第 19 卷 第 11 期 控 制 与 决 策 2004 年 11 月
Vol. 19 No. 11 Control and Decision Nov. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)11-1315-03

# 病态线性系统的控制模型设计及其迭代算法

伍俊良[1], 刘 飞[2]
(1. 重庆大学 理学院, 重庆 400044; 2. 重庆大学 制造工程研究所, 重庆 400044)

**摘 要**: 建立一种解决病态线性系统的控制模型, 得到求解病态线性系统近似解的一种新算法. 该算法为病态线性系统利用计算机迭代求解提供了直接的算法依据, 同时也适合于常态线性系统近似解的计算. 最后将新算法与传统的 Gauss-Seidel 算法进行比较.

**关键词**: 病态系统; 控制模型; 迭代算法; 近似解
**中图分类号**: TP0231 **文献标识码**: A

# Control model of ill-linear system and it iterative solution method

*WU Jun-liang*[1], *LIU Fei*[2]
(1. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. Institute of Manufacturing Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China. Correspondent: WU Jun-liang, E-mail: junliangwu@cta.cq.cn)

**Abstract**: A model for solving the ill-condition linear system is proposed. A new method be obtained the approximated solution of the ill-condition linear system is presented. The proposed method gives a algorithm for computer program procedure and the algorithm is also suit to solve the normal linear systems. The results are compared with tradition Gauss-Seidel method.

**Key words**: ill-condition system; control model; iterative algorithm; approximate solution

## 1 引 言

在解决计算力学和工程物理学问题时, 即使是非线性问题, 通常也通过线性化方法将其转化为一个线性系统加以解决. 线性系统包括常态线性系统和非常态线性系统. 所谓常态系统是指可按常规线性代数理论或线性系统控制理论加以解决的系统, 其一般形式为 $AX = b$. 在常态情况下, 线性系统问题的解决非常简单容易.

但在许多工程物理与力学问题中, 人们经常会遇到非常态的线性系统, 即病态线性系统问题. 文献[1]在研究 CN2 型工业包缝机的导杆端点运动轨线由曲线向直线逼近的过程中, 遇到一个具体的病态系统, 并利用奇摄动线性方程组对它进行求解.

对于一个病态系统 $AX = b$, 其病态特征一般为: $A$ 的谱条件数很高, 即 $A^{-1}$ 的元素出现非常大的情况, 若按常态线性系统方法求得系统的解为 $X = A^{-1}b$, 但因系统出现病态状态, $b$ 中元素的微小变化将导致 $X$ 的极大偏差, 系统解的准确性和稳定性难以保证, 甚至一些系统的求解变得非常困难. 如何求得系统的稳定解是一个值得注意的问题.

本文设计了病态线性系统的一个约束极值目标函数, 建立了系统近似解的一种控制模型. 文中利用

**收稿日期**: 2004-01-05; **修回日期**: 2004-03-23.
**基金项目**: 国家 863 计划基金资助项目(202AA414080); 重庆大学骨干教师基金资助项目.
**作者简介**: 伍俊良(1958—), 男, 四川岳池人, 副教授, 博士, 从事数值算法分析、应用系统开发等研究; 刘飞(1948—), 男, 四川内江人, 教授, 博士生导师, 从事制造业信息化推进技术研究.

内积范数的性质, 分析了求系统解的新算法原理, 证明了病态系统近似解存在的唯一性; 给出了求解线性系统近似解的一种新的迭代算法, 证明了迭代解的收敛性, 并将新算法与传统的算法进行比较. 该算法也适合于常态线性系统近似解的计算机程序处理.

## 2 病态系统的控制模型构造与解的逼近原理

在病态线性系统 $AX = b$ 中, 希望得到一个近似解, 假设系统解的期望值是 $C(c_1, c_2, \cdots, c_N)$ (并非精确的解), 则要求系统解 $X$ 不断地逼近 $C$, 且同时近似满足 $AX = b$. 因此本文给出如下性能准则(目标函数):

$$F(X, b, C, \lambda) = (AX - b, AX - b) + \lambda(X - C, X - C). \tag{1}$$

其中 $0 < \lambda < 1$. 注意到式(1) 右边两项为内积, 是非负的, 若满足系统最优近似解的要求, 则必须极小化 $F$, 即可构造如下控制模型:

$$\begin{aligned} &\min F(X, b, C, \lambda), \\ &\text{s.t. } AX = b, Y = X. \end{aligned} \tag{2}$$

即

$$\begin{aligned} &\min [(AX - b, AX - b) + \\ &\quad \lambda(X - C, X - C)], \\ &\text{s.t. } AX = b, Y = X. \end{aligned} \tag{3}$$

其中: $A$ 为 $N \times N$ 阶方阵, $b \in R^N$, $X \in R^N$, $0 < \lambda < 1$. 注意到在 $F$ 极小化的过程中, 由于右边的两个内积是非负的, 从而必有 $AX$ 逼近 $b$.

## 3 病态线性系统近似解的显式

控制模型(3) 本质上是对约束最小二乘法的一种扩张[3,4], 但本文并不采用文献[3,4] 中广义奇异值算法, 也不采用文献[1] 的奇异摄动方法, 而是给出一种新的迭代求解算法. 为此首先证明如下两个定理.

**定理 1**(病态线性系统近似解的存在唯一性定理) 在系统控制模型(3) 中, 系统模型极小解的显式为

$$\begin{aligned} X = {} & \lambda(\lambda I + A'A)^{-1}C + \\ & (\lambda I + A'A)^{-1}A'b, \end{aligned} \tag{4}$$

当 $\lambda \to 0$ 时, 显式解近似满足 $AX = b$.

**证明** 事实上, 由内积范数的性质, 控制模型(3) 的目标函数 $F$ 可写成

$$\begin{aligned} F(X, b, C, \lambda) = {} & \left(\sum_{i=1}^{N} a_{1i}x_i - b_1\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} a_{2i}x_i - b_2\right)^2 + \\ & \cdots + \left(\sum_{i=1}^{N} a_{Ni}x_i - b_N\right)^2 + \lambda(x_1 - c_1)^2 + \\ & \lambda(x_2 - c_2)^2 + \cdots + \lambda(x_N - c_N)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

由于目标函数 $F$ 是一个非负可导的函数, 它必定取得驻值和相应的极值.

式(5) 采用驻值方法求 $\partial F / \partial x_i$, 并令其偏导数为零, 可得一个规范方程组

$$\begin{bmatrix} \lambda + \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i1}^2 & \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i1}a_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i1}a_{iN} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i2}a_{i1} & \lambda + \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i2}^2 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i2}a_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{N} a_{iN}a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{N} a_{iN}a_{i2} & \cdots & \lambda + \sum\limits_{i=1}^{N} a_{iN}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda c_1 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i1}b_i \\ \lambda c_2 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i2}b_i \\ \vdots \\ \lambda c_N + \sum\limits_{i=1}^{N} a_{iN}b_i \end{bmatrix}. \tag{6}$$

式(6) 可缩写为

$$(\lambda I + A'A)X = \lambda C + A'b.$$

因为 $\lambda I + A'A$ 为正定对称矩阵, 所以 $(\lambda I + A'A)^{-1}$ 是存在的. 故

$$X = \lambda(\lambda I + A'A)^{-1}C + (\lambda I + A'A)^{-1}A'b.$$

显然, 当 $\lambda \to 0$ 时, $X \to (A'A)^{-1}A'b = A^{-1}b$. □

定理 1 说明, 无论初值 $C$ 取何值, 按式(2) 或式(3) 构造的目标约束问题, 必定存在其唯一近似解.

**定理 2**(病态系统解的迭代与收敛性) 对于控制系统(2) 或(3), 任意给定系统状态的初始值 $C(c_1, c_2, \cdots, c_N)$, 极小化 $F$ 得到 $X_1$, 以 $X_1$ 代替 $C(c_1, c_2, \cdots, c_N)$ 至 $F$, 再极小化 $F$ 得到 $X_2$. 重复进行此过程可得向量序列 $\{X_k, k = 1, 2, \cdots\}$, 则 $\{X_k\}$ 必收敛于线性系统 $AX = b$ 的解.

**证明** 由定理 1 有

$$\begin{aligned} &(\lambda I + A'A)X_1 = A'b + \lambda C, \\ &(\lambda I + A'A)X_2 = A'b + \lambda X_1, \\ &(\lambda I + A'A)X_3 = A'b + \lambda X_2, \\ &\qquad \vdots \\ &(\lambda I + A'A)X_k = A'b + \lambda X_{k-1}. \end{aligned}$$

则可推出

$X_k =$

$$(A'A + \lambda I)^{-1}[E + \lambda(A'A + \lambda I)^{-1}A'b + \lambda^2(A'A + \lambda I)^{-2}A'b + \cdots + \lambda^k(A'A + \lambda I)^{-k}C] = \{(A'A + \lambda I)^{-1}[E + \lambda(A'A + \lambda I)^{-1}A'b + \lambda^2(A'A + \lambda I)^{-2}A'b + \cdots]\} + (A'A + \lambda I)^{-k}\lambda^k(A'A + \lambda I)^{-k}C. \tag{7}$$

因为 $0 < \lambda < 1$, 所以当 $k \to \infty$ 时, 式(7) 第 1 个括号内的矩阵级数 $\{(A'A + \lambda I)^{-1}[E + \lambda(A'A + \lambda I)^{-1}A'b + \lambda^2(A'A + \lambda I)^{-2}A'b + \cdots]\}$ 收敛于 $A^{-1}b$, 最后一项收敛于一个 0 向量, 即 $\lim_{k\to\infty} X_k = X = A^{-1}b$.

□

事实上, 定理 2 不仅给出了求解病态线性系统迭代解的方法和过程, 而且说明了迭代过程中解的收敛性.

## 4　新迭代算法与传统迭代算法的比较

对于线性系统的近似求解问题, 传统上采用著名的 Gauss-Seidel 迭代算法, 该算法的迭代形式通常为

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(c_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}),$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(c_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}),$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(c_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}).$$

算法的步骤如下:

1) 将初值 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_N^{(0)}$ 代入迭代的解析式右边, 得到 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_N^{(1)}$;

2) 将所得值代入迭代解析式的右边重复计算, 直至算出 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_N^{(k)}$;

3) 进行误差检验, 直到符合误差允许的范围结束.

值得注意的是, 该算法存在一定的局限性: 1) 该算法通常是基于常态系统而言的, 对于病态系统未必适用; 2) 系统迭代解要求系统系数矩阵中的主对角线元素 $a_{ii}$ ($i = 1, 2, \cdots, N - 1$) 不能为零(在计算机编程时首先要对此作判断, 若主对角线中的元素有一个为零, 则不能用该算法获得解). 这种局限性给算法的应用带来极大不便; 但该算法是通过系数矩阵的元素进行迭代运算的, 因而算法复杂度比新算法低, 且算法的收敛速度比新算法快.

本文算法可对常态系统和病态系统进行相同的求解, 对系统中系数矩阵的系数无特殊要求, 这极大地增强了系统的适应性. 同时, 算法只针对矩阵的运算进行, 对于计算机编程极为方便. 由式(6) 可以看出, 算法的收敛是必然的, 收敛的速度取决于因子 $\lambda$ ($0 < \lambda < 1$), 当 $\lambda$ 越小时, 收敛速度越快.

## 5　结　论

本文建立了一种适合于常态和病态系统解的迭代方法, 给出了算法解存在唯一性和迭代的具体方法与过程, 分析了本文算法与传统算法的差异, 通过分析说明了新算法的可行性. 该算法对于解决计算力学问题、工程物理学问题具有重要的意义.


参考文献(References):

[1] 林武忠. 奇摄动线性代数方程组及其对病态方程的应用[J]. 应用数学和力学, 1987, 8(6): 98-101.
(LIN G W Z. The apply of singular pertarbation linear algebra equations for ill-equation[J]. *Chinese J of Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, 8(6): 98-101.)

[2] 奥特加 J M. 数值分析[M]. 张丽君, 等译. 北京: 高等教育出版社, 1983.

[3] 姜同松. 关于"再论约束最小二乘法"的注记[J]. 计算力学学报, 2003, 20(1): 119-121.
(JIANG T S. A note for exposition and argumentation on constrained least square method[J]. *J of Computalinonal Mechanics*, 2003, 20(1): 119-121.)

[4] 张德文, 魏卓旋. 再论约束最小二乘法[J]. 计算力学学报, 2000, 17(4): 389-404.
(ZHANG D W, WEI F S. Exposition and argumenttation on constrained least square method[J]. *J of Computational Mechanics*, 2000, 17(4): 398-404.)

[5] Wang L, Zheng D Z. An effective hybrid optimization strategy for job-shop scheduling problem[J]. *Computer and Operations Research*, 2001, 28(6): 585-596.

[6] Ho Y C. An explanation of ordinal optimization: Soft computing for hard problems[J]. *Information Science*, 1999, 113(3-4): 169-192.