第 19 卷 第 11 期 控 制 与 决 策 2004 年 11 月
Vol 19 No. 11 Control and Decision Nov. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)11-1312-03

# 反馈线性的非线性系统的分步输出变结构控制

潘海鹏, 戴文战
(浙江工程学院 自动化系, 浙江 杭州 310033)

**摘 要**: 针对一类存在参数不确定性的反馈线性的非线性动态系统, 通过构造两个滑模流形, 即误差跟踪的线性函数和中间控制变量与其实际值之间的误差, 给出了输出跟踪控制律. 并设计一个变结构控制律使闭环系统的轨迹渐近趋于滑模区, 对于所有滑模区上的轨迹, 跟踪误差趋于零.

**关键词**: 非线性系统; 分步变结构控制; 中间控制变量
**中图分类号**: TP13 **文献标识码**: A

# Staged output variable structure control of feedback linearizable nonlinear system

*PAN Hai-peng, DAI Wen-zhan*
(Department of Antomatic Control, Zhejiang Institute of Science and Technology, Hangzhou 310033, China. Correspondent: PAN Hai-peng, E-mail: pan@zist. edu. cn)

**Abstract**: According to a class of output trajectory control of nonlinear dynamical system, an output variable feedback in the presence of parameter uncertainty is concerned. For the derivation of a control law, two staged sliding-mode surfaces are chosen. The first one is a linear function of the tracking error, which is used to obtain the desired "middle control." The second one is the error between the desired "middle control" variable and its actual value. A variable structure control (VSC) law is derived such that the trajectory asymptotically of the closed-loop system converges to the bounded field of sliding-mode. For any trajectory evolving on this surface, the tracking error tends to zero.

**Key words**: nonlinear systems; staged variable structure control(VSC); middle control variable

## 1 引 言

对于非线性变结构控制, 虽然非常依赖于原系统结构, 但其变结构问题已基本得到解决, 因此其发展主要依赖于一般非线性系统理论. 自 1989 年 Isidory 等人提出了基于微分几何理论的非线性反馈控制[1,2], 对非线性变结构控制的发展起到了极大的促进作用, 如在不确定非线性系统的控制器设计中, 虽然利用微分几何方法的非线性鲁棒控制[3]与自适应控制[4]等理论均已取得了一些成果, 但它们仍存在一定的缺陷, 如条件过于苛刻、计算量大等. 而变结构控制却为非线性系统的控制器设计提供了一种新方法[5,6], 且具有强鲁棒性[7]. 由于非线性系统分析的复杂性及建立非线性控制系统理论存在很大困难, 人们往往绕过分析而直接研究某一类具有非线性结构的控制系统的综合问题. 鉴于此, 本文针对一类存在参数不确定性的反馈线性的非线性动态系统, 将变结构控制与非线性分步设计方法[8]有机结合, 给出了一种新的分步变结构控制策略, 并通过

**收稿日期**: 2003-12-24; **修回日期**: 2004-03-29.
**基金项目**: 浙江省自然科学基金资助项目(603194).
**作者简介**: 潘海鹏(1965—), 男, 河南濮阳人, 副教授, 硕士, 从事非线性控制、智能控制等研究; 戴文战(1958—), 男, 浙江台州人, 教授, 博士生导师, 从事复杂过程建模、非线性控制的研究.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对系统的稳定性分析, 证明了控制算法的可行性

## 2　控制对象的形式

考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x, w) + g(x, w_u)u,$$
$$y = c(x). \tag{1}$$

其中: $x \in M \subset R^n$ 为状态变量; $y \in R^m$ 为输出变量; $u \in U \subset R^m$ 为控制律; $(w, w_u) \in W \times W_u \subset R^{k_1} \times R^{k_2}$ 为未知参数, $w = (w_1^T, w_2^T)^T \in W \subset R^{k_{11}}$; 假定 $f(x, w)$ 和 $c(x) = [c_1(x), \cdots, c_m(x)]^T$ 在 $M$ 上可多次连续微分, $g(x, w_u)$ 关于 $x$ 可连续微分, 且函数 $f$ 和 $g$ 关于未知参数是线性的

假定系统 (1) 输入输出是线性的, 置 $y_i$ 的相关度为 $r_i + 1$, 则 $y_i(i = 1, \cdots, m)$ 的微分为

$$y_i^j = L_f^j c_i, j = 1, \cdots, r_i;$$
$$y_i^{r_i+1} = L_f^{r_i+1} c_i + (L_g L_f^{r_i} c_i)u. \tag{2}$$

对于带有不确定参数的系统(1), 作如下假设:

**假设 1**　存在变量 $x_1 \in R^{n-m}$ 和由状态变量 $x$ 确定的 $w \in R^m$, 函数 $\varphi_{i0}(x_1)$, 向量 $\Psi_0(x)$, 行向量 $\varphi_i(x_1)$ 和 $B_i(x_1)$, 矩阵 $\Psi_1(x)$ 和 $D(x, w_u)$, 使得

1) $L_f^k c_i (k = 0, 1, \cdots, r_i - 1)$ 仅为 $x_1$ 的函数而与参变量 $w$ 无关;

2) $L_g \varphi_{i0} = 0, L_g(\varphi_i)^T = 0, L_g(B_i)^T = 0$;

3) $L_f^{r_i} c_i = \varphi_{i0}(x_1) + \varphi_i(x_1)w_1 + B_i(x_1)w$;

4) $\dot{\omega} = \Psi_0(x) + \Psi_1(x)w_2 + D(x, w_u)u$.

定义

$$\Phi_0(x_1) = (\varphi_{10}, \cdots, \varphi_{m0})^T,$$
$$\Phi(x_1) = (\varphi_1^T, \cdots, \varphi_m^T)^T,$$
$$B(x_1) = (B_1^T(x_1), \cdots, B_m^T(x_1))^T. \tag{3}$$

**注 1**　假设 1 保证系统(1) 可转化为分步形式

**假设 2**　$m \times m$ 矩阵 $D(x, w_u)$ 和 $B(x_1)$ 可逆

根据假设, 很容易看出系统(1) 是输入输出反馈线性的 而对于输入输出反馈线性系统, 定义局域微分流形

$$P: M \to M^1,$$
$$p(x) = [L_f^0 c_1, \cdots, L_f^{r_1-1} c_1, \cdots, L_f^0 c_m, \cdots, L_f^{r_m-1} c_m, \omega^T, \gamma^T(x)]^T \in R^n. \tag{4}$$

其中: 新坐标变量 $\gamma \in R^{n_0}, n_0 = n - \sum_{i=1}^{m} r_i - m$.

定义新的状态变量 $\xi = [z^T, \omega^T, \eta^T]^T = p(x)$, 其中 $z = (z_1^T, \cdots, z_m^T)$, $z_i = (L_f^0 c_i, \cdots, L_f^{r_i-1} c_i)^T$ 及 $\eta = \gamma$, 得到系统(1) 新的表示形式:

$$\dot{z}_{ik} = z_{i,k+1}, k = 1, \cdots, r_i - 1;$$
$$\dot{z}_{ir_i} = \varphi_{i0}(x_1) + \varphi_i(x_1)w_1 + B_i(x_1)w;$$
$$\dot{\omega} = \Psi_0(x) + \Psi_1(x)w_2 + D(x, w_u)u;$$
$$\dot{\eta} = q_0(\xi) + q_1(\xi)w + q_2(\xi, w_u)u. \tag{5}$$

其中 $x = p^{-1}(\xi)$, $q_i(\xi)$ 为相应的矩阵

对于跟踪轨迹, 光滑的参考轨迹 $y_c(t)$ 为

$$\Pi_i \frac{d[y_{c_i}(t) - y_i^*]}{dt} = 0, i = 1, \cdots, m. \tag{6}$$

其中: 通过选择合适的参数 $p_{ik}$, 使 $\Pi_i(\lambda) = \sum_{j=0}^{r_i+1} p_{ij}\lambda^j$ 为一个 Hurwitz 多项式, $y^*$ 为所要求 $y$ 的最终值 因在控制律中需要用到 $y_{c_i}^{r_i+1}$, 故选择系统(5) 的阶数为 $r_i + 2$

为得到一个分步变结构控制律 $u(x, t)$, 使得即使在参变量 $(w, w_u)$ 存在不确定性时, 闭环系统的 $y(t)$ 仍跟踪 $y_c(t) = [y_{c_1}, \cdots, y_{c_m}]$, 即当 $t \to \infty$ 时, $e(t) = [e_1, \cdots, e_m]^T = y(t) - y_c(t)$ 趋于零, 需要以下假设:

**假设 3**　参数 $(w, w_u)$ 是不确定的, 但它们只是在一个固定范围内变化

$$w_1 = \bar{w}_1 + \tilde{w}_1, \|w_1\| < \rho_1;$$
$$w_2 = \bar{w}_2 + \tilde{w}_2, \|w_2\| < \rho_2. \tag{7}$$

**假设 4**　存在一个正定函数 $\epsilon(x)$, 使得矩阵 $D(x, w_u)$ 具有如下形式:

$$\|\bar{D}^{-1} D^*\| \le \epsilon(x),$$
$$D(x, w_u) = \bar{D}(x, \bar{w}_u) + D^*(x, \tilde{w}_u),$$
$$w_u = \bar{w}_u + \tilde{w}_u. \tag{8}$$

## 3　分步变结构控制

1) 定义第 1 个滑模流形为: $s = (s_1, \cdots, s_m)^T$, $i = 1, \cdots, m$, 则有

$$s_i = e_i^{r_i-1} + k_{i,r_i-1} e_i^{r_i-2} + \cdots + k_{i,1} e_i + k_{i,0} x_{si},$$
$$e_i = \dot{x}_{si}, \tag{9}$$

且选择 $k_{i,j}$ 为正常数, 使得多项式

$$\mu_i(\lambda) = \lambda^{r_i} + k_{i,r_i-1}\lambda^{r_i-1} + \cdots + k_{i,1}\lambda + k_{i0} \tag{10}$$

是 Hurwitz 的

利用假设 1 和假设 2, 将式(9) 重写为

$$\dot{s}_i = \varphi_i(x_1)w_1 + B_i(x_1)w + \left[\varphi_{i0}(x_1) - y_{c_i}^{r_i} + k_{i,j}\sum_{j=0}^{r_i-1}(L_f^j c_i - y_{c_i}^j)\right] = \varphi_i(x_1)w_1 + B_i(x_1)w + v_i(x_1, \cdots, x_c). \tag{11}$$

其中: $v_i(x_1, \cdots, x_c)$ 是式(11) 方括号中的项, 且 $x_c = [y_{c_1}, \cdots, y_{c_1}^{r_i+2}, \cdots, y_{c_m}, \cdots, y_{c_m}^{r_i+2}] \in R^{m(r_i+2)}$ 为式(5) 中的状态变量

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

分步变结构控制器设计的第 1 步是定义一个“中间控制变量 $\omega_d$”, 使得 $y$ 与 $y_c$ 间的误差趋于零. 利用式(11), 有

$$\mathring{s} = \Phi(x_1)w_1 + B(x_1)(\omega_d + \tilde{\omega}) + v(x_1, x_c). \quad (12)$$

其中: $v = [v_1, \cdots, v_m]^{\mathrm{T}}$, $\omega_d = \omega - \tilde{\omega}$.

考虑第 1 步的 Lyapunov 函数为

$$V_1 = (1/2)s^{\mathrm{T}}s. \quad (13)$$

将 $V_1$ 沿系统(5) 的轨迹微分, 并根据式(12) 得

$$\mathring{V}_1 = s^{\mathrm{T}}[\Phi(x_1)w_1 + B(x_1)(\omega_d + \tilde{\omega}) + v]. \quad (14)$$

选择 $\omega_d$ 为

$$\omega_d = B^{-1}(x_1)[-c_{11}s - \Phi(x_1)\overline{w}_1 - v - r_1 \mathrm{sgn}\, s],$$
$$r_1 = \|\Phi(x_1)\|\rho_1. \quad (15)$$

其中

$$\mathrm{sgn}\, s = \begin{cases} 1, s > 0 \\ 0, s = 0 \\ -1, s < 0 \end{cases}$$

是连续可微的信号函数. 它使得 $\omega_d$ 的微分在任何状态下都存在, 且 $c_{11}$ 为正常数. 合并式(14) 和(15), 有

$$\mathring{V}_1 = -c_{11}s^{\mathrm{T}}s + \tilde{w}_1\Phi(x_1)s - \rho_1\|\Phi(x_1)\| \cdot \|s\| + B(x_1)\tilde{\omega}. \quad (16)$$

2) 定义第 2 个滑模流形为

$$\sigma = \tilde{\omega} = \omega - \omega_d. \quad (17)$$

由式(15), 有

$$\mathring{\omega}_d = L_f\omega_d + L_g\omega_d u + \left(\frac{\partial\omega_d}{\partial x_c}\right)\mathring{x}_c + \left(\frac{\partial\omega_d}{\partial s}\right)\mathring{s}. \quad (18)$$

考虑到假设 1 和式(15) 中定义的 $\omega_d$, 有 $L_g\omega_d = 0$. 注意到 $y_{c_i}$ 在 $v_i$ 中的最高阶微分为 $r_i$, 且 $L_f\omega_d$ 中的参数是线性的, 则存在矩阵 $\Psi_{0d}, \Psi_{1d}, \Psi_{2d}$ 使得

$$\mathring{\omega}_d = \Psi_{0d}(x, s, x_c, \overline{w}_1) - \Psi_{1d}(x, x_c, \overline{w}_1)w_1 + \Psi_{2d}(x, x_c, \overline{w}_1)w_2,$$

因而

$$\dot{\tilde{\omega}} = (\Psi_0 - \Psi_{0d}) + \Psi_{1d}w_1 + (\Psi_1 + \Psi_{2d})w_2 + D(x, w_u)u = \Psi_{0a}(x, s, x_c, \overline{w}) + \Psi_{1a}\tilde{w}_1 + \Psi_{2a}\tilde{w}_2 + D(x, w_u)u. \quad (19)$$

其中

$$\Psi_{0a} = \Psi_0 - \Psi_{od} + \Psi_{1d}\overline{w}_1 + \Psi_{2a}\overline{w}_2,$$
$$\Psi_{1a} = \Psi_{1d}, \Psi_{2a} = \Psi_1 - \Psi_{2d}.$$

## 4 稳定性分析

对于系统(12) 和(19), 考察 Lyapunov 函数

$$V_2 = \frac{1}{2}(s^{\mathrm{T}}s + \sigma^{\mathrm{T}}\sigma). \quad (20)$$

由式(16) 和(19), 得

$$\mathring{V}_2 = -c_{11}s^{\mathrm{T}}s + \tilde{w}_1^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}s - r_1\|s\| + \sigma^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}s + \Psi_{0\alpha} + \Psi_{1a}\tilde{w}_1 + \Psi_{2a}\tilde{w}_2 + Du). \quad (21)$$

考虑假设 4, 并选择控制律

$$u = \overline{D}^{-1}(-B^{\mathrm{T}}s - \Psi_{0a} - c_{22}\sigma - (\|\Psi_{2a}^{\mathrm{T}}\|\rho_2 + \|\Psi_{1a}^{\mathrm{T}}\|\rho_1)\,\mathrm{sgn}\,\sigma) - \frac{1}{1-\epsilon(x)}\overline{D}^{-1}\frac{\xi(x, s, \sigma)}{1-\epsilon(x)}\mathrm{sgn}\,\sigma \quad (22)$$

其中 $c_{22}$ 为正常数, 且 $\|(-B^{\mathrm{T}}s - \Psi_{0a} - c_{22}\sigma) \cdot D^*\| < \xi(x, s, \sigma)$.

将式(22) 代入(21), 最终得到

$$\mathring{V}_2 \leq -c_{11}s^{\mathrm{T}}s - c_{22}\sigma^{\mathrm{T}}\sigma \leq 0, \quad (23)$$

且 $\mathring{V}_2 = 0$ 当且仅当 $s = 0, \sigma = 0$, 即 $s, \sigma$ 趋于零. 同时, 根据式(9) 和(10), $e_i = \mathring{x}_{si}$, $\mu_i(\lambda)$ 是一个 Hurwitz 多项式, 故跟踪误差 $e_i(i = 1, \cdots, m)$ 也将趋于零.

## 5 结 论

本文讨论了反馈线性的非线性系统的分步变结构控制设计, 给出了一种分步变结构控制律. 在第 1 个滑模流形中, 对所有其上的轨迹, 跟踪误差趋于零; 第 2 个滑模流形则为“中间控制变量”值与它们的期望值之间的误差. 通过对系统的稳定性分析, 证明该算法是可行的.

## 参考文献(References):


[1] A Isidory. *Nonlinear Control System* [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1995. 126-151.

[2] Khalil H K. *Nonlinear System* [M]. London: Prentic Hall, 1996. 58-76.

[3] Zhou K. *Robust and Optimal Control* [M]. London: Prentic Hall, 1997. 138-156.

[4] Krstic M, Kanellakopoullos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: John Willey & Suns, 1995. 69-82.

[5] Yure B Shtessel, James M Buffington. Continuous sliding mode control[A]. *Proc of ACC'99*[C]. San Diego, 1999. 562-563.

[6] Decarlo R A, S H Zak, Matthews. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial [J]. *IEEE Proc*, 1998, 76(3): 212-232.

[7] Utkin V I. *Sliding Modes in Control and Optimization* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[8] Chu Jian, Su Hongye. A controller design method for nonlinear systems via a staged transformation technique [J]. *Int J System Sci*, 1995, 26(11): 2187-2202.


© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net