

文章编号: 1001-0920(2004)10-1113-04

## 基于扩张观测器的非线性不确定系统输出跟踪

王新华, 陈增强, 袁著祉  
(南开大学 自动化系, 天津 300071)

**摘要:** 针对一类非线性不确定系统, 设计出一种高增益扩张观测器, 该观测器具有抗干扰性, 可用于观测信号的  $n$  阶导数. 在此基础上设计了一种控制器, 使得跟踪误差及其各阶导数在不确定及扰动存在的情况下仍能迅速收敛. 仿真结果表明, 这种控制方法对于非线性不确定系统具有良好的控制效果.

**关键词:** 非线性不确定系统; 高增益扩张观测器; 抗干扰; 跟踪误差

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## Output tracking based on extended observer for nonlinear uncertain systems

WANG Xin-hua, CHEN Zeng-qiang, YUAN Zhu-zhi

(Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China Correspondent: WANG Xin-hua, Email: wang-xinhua@sina.com)

**Abstract:** A high-gain extended observer is designed for a class of nonlinear uncertain systems. This observer has the ability of attenuating disturbances, and can be used to estimate derivatives of order  $n$  of a given signal. The controller based on this extended observer can make the tracking error and its derivatives converge to zero rapidly when uncertainties and disturbances exist. The result of simulation indicates that this method has satisfactory controlling effect for nonlinear uncertain systems.

**Key words:** nonlinear uncertain system; high-gain extended observer; attenuating disturbances; tracking error

### 1 引言

非线性系统理论一直成为控制领域研究的重点<sup>[1~5]</sup>, 而非线性不确定系统输出跟踪问题则是当前研究的热点课题, 并已提出多种控制方法. 在实际中, 被跟踪信号各阶导数一般是不可测的, 这为控制器设计增加了难度. 文献[3~5]在被跟踪信号及其各阶导数可测的情况下研究输出跟踪问题. 大多数状态观测器对于非线性系统观测效果较差, 并且速度较慢. 文献[3]采用高增益观测器和变结构控制方法对非线性系统进行输出反馈跟踪, 输入信号及

各阶导数假设可测, 但对不确定系统跟踪的效果较差. 文献[6,7]设计的扩张状态观测器具有很强的观测精度和抗干扰性, 但未从理论上证明其收敛.

本文针对非线性不确定系统的上述问题, 设计出一种高增益扩张观测器, 并证明其稳定性, 使其具有较高的收敛速度和观测精度; 在此基础上设计了一种控制器, 使被控对象的输出误差收敛速度和精度都能满足较高的要求.

### 2 问题分析

本文研究的非线性不确定系统形式如下:

收稿日期: 2003-11-20; 修回日期: 2004-04-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60174021, 60374037); 南开大学创新研究基金资助项目.

作者简介: 王新华(1975—), 男, 河北秦皇岛人, 博士生, 从事非线性系统输出跟踪的研究; 袁著祉(1937—), 男, 山东青岛人, 教授, 博士生导师, 从事非线性自适应控制、预测控制等研究.

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t) + bu, \\ y = x. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, t)$  包括不确定项及扰动信号, 且存在一阶导数;  $b$  为不等于 0 的常数 参考输入信号为  $y_d$ , 且其各阶导数不可测

设  $x_1 = x, x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1, x_3 = \ddot{x} = \ddot{x}_1, \dots, x_{n-1} = x^{(n-1)}$ , 则  $\dot{x}_n = \dot{x}^{(n)} = f(x_1, \dots, x_n, t) + bu$ . 设  $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n, t), x_{n+1} = (f(x_1, \dots, x_n, t)) = g(x_1, \dots, x_n, t)$ , 且  $|g(x_1, \dots, x_n, t)| + |y_d^{(n+1)}| \leq M, 0 < M < +\infty$ , 则系统(1) 可变形为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = x_{n+1} + bu, \\ \dot{x}_{n+1} = g(x_1, \dots, x_n, t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2)$$

输入输出误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \vdots \\ \dot{e}_{n-1} = e_n, \\ \dot{e}_n = e_{n+1} + bu, \\ \dot{e}_{n+1} = g(x_1, \dots, x_n, t) - y_d^{(n+1)}. \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$e(t) = [e_1 \ \dots \ e_{n+1}]^T = [x_1 - y_d, \dots, x_n - y_d^{(n-1)}, x_{n+1} - y_d^{(n)}]^T.$$

式(2) 中  $\dot{x}_n = x_{n+1} + bu$  两边同时与  $y_d^{(n)}$  相减, 即得到式(3) 中  $\dot{e}_n = e_{n+1} + bu$ .

### 3 状态扩张观测器的设计

令  $s^{n+1} + h_1 s^n + \dots + h_n s + h_{n+1} = 0$  与  $\sum_{i=1}^{n+1} (s + \lambda_i) = 0$  等价, 且  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$  均为互不相等的正实数 令

$$\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}\},$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{h_1}{\epsilon} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{h_n}{\epsilon^n} & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{h_{n+1}}{\epsilon^{n+1}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

对于上述矩阵  $A$ , 存在范德蒙矩阵  $T$  满足下列关系:

$$A = T \text{diag}[-\lambda_1/\epsilon, \dots, -\lambda_{n+1}/\epsilon] T^{-1}. \quad (5)$$

**定理 1** 针对误差系统(3), 设计扩张状态观测器形式如下:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \frac{\lambda_1}{\epsilon}(e_1 - e_1), \\ \vdots \\ \dot{e}_n = e_{n+1} - \frac{\lambda_n}{\epsilon^n}(e_1 - e_1) + bu, \\ \dot{e}_{n+1} = -\frac{\lambda_{n+1}}{\epsilon^{n+1}}(e_1 - e_1). \end{cases} \quad (6)$$

于是有:

$$1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta = 0; \quad (7)$$

2) 当  $\epsilon$  固定时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta = \frac{\Delta T}{\lambda} T^{-1}. \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta(t) &= [\delta_1 \ \dots \ \delta_{n+1}]^T = \\ &= [e_1 - e_1 \ \dots \ e_{n+1} - e_{n+1}]^T, \\ e(t) &= [e_1 \ \dots \ e_{n+1}]^T, \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$  为摄动参数

证明 式(4) 和式(3) 的误差系统为

$$\dot{\delta} = A \delta + B (-g(x_1, \dots, x_n, t) - y_d^{(n+1)}). \quad (9)$$

系统(9) 的解为

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \exp(A t) \delta(0) + \int_0^t \exp(A(t-\tau)) \times \\ & \quad (-g(x_1, \dots, x_n) - y_d^{(n+1)}) d\tau B. \end{aligned} \quad (10)$$

所以

$$\begin{aligned} & \exp(A t) \delta(0) + \\ & M \int_0^t \exp(A(t-\tau)) d\tau B \\ & T \text{diag}\{\exp(-\frac{\lambda_1}{\epsilon} t), \dots, \\ & \exp(-\frac{\lambda_{n+1}}{\epsilon} t)\} T^{-1} \delta(0) + \\ & M \int_0^t \exp(A(t-\tau)) d\tau B \\ & T T^{-1} \exp(-\frac{\lambda}{\epsilon} t) \delta(0) + \\ & T T^{-1} M \int_0^t \exp(-\frac{\lambda}{\epsilon}(t-\tau)) d\tau B \\ & T T^{-1} [\exp(-\frac{\lambda}{\epsilon} t) \delta(0) + \\ & M \frac{\epsilon}{\lambda} (1 - \exp(-\frac{\lambda}{\epsilon} t)) B] \end{aligned} \quad (11)$$

因为  $B = 1, \delta(0)$  有界, 所以  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \delta(t)$

$$= 0 \text{ 当 } \epsilon \text{ 固定时, 有 } \lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(t) = \frac{\Delta T}{\lambda} T^{-1}.$$

设计观测器的目的是使  $e_1, \dots, e_{n+1}$  这种简单形式的扩张观测器可用于估计信号的直到  $n$  阶导数。虽然一般线性扩张观测器的收敛速度在接近平衡点时要慢于非线性扩张观测器, 但引入高增益项后同样能加快收敛速度。可以看出, 所设计的扩张观测器除了具有观测系统 (3) 误差变量的作用外, 还可通过控制输入  $u$  来控制系统 (3), 达到跟踪的目的。

#### 4 控制器设计

**定理 2** 对于误差系统 (3), 观测器为式 (6), 设滑模变量为

$$\sigma(t) = e_n + a_{n-1}e_{n-1} + \dots + a_1e_1, \quad (12)$$

其中多项式  $s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1$  相对于变量  $s$  是 Hurwitz 的。控制器选为

$$u = -b^{-1}(U_0 \text{sign}(\sigma) - \left(\frac{h_n}{\epsilon} + a_{n-1}\frac{h_{n-1}}{\epsilon^{n-1}} + \dots + a_1\frac{h_1}{\epsilon}\right)(e_1 - e_1) + e_{n+1} + a_{n-1}e_n + \dots + a_1e_2). \quad (13)$$

于是

$$\lim_t e(t) \leq k_p \sqrt{\epsilon}, \quad (14)$$

其中  $k_p, U_0, U$  均为正常数, 且  $U < U_0$ 。

**证明** 设 Lyapunov 函数为  $V = \sigma^2/2$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma^2 = \sigma(e_n + a_{n-1}e_{n-1} + \dots + a_1e_1) = \\ &= \sigma(e_{n+1} - \frac{h_n}{\epsilon}(e_1 - e_1) + bu + a_{n-1}(e_n - \frac{h_{n-1}}{\epsilon^{n-1}}(e_1 - e_1)) + \dots + a_1(e_2 - \frac{h_1}{\epsilon}(e_1 - e_1))) = \\ &= -U_0|\sigma| < -U|\sigma| \end{aligned} \quad (15)$$

不等式 (15) 满足滑模条件。所以存在有限时间<sup>[8]</sup>  $T_0 = |\sigma(0)|/U$ , 当  $t > T_0$  时, 满足  $\sigma = 0$ 。由式 (3) 并利用  $\sigma = 0$ , 当  $t > T_0$  时, 得

$$\begin{aligned} \dot{e}_{n-1} &= e_n = e_n - \delta_n = \\ &= -(a_{n-1}e_{n-1} + \dots + a_1e_1) - \delta_n = \\ &= -\{a_1(e_1 + \delta_1) + \dots + a_{n-1}(e_{n-1} + \delta_{n-1})\} - \delta_n = \\ &= -a_1e_1 - \dots - a_{n-1}e_{n-1} - a_1\delta_1 - \dots - a_{n-1}\delta_{n-1} - \delta_n \end{aligned} \quad (16)$$

由式 (3) 和 (16) 得

$$\dot{\tilde{e}} = \tilde{A} \tilde{e} + H \delta \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{e} = [e_1, \dots, e_{n-1}]^T, \delta = [\delta_1, \dots, \delta_{n+1}]^T, \\ \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \\ H = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & \dots & -a_{n-1} & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (18)$$

由于矩阵  $\tilde{A}$  和  $A$  均为 Hurwitz 的, 对于给定的正定矩阵  $Q_1$  和  $Q_2$ , 存在正定矩阵  $P_1$  和  $P_2$ , 满足

$$P_1\tilde{A} + \tilde{A}^T P_1 = -Q_1, P_2A + A^T P_2 = -Q_2 \quad (19)$$

令  $\Phi(\tilde{e}, \delta) = e^T P_1 \tilde{e} + \delta^T P_2 \delta$ ,  $\Phi(\tilde{e}, \delta)$  沿方程 (9) 和 (17) 的解轨线求导, 得

$$\dot{\Phi}(\tilde{e}, \delta) < -\eta \Phi(\tilde{e}, \delta), \Phi(\tilde{e}, \delta) > r_1 \epsilon \quad (20)$$

其中  $\eta$  和  $r_1$  为正常数。令  $r_2 > r_1$ , 并且定义

$$\Omega = \{(\tilde{e}, \delta) \mid \Phi(\tilde{e}, \delta) > r_2 \epsilon\}. \quad (21)$$

可以看出, 存在有限时间  $t_1$ , 对于  $t > t_1$ , 满足  $\Phi(\tilde{e}, \delta)$

$$\Omega \text{ 由式 (16) 及 } \lim_t \delta(t) \leq \frac{\epsilon}{\lambda} T \times T^{-1}, \text{ 可得 } \lim_t e(t) \leq k_p \sqrt{\epsilon}. \text{ 其中 } k_p \text{ 为正常数}$$

#### 5 仿真示例

考虑二阶非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \cos \frac{\pi}{2} x_1 - x_1^{1/3} - 4x_2^{1/3} + u, \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

参考信号为  $y_d = 2 \sin t$ 。由式 (2), (3) 和 (6) 得到误差扩张观测器

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - \frac{1}{0.01}(e_1 - e_1), \\ \dot{e}_2 &= e_3 - \frac{4}{0.01^2}(e_1 - e_1) + u, \\ \dot{e}_3 &= -\frac{5}{0.01^3}(e_1 - e_1). \end{aligned}$$

设滑模变量为  $\sigma(t) = e_2 + e_1$ , 控制器为

$$u = -\left(4 \text{sign}(\sigma) - \frac{4}{0.01^2} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{(s+0.01)}(e_1 - e_1) + e_3 + e_2.$$

所得系统输出跟踪误差仿真曲线如图1所示

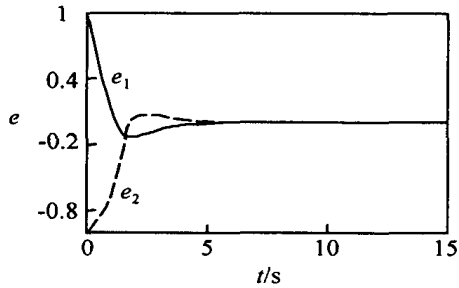


图1 系统输出跟踪误差仿真曲线

## 6 结 语

本文针对一类非线性不确定系统,设计出一种基于扩张观测器的输出跟踪控制器。由分析及仿真结果可以看出,该控制器的控制速度和精度都比较高。下一步工作是利用状态扩张及中心流形定理,对非线性非最小相位系统设计观测器,并进行输出跟踪控制。

### 参考文献(References):

- [1] Kokotovic P, A rca k M. Constructive nonlinear control: A historical perspective [J]. *A utom atica*, 2001, 37(5): 637-662
- [2] Slotine J E, Li W. *Applied N onlinear Control* [M].

Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.

- [3] Seungrohk O H, Hassan K K. Nonlinear output feedback tracking using high-gain observer and variable structure control [J]. *A utom atica*, 1997, 33(10): 1845-1856
- [4] Ahmad N A, Hassan K K. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on A utom atic Control*, 1999, 44(9): 1672-1687.
- [5] Rabah W, Ldhaheer A, Hassan K K. Effect of unmodeled actuator dynamics on output feedback stabilization of nonlinear systems [J]. *A utom atica*, 2001, 37(9): 1323-1327.
- [6] 韩京清. 一类不确定对象的扩张状态观测器 [J]. *控制与决策*, 1995, 10(1): 85-88  
(Han Jingqing. The "extend state observer" of a class of uncertain systems [J]. *Control and Decision*, 1995, 10(1): 85-88.)
- [7] 韩京清. 非线性系统的状态观测器 [J]. *控制与决策*, 1990, 6(1): 57-60  
(Han Jingqing. State observer of nonlinear systems [J]. *Control and Decision*, 1990, 6(1): 57-60.)
- [8] Slotine J J E, Hedrick J K, Misawa E A. On sliding observers for nonlinear systems [J]. *J of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1987, 109: 245-252

(上接第1112页)

- [3] Deng P S. Using case-based reasoning approach to the support of ill-structured decisions [J]. *European J of Operational Research*, 1996, 93: 511-521.
- [4] Smyth B, Keane M T, Cunningham P D. Hierarchical case-based reasoning integrating case-based and decompositional problem-solving techniques for plant-control software design [J]. *IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering*, 2001, 13(5): 793-812
- [5] 徐晓臻, 高国安. 案例推理在多准则评价智能决策支持系统中的应用研究 [J]. *计算机集成制造系统*, 2001, 7(1): 16-18, 28  
(Xu X Z, Gao G A. Research and implement of case-based reasoning in a multi-criteria evaluation DSS [J]. *CIMS*, 2001, 7(1): 16-18, 28)
- [6] Szelke E, Markus G. A learning reactive scheduler

using CBR [J]. *Computers in Industry*, 1997, 33: 31-46

- [7] Grupe F H, U wiler R, Ramarapu N K, et al. The application of case based reasoning to the software development process [J]. *Information and Software Technology*, 1998, 40(9): 493-499
- [8] McKenzie D P, Forsyth R S. Classification by similarity: An overview of statistical methods of case-based reasoning [J]. *Computers in Human Behavior*, 1995, 11(2): 273-288
- [9] Angi V. How to solve complex problems with cases [J]. *Engineering Application Artificial Intelligence*, 1996, 9(4): 377-384
- [10] 方述诚, 汪定伟. *模糊数学与模糊优化* [M]. 北京: 科学出版社, 1997. 12-27.