图 1 所示

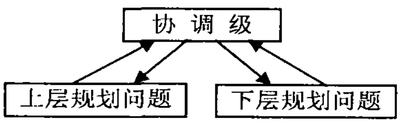

图 1　求解两层规划问题的递阶结构

求解算法可简述如下:

1) 在递阶结构的协调级猜测协调向量 $z = [z_1, z_2]^{\mathrm{T}}$ 的初始值, 并送到第 1 级

2) 根据已知的 z 值, 在第 1 级求解两个独立的规划问题, 并把结果 x 和 y 送回协调级

3) 首先根据预估原理, 在协调级按式(4) 调整协调向量 z, 即

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}^{k}, \tag{4}$$

其中 k 为迭代次数 然后检查算法的收敛性, 即

$$\| z^{k+1} - z^k \| \le \epsilon \tag{5}$$

其中: $\|A\|$ 为 A 的 2-范数, ϵ 为精度要求 如果式(5) 不成立, 则将调整后的协调向量 z 送回第 1 级, 返回 2) 继续求解, 直到收敛为止

4　非线性两层规划问题求解

对于一般的非线性两层规划问题, 可直接按上述步骤进行求解 对于第 1 级问题的求解, 已有多种成熟的方法可用 而求解非线性两层整数规划或混合整数规划问题, 则需引入连续化技术

考虑如下无约束的整数规划问题:

$$\mathrm{UP}_I: \quad \min_{x \in X_I} f(x), \tag{6}$$

其中: X 为 R^n 中的有界闭箱, X_I 表示 X 中的整数全体 设有一常数 μ, 则相应的连续化问题可表示为

$$\mathrm{UP}_\mu: \quad \min_{x \in X} f(x) + \mu \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \pi x_i. \tag{7}$$

若 x^* 是 UP_μ 的全局解, 则当 μ 足够大时, x_I^* 将十分接近 x^*. 这里 $x_I^* \in X_I$, 且 x_I^* 为 UP_I 的解 对此, 文献[6] 给出了严密的论证, 而且证明了对于有约束的情况, 上述连续化方法是可行的

当问题(1) 的变量为整数时, 即 $x \in R_I^{n_1}, y \in R_I^{n_2}$ ($R_I^{n_1}$ 和 $R_I^{n_2}$ 表示 R^n 中的整数点, 且为有界闭箱), 在引入解耦向量(2) 将问题分解后, 可得到两个独立的整数规划问题; 然后应用连续化技术, 将它们分别转化为下面两个连续化后的优化问题:

$$\min_x F(x,z) + \mu_1 \sum_{k=1}^{n_1} \sin^2 \pi x_k, \tag{8a}$$

$$\text{s.t. } G_i(x,z) \le 0,\ i=1,2,\cdots,m_1; \tag{8b}$$

$$\min_y f(z,y) + \mu_2 \sum_{k=1}^{n_2} \sin^2 \pi y_k, \tag{8c}$$

$$\text{s.t. } g_j(z,y) \le 0,\ j=1,2,\cdots,m_2. \tag{8d}$$

其中: $x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}$. 对问题(8) 引入松弛向量 $w = (w_1^2, w_2^2, \cdots, w_{m_1}^2), v = (v_1^2, v_2^2, \cdots, v_{m_2}^2)$, 不等式约束可转化为如下等式约束[7]:

$$\begin{cases} G_i(x,\alpha) + w_i^2 = 0,\ i=1,2,\cdots,m_1; \\ g_j(\beta,y) + v_j^2 = 0,\ j=1,2,\cdots,m_2. \end{cases} \tag{9}$$

于是, 问题(8) 的拉格朗日函数可构造为

$$\begin{aligned} &L(x,y,z_1,z_2,\mu,\lambda,\rho) = \\ &L'(x,y,z_1,z_2,\lambda,\rho) + \\ &\mu_1 \sum_{k=1}^{n_1} \sin^2 \pi x_k + \mu_2 \sum_{k=1}^{n_2} \sin^2 \pi y_k. \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned} &L'(x,y,z_1,z_2,\lambda,\rho) = \\ &F(x,z_1) + f(z_2,y) + \lambda_1^{\mathrm{T}}(G_i(x,z_1) + \\ &w_i) + \lambda_2^{\mathrm{T}}(g_j(z_2,y) + v_j) + \\ &\rho_1^{\mathrm{T}}(z_2 - x) + \rho_2^{\mathrm{T}}(z_1 - y). \end{aligned}$$

在最优解处, $\nabla L'(x,y,z_1,z_2,\lambda,\rho) = 0$, 二阶导数 $\nabla^2 L'(x,y,z_1,z_2,\lambda,\rho)$ 是正定的[7]. 显然, 问题(8)

不具备全局凸性的条件, 但它具有局部凸性.

对于上述结论, 可证明如下: 因为拉格朗日函数的 Hessen 阵为

$$\nabla^2 L(x, y, z_1, z_2, \mu, \lambda, \rho) =$$
$$\nabla^2 L'(x, y, z_1, z_2, \lambda, \rho) +$$
$$2\pi^2\mu_1\sum_{k=1}^{n_1}\cos 2\pi x_k + 2\pi^2\mu_2\sum_{k=1}^{n_2}\cos 2\pi y_k,$$

式中 $\nabla^2 L'(x, y, z_1, z_2, \lambda, \rho)$ 是正定的. 可见, Hessen 阵的正定性取决于上式最右边两项

$$2\pi^2\mu_1\sum_{k=1}^{n_1}\cos 2\pi x_k \text{ 和 } 2\pi^2\mu_2\sum_{k=1}^{n_2}\cos 2\pi y_k.$$

由连续化定理可知, 在最优解处, x 和 y 的值将十分接近整数点, 因此 Hessen 阵的最右边两项在最优解的某邻域内处处正定. 当 μ_1 和 μ_2 足够大时, Hessen 阵在最优解的某邻域内处处正定. 因此, 问题(8) 具有局部凸性. 由局部对偶性的定义[7], 满足局部对偶理论.

5　算　　例

选用文献[8] 的算例, 经过连续化处理后, 按本文提出的方法用两级递阶结构求解. 第 1 级的求解可用 Matlab 的优化工具箱, 协调级按式(4) 调整协调向量. 选用的算例如下:

上层问题

$$\min_x (x_1 - 30)^2 + (x_2 - 20)^2 - 20y_1 + 20y_2,$$
$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 \le 30, x_1 + x_2 \ge 20,$$
$$0 \le x_1 \le 15, 0 \le x_2 \le 15;$$

下层问题

$$\min_y (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2,$$
$$\text{s.t. } 0 \le y_1 \le 10, 0 \le y_2 \le 10.$$

引入解耦变量 $z_1 = y_1, z_2 = y_2, z_3 = x_1, z_4 = x_2$, 原问题可分解为两个独立的混合整数规划问题. 对整数变量 x_1 和 y_1 进行连续化处理后, 转化为如下两个连续型优化问题:

$$\min_x (x_1 - 30)^2 + (x_2 - 20)^2 -$$
$$20z_1 + 20z_2 + \mu_1\sum_{k=1}^{2}\sin^2\pi x_k,$$
$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 \le 30, -x_1 - x_2 \le -20,$$
$$z_3 = x_1, z_4 = x_2,$$
$$0 \le x_1 \le 15, 0 \le x_2 \le 15;$$

$$\min_y (z_3 - y_1)^2 + (z_4 - y_2)^2 + \mu_2\sum_{k=1}^{2}\sin^2\pi y_k,$$
$$\text{s.t. } z_1 = y_1, z_2 = y_2,$$
$$0 \le y_1 \le 10, 0 \le y_2 \le 10.$$

给定初值 $z = [10\ 10\ 15\ 15]^T$, 经过 3 次迭代计算后满足收敛条件, 得到的最优结果为: $x_1 = 15, x_2 = 7.5, F = 331.25; y_1 = 10, y_2 = 7.5, f = 25$. 判别收敛的条件为 $\|A\| \le 0.0001$, 其中 $A = [z_1 - y_1\quad z_2 - y_2\quad z_3 - x_1\quad z_4 - x_2]^T$, μ_1 和 μ_2 的赋值为 400.

6　结　　论

本文提出一种求解非线性两层规划问题的新方法, 通过引入解耦向量将非线性两层规划问题分解成多个独立且易于求解的子问题, 经过协调以迭代方式最终达到规划问题的解. 对于复杂且维数大的非线性两层规划问题, 不论含有或不含整数, 都可按该方法方便地求解. 但对于含整变量的非线性问题, 由于连续化使问题只满足局部凸性, 该方法只能求出局部最优解.

参考文献(References):

[1] 向丽. 递阶优化问题理论及其算法研究与进展[J]. 控制与决策, 2001, 16(6): 854-863.
(Xiang Li. Advances in theory and algorithms of hierarchical optimal problem [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(6): 854-863.)

[2] 李宏, 王宇平. 解非线性二层规划的一种混合遗传算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2002, 29(6): 840-843.
(Li Hong, Wang Yuping. A hybrid genetic algorithm for nonlinear bilevel programming[J]. *J of Xidian University*, 2002, 29(6): 840-843.)

[3] 李磊, 王春峰, 滕春贤. 一类非线性两级混合整数规划问题的全局最优解的近似算法[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(4): 19-25.
(Li Lei, Wang Chunfeng, Teng Chunxian. The approximate algorithm of global optimization for a sort of nonlinear bilevel mixed integer-programming problem [J]. *Systems Engineering — Theory and Practice*, 2002, 22(4): 19-25.)

[4] Gumus Z H, Floudas C A. Global optimization of nonlinear bilevel programming problems[J]. *J of Global Optimization*, 2001, 20(1): 1-31.

[5] 辛M G, 铁脱里A. 大系统的最优化及控制[M]. 周斌, 张国衡译. 北京: 机械工业出版社, 1983. 45-74.

(下转第 1200 页)

染色体 3:

a	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	3	3
b	7	6	11	3	10	12	1	9	2	5	4	8

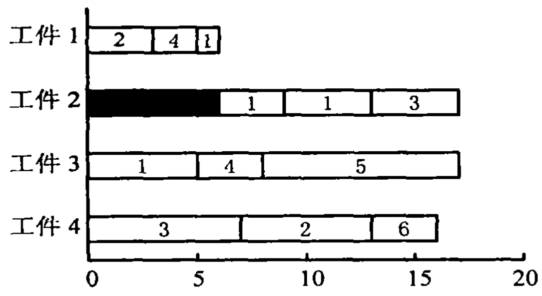

图 1　染色体 1 对应的甘特图

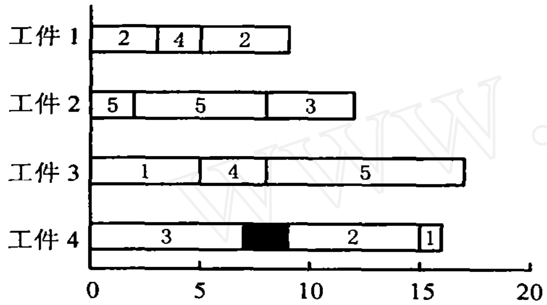

图 2　染色体 2 对应的甘特图

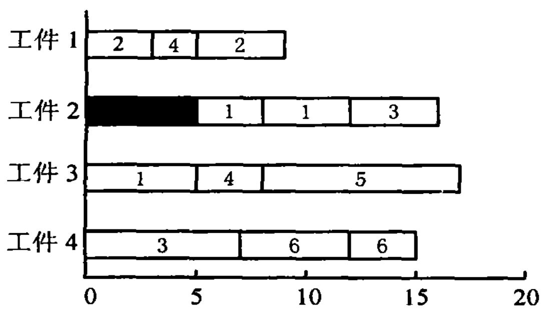

图 3　染色体 3 对应的甘特图

其中 a 和 b 分别表示第 1 部分和第 2 部分的染色体编码 染色体 1, 2, 3 所对应的调度甘特图分别如图 1 ～ 图 3 所示

文献[5] 中最优生产周期为 18, 而遗传算法得到的更优调度解为 17, 体现了遗传算法强大的搜索能力 从最优染色体的编码及甘特图可以看出, 若某一染色体中相邻位置的基因具有较优的性质, 则包含该顺序的其他染色体也有较好的适应值, 并反映出染色体编码与解码的相互对应关系 这不仅为利用遗传算法解决 FJSP 调度问题提供了一定的理论依据, 而且有助于对分部遗传算子设计方法的深入理解

5 结　论

本文通过分析 FJSP 问题的特点, 提出一种新的遗传调度算法 该算法利用分部编码方法及分部遗传算子, 有效地保证了遗传后代的可行性, 并能较快地得到最优调度方案, 有利于生产计划与实际生产调度相结合, 提高机器利用率, 缩短生产周期

参考文献(References):

[1] Takeshi Yamada, Ryohei Nakana Genetic algorithms for job-shop scheduling problems[A] *Proc of Modern Heuristic for Decision Support*[C] London, 1997 67-81

[2] Jose Fernando Goncalves, Jorge Jose de Magalhaes Mendes, Maurício G C Resende A hybrid genetic algorithm for the job shop scheduling problem [R] *AT&T Labs Research*, 2002

[3] Davis L. *Handbook of Genetic Algorithms*[M] New York: Van Nostrand Reinhold, 1991

[4] 邢文训, 谢金星 现代优化计算方法[M] 北京: 清华大学出版社, 1999 166-169

[5] Nasr N, Elsayed E A. Job shop scheduling with alternative machine[J] *Int J of Production Research*, 1990, 28(9): 1595-1609

(上接第 1196 页)

[6] 张连生, 高峰, 姚奕荣 非线性整数规划的连续化[J] 运筹学学报, 1998, 2(2): 59-66

(Zhang Liansheng, Gao Feng, Yao Yirong Continuity method for nonlinear integer programming[J] *Operation Research Trans*, 1998, 2(2): 59-66)

[7] Luenberger D G *Linear and Nonlinear Programming* [M] Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1984 1-134

[8] 盛昭瀚 主从递阶决策论——Stackelberg 问题[M] 北京: 科学出版社, 1998 352-354