文章编号: 1001-0920(2004)11-1282-04

模糊多属性决策的相似接近度解法

吕大刚[1], 王　力[1], 张　鹏[2], 王光远[1]
(1. 哈尔滨工业大学 土木工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150090; 2. 西南石油学院 建筑工程学院, 四川 成都 610500)

摘　要: 首先对模糊集合的 3 种接近度测度, 即海明距离、模糊贴近度和灰色关联度进行讨论, 在此基础上提出了相似接近度的概念, 运用模糊满意度的概念建立了模糊多属性决策的数学模型, 其次将相似接近度的概念应用于该模型, 提出了该模型的一个新的解法; 最后通过数值算例表明, 该方法不但十分有效, 而且物理意义和数学意义明确, 模糊贴近度、灰色关联度和相对接近度解法都是该方法的特例.

关键词: 模糊多属性决策; 相似接近度; 海明距离; 模糊贴近度; 灰色关联度
中图分类号: TU 311. 41, TP183　　**文献标识码**: A

On similar approach degree algorithm for fuzzy multiple attribute decision-making

LV Da-gang[1], *WANG Li*[1], *ZHANG Peng*[2], *WANG Guang-yuan*[1]
(1. School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China; 2. School of Building Engineering, Southwest Petroleum Institute, Chengdu 610500, China. Correspondent: LV Da-gang, E-mail: ludagang@sina.com)

Abstract: Fuzzy multiple attribute decision-making (FMADM) is a problem of multiple criteria decision making (MCDM) whose decision space is discrete considering the fuzzy information. Firstly, three kinds of measures of approach degree between two fuzzy sets are discussed, and then, a new concept named similar approach degree is put forward. A mathematical model of FMADM is built by means of fuzzy satisfaction degree. The concept of similar approach degree is applied in model, and then, a new algorithm for solving the model is proposed which is applied in the selection of the optimal scheme of large-span spatial structures. It is shown by a numerical example that this method is not only very efficient, but also clear both in mathematical meanings and in physical meanings. In fact, the algorithms of fuzzy nearness degree, grey association degree and relative approach degree all are the specific ones of the methodology proposed herein.

Key words: fuzzy multiple attribute decision-making; simdilar approach degree; hamming distance; fuzzy nearness degree; grey association degree

1 引　　言

模糊多属性决策(FMADM)是一种考虑模糊信息和决策空间离散的多准则决策问题[1], 目前已成为国内外的热点研究课题[2~4]. FMADM 问题有多种解法, 文献[5]提出一种相对接近度解法, 并将其应用于大跨空间结构的方案优选; 文献[6]提出一种多目标优化的相似接近度解法. 本文在此基础上, 对相似接近度概念作进一步拓宽, 并将其应用于模糊

收稿日期: 2004-01-01; **修回日期**: 2004-05-08.
基金项目: 国家自然科学基金"九五"重大项目(59895410); 国家自然科学基金资助项目(50378030); 黑龙江省自然科学基金资助项目(E00-01).

作者简介: 吕大刚(1970—), 男, 黑龙江铁力人, 副教授, 从事工程软件设计、结构可靠度等研究; 王光远(1924—), 男, 河南南温人, 中国工程院院士, 教授, 博士生导师, 从事结构动力学、地震工程学等研究.

多属性决策问题的求解

2　相似接近度的定义

在模糊数学中, 模糊集合间的距离通常利用海明距离或模糊贴近度度量 设 A , B 为论域 X 上的两个模糊子集, 其隶属函数分别为 $\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$, 模糊集合 A 和 B 的海明距离定义为

$$d(A, B) = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right| \mathrm{d}x. \qquad (1)$$

模糊贴近度则通常定义为

$$\sigma(A, B) = \frac{1}{2}[A \cdot B + (1 - A \odot B)] = \frac{\sum_u \min[\mu_A(u), \mu_B(u)]}{\sum_u \max[\mu_A(u), \mu_B(u)]}. \qquad (2)$$

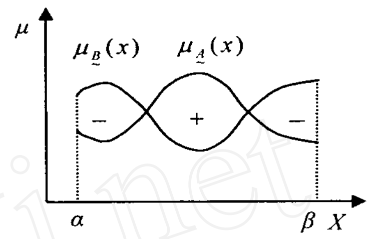
这两种测度都存在缺点: 根据式(1), 可知海明距离表示两隶属函数曲线相交部分所围成的面积, 如图 1(a) 所示 两隶属函数间不论其性质如何, 形状差别多大, 只要总面积相等, 则其海明距离相等, 但在两隶属函数相差很大的情况下, 仍有可能因 d 值相等而得出相近的结论 根据式(2), 可知模糊贴近度只取决于两隶属函数交集的最大值和并集的最小值, 无论函数性质和形状的差别如何, 只要内积和外积相同, 都可得出相等的贴近度, 如图 1(b) 所示 可见, 海明距离和贴近度只能粗略和局部地反映而不能完美地反映两个模糊集在其他方面的差异

模糊集之间的接近程度还可利用灰色数学中的灰色关联度来度量 设 $X_0 = \{x_0(1), x_0(2), \cdots, x_0(m)\}$ 为灰色关联分析中的参考序列(系统特征序列), $X_j = \{x_j(1), x_j(2), \cdots, x_j(m)\}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 为比较序列(相关因素序列), 称非负实数

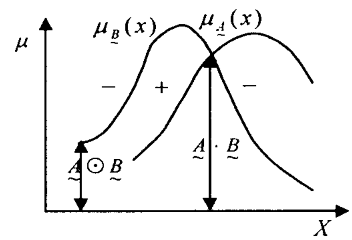
$$\gamma(x_j(i), x_0(i)) = \frac{\min_i \min_j \left| x_j(i) - x_0(i) \right| + \zeta \max_i \max_j \left| x_j(i) - x_0(i) \right|}{\left| x_j(i) - x_0(i) \right| + \zeta \max_i \max_j \left| x_j(i) - x_0(i) \right|} \qquad (3)$$

为灰色关联度 式中: $\min_i \min_j \left| x_j(i) - x_0(i) \right|$ 为两级最小差; $\max_i \max_j \left| x_j(i) - x_0(i) \right|$ 为两级最大差; ζ 为分辨系数, 一般取 $\zeta = 0.5$

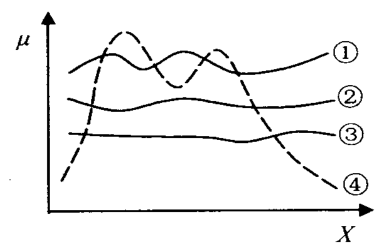
灰色关联度用于态势变化分析, 它根据因素之间发展态势的相似或相异程度来衡量因素间接近的程度 关联性实质上是曲线几何形状的差别, 几何形状越相似, 则变化趋势越接近, 关联程度也越大 如图 1(c) 所示, 曲线 ①, ② 的相似程度大于曲线 ①, ④ 的相似程度, 因此曲线 ①, ② 的关联度大于曲线 ①, ④ 的关联度, 但曲线 ①, ② 的相似程度与曲线 ①, ③ 的基本相同, 得出的关联度也应是相近的 但曲线 ② 比 ③ 距 ① 更近些, 可见仅利用关联度并不能完全反映模糊集之间的接近程度



(a)　海明距离



(b)　模糊贴近度



(c)　灰色关联度

图 1　接近度的 3 种测度

从上面的分析可以看出, 虽然海明距离和模糊贴近度在确定两曲线之间相似接近程度时存在缺陷, 但它们在某种程度上却反映了曲线间的位置, 而灰色关联度又恰好可以反映曲线几何形状的相似性, 因此可将它们有机地结合起来, 构造一个“相似接近度”指标来综合反映曲线间的位置接近程度和几何形状相似程度

海明距离和贴近度共同决定曲线的位置接近程度, 因此可将二者无量纲化后合并, 得到位置接近度

$$T_{1,j} = \alpha_1 \frac{1 - d(A_j, B)}{\max_j [1 - d(A_j, B)]} + \alpha_2 \frac{\sigma(A_j, B)}{\max_i \sigma(A_j, B)}. \qquad (4)$$

式中 α_1 和 α_2 为权重, 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

灰色关联度决定曲线的几何形状相似程度, 因此可将其无量纲化作为形状相似度

$$T_{2j} = \frac{\gamma_j}{\max\limits_j \gamma_j}, \tag{5}$$

再将位置接近度 T_{1j} 和形状相似度 T_{2j} 合并为一个综合指标 T_j, 称为相似接近度

$$T_j = \beta_1 T_{1j} + \beta_2 T_{2j}. \tag{6}$$

式中 β_1 和 β_2 为权重, 满足 $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

在式(4) 和(6) 中, 权重系数 α_1 和 α_2 以及 β_1 和 β_2 可根据曲线的位置和几何形状通过参数的敏感性分析确定. 若认为海明距离和贴近度对于曲线位置接近程度的贡献同等重要, 则可令 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$; 同理, 若认为位置接近度 T_{1j} 和形状相似度 T_{2j} 在 T_j 中具有同等重要地位, 则可令 $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$.

3 模糊多属性决策模型

多属性决策模型通常可表示为

$$\mathrm{M}\ 1: \max_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(x). \tag{7}$$

式中: $\mathrm{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 为离散的候选方案集, x 为候选方案(决策变量), $\mathrm{F}(x) = [f_1, f_2, \cdots, f_m]^{\mathrm{T}}$ 为方案 x 的属性向量函数, 通常由 m 个单属性函数 $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 组成, 可用向量表示为

$$\mathrm{F}(x) = [f_1(x), f_2(x), \cdots, f_i(x), \cdots, f_m(x)]^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

属性集 F 中通常包含两类属性: 越大越优型(或称效益型) 和越小越优型(或称成本型). 为此, 约定 $F_1, F_2 \in \mathrm{F}$ 分别为其中的效益型属性子集和成本型属性子集. 假定 $F_1 \cup F_2 = \mathrm{F}$, 且 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

模糊多属性决策模型可表示为

$$\mathrm{M}\ 2: \max_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(x) = [v_1(x), v_2(x), \cdots, v_i(x), \cdots, v_m(x)]^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

式中 $v_i(x)$ 为决策者对方案 x 关于属性 f_i 并考虑权重 w_i 的加权模糊满意度向量, 其元素按下式确定:

$$v_{ij} = w_i \cdot s_{ij}. \tag{10}$$

其中 s_{ij} 为决策者对方案 x_j 关于属性 f_i 的模糊满意度, 对于效益型属性, 有

$$s_{ij} = S_{f_i}(x_j) = \frac{u_{ij} - \min\limits_i u_{ij}}{\max\limits_i u_{ij} - \min\limits_i u_{ij}}; \tag{11}$$

对于成本型属性, 有

$$s_{ij} = S_{f_i}(x_j) = \frac{\max\limits_i u_{ij} - u_{ij}}{\max\limits_i u_{ij} - \min\limits_i u_{ij}}. \tag{12}$$

式中 u_{ij} 为方案 x_j 关于属性 f_i 的属性值 $f_i(x_j)$, 即 $u_{ij} = f_i(x_j)$. 显然, 所有的元素 s_{ij} 满足 $0 \leq s_{ij} \leq 1$.

4 模糊多属性决策的相似接近度解法

对于模糊多属性决策模型 M 2, 理想方案是一设想的最优解, 其各属性值均达到各备选方案中的最优值, 可记为 x^*, 相应的理想点

$$\mathrm{F}^* = [v_1^*, v_2^*, \cdots, v_i^*, \cdots, v_m^*]^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

式中 v_i^* 为属性 f_i 的最大加权模糊满意度, 可根据下式确定:

$$v_i^* = \max_j v_{ij} = \max[v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{ij}, \cdots, v_{in}]. \tag{14}$$

对于模糊多属性决策问题 M 2, 可将方案 x_j 的属性向量 $\mathrm{F}(x_j)$ 和理想解 x^* 的属性向量 F^* 均视为模糊满意集, 则方案 x_j 至理想解 x^* 的海明距离为

$$d_j = d(\mathrm{F}(x_j), \mathrm{F}^*) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left| v_{ij} - v_i^* \right|, \tag{15}$$

而方案 x_j 至理想解 x^* 的模糊贴近度 σ_j 可按式(2) 计算.

对于模糊多属性决策问题 M 2, 也可将方案 x_j 的属性向量 $\mathrm{F}(x_j)$ 和理想解 x^* 的属性向量 F^* 分别视为灰色关联分析中的比较序列和参考序列, 则方案 x_j 至理想解 x^* 的灰色关联度 γ_j 可按式(3) 计算.

根据相似接近度的定义, 方案 x_j 至理想解 x^* 的相似接近度为

$$T_j = \beta_1 \frac{\gamma_j}{\max\limits_j \gamma_j} + \beta_2 \left(\alpha_1 \frac{1 - d_j}{\max\limits_j (1 - d_j)} + \alpha_2 \frac{\sigma_j}{\max\limits_j \sigma_j} \right), \ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{16}$$

下面给出模糊多属性决策问题的基于相似接近度的择近原则:

若

$$T_j = \max\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}, \tag{17}$$

则称 x_j 与 x^* 在相似接近度意义下最接近, 由此得到偏好最优解 $x_p^* = x_j$.

基于相似接近度的模糊多属性决策解法步骤如下:

1) 按式(9) 确定模糊多属性决策模型;

2) 按式(13) 确定理想点 F^*;

3) 按式(15) 计算每个方案 x_j 至理想解 x^* 的海明距离 d_j;

4) 按式(2) 计算每个方案 x_j 至理想解 x^* 的模糊贴近度 σ_j;

5) 按式(3) 计算每个方案 x_j 至理想解 x^* 的灰色关联度 γ_j;

6) 按式(16) 计算每个方案 x_j 至理想解 x^* 的相似接近度 T_j;

7) 按式(17) 确定偏好最优解 x_p^*.

5　算例分析与比较

已知大跨空间结构型式的备选方案集为: $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ = [平板网架结构, 网壳结构, 悬索结构, 薄膜结构]^T; 影响大跨空间结构选型的属性集为: $F = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T$ = [美学功能, 施工可行性, 经济性能, 受力性能]^T; 经过专家调查, 属性的权重向量定为: $W = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T = [0.5, 0.1, 0.2, 0.2]^T$; 经过大跨空间结构智能选型方案评价系统的运行, 得到评价矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0.1303 & 0.3840 & 0.1645 & 0.1653 \\ 0.3000 & 0.0250 & 0.3000 & 0.2500 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0.7000 & 0.8000 \\ 0.9220 & 0.0680 & 0.7620 & 0.2310 \end{bmatrix}.$$

分析大跨空间结构选型的属性集, 可知 f_2 = 施工可行性和 f_3 = 经济性能为成本型属性; f_1 = 美学功能和 f_4 = 受力性能为效益型属性. 假设 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$. 按本文提出的方法计算每个方案 x_j 至理想解 x^* 的相似接近度 T_j, 得到相似接近度向量: $T = [0.8926, 1.0000, 0.8136, 0.6944]$. 根据各方案 x_j 至理想解 x^* 的相似接近度 T_j, 按式(17)的择近原则, 可得到 4 种方案的排序为: $x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$. 由此可知偏好最优解为 x_2, 即网壳结构为偏好最优方案, 其综合性能最优; 平板网架结构和悬索结构为次优方案, 它们至理想解 x^* 的相对接近度较为相近; 最劣方案为薄膜结构, 它和理想解 x^* 的相对接近度远小于其他 3 种方案.

表 1　数值计算比较表

方　法	测　度	决策变量				方案排序
		x_1	x_2	x_3	x_4	
相似接近度解法	相似接近度	0.8926	1.0000	0.8136	0.6944	$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$
模糊贴近度解法	模糊贴近度	0.4000	0.6000	0.3499	0.2053	$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$
灰色关联度解法	灰色关联度	0.7619	0.7778	0.6769	0.6008	$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$
相对接近度解法	相对接近度	0.3568	0.6432	0.3199	0.1907	$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$

为了进行比较, 分别将基于模糊贴近度解法和灰色关联度解法的计算结果分别列入表 1 中的第 3, 4 列, 同时将基于文献[5]的相对接近度方法的计算结果列入表 1 中的第 5 列, 发现 4 种方法所得到的结论是一致的, 说明本文方法是有效的. 与其他 3 种解法相比, 本文解法物理意义和数学意义更为明确. 文献[3]提出的相对接近度解法本质上属于海明距离解法, 因此可将模糊贴近度解法、灰色关联度解法和相对略和接近度解法均看成是本文方法的特例.

6　结　　论

海明距离、模糊贴近度和灰色关联度均不能独立完全地反映模糊集之间的接近程度以及它们之间的差异, 只能粗略和、局部地反映; 而相似接近度则可综合反映模糊集隶属函数之间的位置接近程度和几何形状相似程度; 模糊多属性决策的相似接近度解法可真实地反映决策空间中各方案与理想方案的模糊属性值之间的接近程度, 因此该方法不仅十分有效, 而且物理意义和数学意义明确. 相对接似度本质上属于一种海明距离, 因此相对接近度解法、模糊贴近度解法和灰色关联度解法都属于相似接近度解法的特例.

参考文献(References):

[1] Chen S J, Hwang C L. Fuzzy multiple attribute decision making: Methods and applications[M]. New York: Springer, 1992.

[2] Rita Almeida Ribeiro. Fuzzy multiple attribute decision making: A review and new preference elicitation techniques[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(2): 155-181.

[3] Chen Chie-bein, Cerry M Klein. An efficient approach to solving fuzzy MADM problems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 88(1): 51-67.

[4] Fan Zhi-ping, Ma Jian, Zhang Quan. An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 131(1): 101-106.

[5] 王力, 吕大刚, 张世海, 等. 基于相对接近度的结构选型模糊多属性决策方法[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 2001, 34(4): 1-5.
(Wang L, LV D G, Zhang S H. Fuzzy multiple attribute decision making method based on relative approach degree for structural form selection[J]. *J of Harbin University of Architecture and Civil Engineering*, 2001, 34(4): 1-5.)

[6] 张鹏, 肖芳淳. 用相似接近度求多目标优化非劣解中最优解[J]. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(2): 193-201.
(Zhang P, Xiao F Z. Finding the optimum solutions to multiple objective optimization problems via similar approach degree[J]. *Computational Structural Mechanics and Its Application*, 1992, 9(2): 193-201.)