

文章编号: 1001-0920(2004)11-1267-04

## 离散时间系统变结构控制的趋近律问题

李文林

(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453006)

**摘要:** 针对离散系统变结构控制, 提出了两个新的滑模趋近律. 应用该趋近设计变结构控制系统, 其原点的稳定性和系统的平稳性都优于指数趋近律和比例-等速-变速趋近律. 通过仿真例子对此进行了验证.

**关键词:** 离散时间系统; 变结构控制; 滑动模态; 趋近律

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Reaching law of discrete-time variable structure control systems

L I W en-lin

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453006, China. E-mail: hsdwl@tom.com)

**Abstract:** Two new reaching laws for discrete-time variable structure control systems are proposed. By applying the proposed control law to discrete-time variable structure control systems, the stability of origin and steady of systems are better than the exponential rate reaching law and proportional-constant-variable rate reaching law. Simulation results show the effectiveness of the proposed control laws.

**Key words:** discrete-time systems; variable structure control; sliding mode; reaching law

### 1 引言

与连续系统相比, 离散时间系统滑动模态到达条件要复杂得多. 20 世纪 80 年代 M ilosavlevic<sup>[1]</sup> 提出了准滑动模态的思想, Dot and Hof<sup>[2]</sup>, Sap-turk<sup>[3]</sup>, Furuta<sup>[4]</sup> 等先后给出了 3 种不等式形式的到达条件, 但这些理论和到达条件在描述离散时间系统准滑动模态本质运动方面都存在一定的缺陷. 90 年代初, 高为炳给出了准滑动模态的完整定义, 指出离散时间系统变结构控制的到达条件应具有 6 个特点, 并给出具有这 6 个特点等式形式的指数趋近律<sup>[5,6]</sup>, 即

$$s(k+1) = (1-qT)s(k) - \epsilon T \operatorname{sgn}s(k). \quad (1)$$

其中:  $\epsilon > 0, q > 0, 1-qT > 0, T$  为采样周期. 该趋近律较深刻地揭示了离散时间系统变结构控制的运动机理. 但它仍存在着两个不可忽视的缺点: 1) 该趋近律无法保证系统运动最终趋于原点, 它有可能

在原点附近形成一个极限环; 2) 没有考虑采样时刻控制力切换量受限情况, 当  $s(k)$  较大时, 控制力切换幅度过大, 影响运动的平稳性, 也会给实际实现带来困难.

针对缺点 1), 文献[7] 提出了利用前一时刻信息替代当前时刻信息的思想, 但它只对慢变系统有效, [8] 则利用了两种趋近律切换的思想: 远离原点处采用指数趋近律(1), 在原点附近采用变速趋近律

$$s(k+1) = s(k) - \epsilon T \operatorname{sgn}s(k). \quad (2)$$

但这里也存在一些问题, 如离原点远近的界定问题、两种趋近律交界处控制力突变对系统的影响问题等; 针对上述缺点, 本文提出了两个新的趋近律, 既保证了原点的稳定性, 也改善了系统的动态品质.

### 2 滑动模态趋近律

考虑如下离散时间系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3)$$

收稿日期: 2004-02-02; 修回日期: 2004-04-21

作者简介: 李文林(1949—), 男, 河南舞阳人, 教授, 博士, 从事变结构控制、自适应控制等研究.

的变结构控制问题 其中:  $x(k) \in R^n, u(k) \in R^m$ ,  $(A, B)$  可控

取切换函数

$$s(k) = Cx(k),$$

其中  $C \in R^{m \times n}$  的选取, 使滑动模态具有良好的稳定性, 这一点容易解决(从略).

于是, 系统(3) 的稳定性就归结为: 设计合适的变结构控制律  $u(k)$ , 以保证滑动模态的到达 趋近律(1) 的优点在于:  $s(k)$  较大时, 第 1 项  $(1 - qT)s(k)$  起主要作用, 将  $s(k)$  以比例  $1 - qT$  压缩;

$s(k)$  较小时, 第 2 项(平移项)  $\epsilon T \operatorname{sgn}s(k)$  起主要作用, 两者相辅相成, 较好地解决了滑动模态的到达问题 但是趋近律(1) 的平移项是常量平移, 无法保证系统运动最终趋于原点 文献[8] 提出一个改进方案:  $s(k)$  较大时采用指数趋近律(1),

$s(k)$  较小时采用变速趋近律(2), 将原点附近的常量平移换成变速移动, 保证了系统运动最终趋于原点 但是两种趋近律切换, 也存在一些问题, 如: 1) 切换时刻如何界定和切换如何实施的问题; 2) 两种趋近律交界处控制力突变, 造成系统动态性能变差的问题; 3) 与趋近律(1) 一样没有考虑采样时刻控制力切换量受限情况

为解决这些问题, 本文提出两个改进的趋近律

### 2 1 改进方案 1

针对指数趋近律(1) 的缺点 1) 和上面存在的问题 1) 和 2), 给出下面一个趋近律:

$$s(k + 1) = (1 - qT)s(k) - \epsilon T \arctg(x) \cdot \operatorname{sgn}s(k). \quad (4)$$

**定理 1** 趋近律(4) 既可以保持指数趋近律(1) 快速到达准滑动模态带的长处, 又能保持变速趋近律(2) 使系统运动最终到达原点的优点 并且克服了文献[8] 方法(即两个趋近律切换的方法) 带来的缺点 1) 和 2).

**证明** 由罗必达法则, 容易算出

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctg(x) = \frac{\pi}{2}.$$

因此, 在  $x$  较大, 即远离原点处, 本文提出的趋近律(4) 可近似表示为

$$s(k + 1) = (1 - qT)s(k) - \epsilon_1 \operatorname{sgn}s(k), \quad \epsilon_1 = \epsilon T \pi / 2 \quad (5)$$

这相当于指数趋近律(1), 能够保证系统的运动快速到达准滑动模态带

$$S_\epsilon = \{x(k): |s(k)| < \epsilon_1\}.$$

由于切换函数的选择保证了准滑动模态是稳

定的, 进入  $S_\epsilon$  的运动将保持在带内, 到达原点附近再由罗必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = 1,$$

即  $\arctg(x)$  与  $x$  是等价无穷小, 所以在原点附近, 式(5) 又可以近似表示为

$$s(k + 1) = (1 - qT)s(k) - \epsilon T x \operatorname{sgn}s(k).$$

这相当于变速趋近律(2). 由文献[6] 的分析, 这将在原点附近形成一个扇形切换区, 保证系统运动最终到达原点

由此可见, 本文提出的趋近律(4) 能自动实现趋近律(1) 和(2) 的优势互补, 也避免了文献[8] 两个趋近律切换产生的问题 为进一步改善控制效果, 可将式(4) 中  $\arctg(x)$  换成  $\arctg(\alpha x)$ ,  $\alpha$  可根据希望的到达速率和原点的调节精度适当选择

### 2 2 改进方案 2

针对趋近律(1) 和文献[8] 方法的缺点:

$s(k)$  较大时, 控制力切换幅度  $u(k) - u(k - 1)$  可能过大, 影响运动的平稳性和实际实现困难的问题, 首先对问题产生的原因进行分析

由趋近律(1)

$$\begin{aligned} s(k + 1) &= (1 - qT)s(k) - \epsilon T \operatorname{sgn}s(k) = \\ &= Cx(k) - qTs(k) - \epsilon T \operatorname{sgn}s(k) = \\ &= CAx(k - 1) + CBu(k - 1) - \\ &= qTs(k) - \epsilon T \operatorname{sgn}s(k). \end{aligned} \quad (6)$$

由系统(3) 和切换函数的选择

$$s(k + 1) = Cx(k) = CAx(k) + CBu(k). \quad (7)$$

将式(6) 与(7) 相减, 可解得

$$\begin{aligned} u(k) - u(k - 1) &= \\ &= -(CB)^{-1} [CA \Delta x(k) + qTs(k) + \\ &= \epsilon T \operatorname{sgn}s(k)], \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\Delta x(k) = x(k) - x(k - 1)$ .

一般情况下, 采样周期  $T$  较小时,  $\Delta x(k) \approx 0$ ,  $\epsilon T \approx 0$ , 代入式(8), 在远离切换面时

$$u(k) - u(k - 1) \approx -qT (CB)^{-1} \cdot s(k). \quad (9)$$

因此, 当  $s(k)$  较大时, 控制的切换幅度  $u(k) - u(k - 1)$  就变得很大, 这不仅影响运动的平稳性, 实现起来也有困难 为克服这个缺点, 本文提出变压缩系数趋近律

$$s(k + 1) = [1 - \bar{q}(k)T]s(k) - \epsilon T \arctg(x(k) \operatorname{sgn}s(k)), \quad (10)$$

其中



$$\bar{q}(k) = \frac{2\bar{K}q}{qT \cdot s(k) + \bar{K} + |qT \cdot s(k) - \bar{K}|} \quad (11)$$

定理 2 趋近律(10), 可保证系统运动最终到达原点, 同时可保证控制力的切换幅度

$$u(k) - u(k - 1) \quad K = \bar{K} \quad (CB)^{-1} .$$

证明 当  $qT \cdot s(k) \quad \bar{K}$  时,

$$\bar{q}(k) = \frac{2\bar{K}q}{qT \cdot s(k) + \bar{K} - (qT \cdot s(k) - \bar{K})} = \frac{2\bar{K}q}{2\bar{K}} = q$$

与式(9)的推导相同(只需将  $\bar{q}(k)$  视作指数趋近律的  $q$ ), 当采样周期  $T$  充分小时, 有

$$\frac{u(k) - u(k - 1)}{qT \cdot (CB)^{-1} \cdot s(k)} = \frac{u(k) - u(k - 1)}{qT \cdot (CB)^{-1} \cdot s(k)} \quad (12)$$

此时

$$\bar{q} = q \quad (CB)^{-1} \cdot \bar{K} = K.$$

当  $qT \cdot s(k) \quad \bar{K}$  时, 有

$$\bar{qT} = \frac{2\bar{K}qT}{qT \cdot s(k) + \bar{K} + (qT \cdot s(k) - \bar{K})} = \frac{2\bar{K}qT}{2qT \cdot s(k)} = \frac{\bar{K}}{s(k)} \quad (13)$$

由式(12), 有

$$\frac{u(k) - u(k - 1)}{qT \cdot (CB)^{-1} \cdot s(k)} = \frac{\bar{K}}{s(k)} \cdot (CB)^{-1} \cdot s(k) = (CB)^{-1} \cdot \bar{K} = K.$$

因此趋近律(9)保证了  $u(k) - u(k - 1)$

$K$ , 适当选择  $\bar{K}$  即可解决控制力切换幅度过大的问题

注意式(12), 即  $\bar{qT} = \frac{\bar{K}}{s(k)}$  成立的前提是

$$qT \cdot s(k) \quad \bar{K} \text{ or } \frac{\bar{K}}{qT \cdot s(k)} < 1. \quad (14)$$

由式(13), (14) 和  $qT < 1$ , 当  $qT \cdot s(k) \quad \bar{K}$  时, 有

$$\bar{qT} = \frac{\bar{K}}{s(k)} = \frac{\bar{K}}{qT \cdot s(k)} \cdot qT < \frac{\bar{K}}{qT \cdot s(k)} < 1.$$

因此,  $(1 - \bar{qT}) < 1$ , 可保证系统运动到达准滑动模态带, 并最终到达原点

另外, 由式(11) 可以看出, 当  $\bar{K}$  时, 有

$$\bar{q}(k) = \frac{2\bar{K}q}{qT \cdot s(k) + \bar{K} + |qT \cdot s(k) - \bar{K}|} \quad q$$

因此趋近律(11) 可看作是趋近律(4) 的推广, 它相当于控制力切换量不受限情况

### 3 仿真例子

考虑二阶系统

$$x(k + 1) = A x(k) + B u(k).$$

这里  $A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.3 \\ 1 & 0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

取切换函数

$$s(k) = 2.5x_1(k) + x_2(k).$$

分别按指数趋近律(1), 变速趋近律(2) 和本文给出的两个趋近律(4) 和(11) 设计变结构系统 图1 ~ 图5 是分别按4种不同趋近律设计变结构控制系统的仿真结果

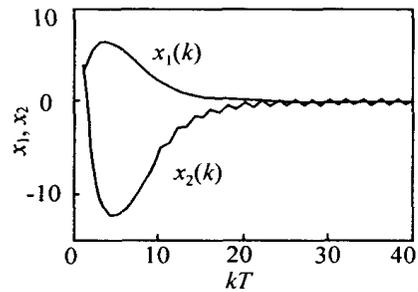


图1 趋近律(1) 的状态运动轨线

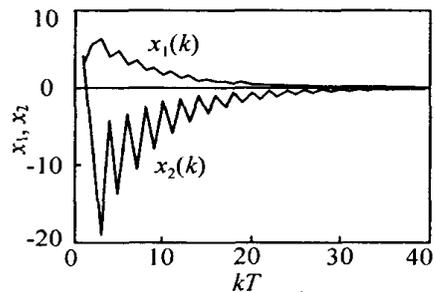


图2 趋近律(2) 的状态运动轨线

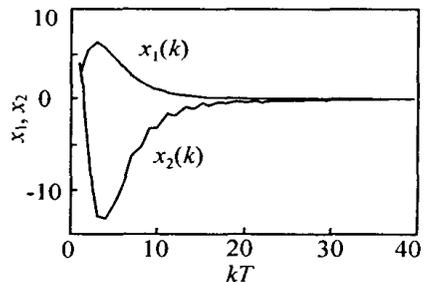


图3 趋近律(4) 的状态运动轨线

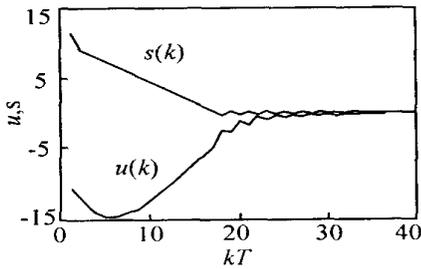
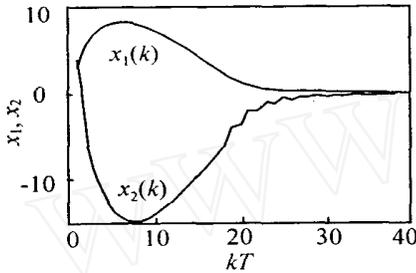
图4 趋近律(10)的  $s(k)$ ,  $u(k)$  情况

图5 趋近律(10)的状态运动轨线

对比以上3种情况的仿真,可以看出,图2的变速趋近律,能保证系统运动趋于原点,但离原点远处,振荡较大,平稳性能差;图1的指数趋近律,离原点远处运动性能优于变速趋近律情况,但状态  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  在原点附近出现等幅振荡,原点附近动态性能欠佳;本文给出的趋近律(4),则综合了二者的优点,稳定性和平稳性都优于二者,并且克服了文献[8]中趋近律切换带来的一系列麻烦。图4和图5是变压缩系数趋近律(10)的仿真情况。本文提出变压缩系数趋近律,较好地解决了采样时刻切换幅度过大的问题,从仿真图像可以看出系统运动的平稳性得到了改善,状态  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  的运动曲线更光滑。当然,由于切换力的幅度受到限制,在远离切换面时,其快速性不如趋近律(1)和(4)。

#### 4 结 语

本文分析了指数趋近律和文献[8]给出的比例

-等速-变速趋近律存在的问题,针对其不足而提出的两个新的滑模趋近律,综合了指数趋近律和变速趋近律二者的优势,保证了系统的原点的稳定性并解决了控制力切换幅度过大的问题,进一步改善了系统运动的动态品质

#### 参考文献(References):

- [1] M ilosavljevic D. General conditions for the existence of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems [J]. *Automatic Remote Control*, 1985, 46(3): 307-314
- [2] Dot Y, Holf R G. Microprocessor based sliding mode controller for dc motor drives[A]. *Presented at the Industrial Application Society Annual Meeting* [C]. Cincinnati, 1980
- [3] Sapturk S Z, I Stefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1987, 32(10): 930-932
- [4] Furuta K. Sliding mode control of a discrete system [J]. *Systems and Control Letters*, 1990, 14(2): 145-152
- [5] 高为炳. 离散时间系统的变结构控制[J]. *自动化学报*, 1995, 21(2): 154-161.  
(Gao W B. Discrete-time variable structure control[J]. *Acta Automatic Sinica*, 1995, 21(2): 154-161.)
- [6] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998
- [7] Moura J T, Olgac N. Robust Lyapunov control with perturbation estimation[J]. *IEE Proc Control Theory Appl*, 1998, 45(3): 307-315.
- [8] 姚琼荃, 宋立忠, 温洪. 离散变结构控制系统的比例-等速-变速控制[J]. *控制与决策*, 2000, 15(3): 329-332.  
(Yao Q H, Song L Z, Wen H. Proportional-constant-variable rate control of discrete-time variable structure systems[J]. *Control and Decision*, 2000, 15(3): 329-332.)

### 第16届中国过程控制学术年会暨第4届全国故障诊断与安全性学术会议征文通知

第16届中国过程控制学术年会暨第4届全国故障诊断与安全性学术会议,将于2005年7月30日至8月4日在济南召开。本次会议由中国自动化学会过程控制专业委员会主办,控制工程编辑部协办,山东大学控制科学与工程学院、山东省自动化学会承办。会议期间将评选张钟俊优秀论文奖

1 征文范围及征文要求: 见会议主页: <http://control.sdu.edu.cn/cpcc2005>

2 论文出版: 所有录用论文将以《控制工程》期刊和《山东大学学报》正刊和增刊的形式发表

3 投稿截止日期: 2005年2月15日; 录用/不录用通知日期: 2005年3月15日; 最终论文截止日期: 2005年4月15日

5 投稿地址: 山东大学南校区控制科学与工程学院过程控制会议秘书处收 邮政编码: 250061

联系人: 柯晶, 刘云霞; 联系电话: 0531-8392614, 0531-8392591; 传真: 0531-8392205

E-mail: [jke@sdu.edu.cn](mailto:jke@sdu.edu.cn) (柯晶), [yunxialiu@126.com](mailto:yunxialiu@126.com) (刘云霞)