第 19 卷 第 11 期　　控 制 与 决 策　　2004 年 11 月
Vol.19 No.11　　Control and Decision　　Nov. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)11-1318-03

不确定 2-D 奇异系统 Roesser 模型鲁棒能稳的矩阵不等式方法

徐慧玲, 邹 云
(南京理工大学 自动控制系, 江苏 南京 210094)

摘 要: 考虑具有参数不确定性的 2-D 奇异系统 Roesser 模型(简称 2-D SRM)鲁棒能稳问题. 通过静态状态反馈控制律, 使得对所有容许的不确定参数, 闭环系统容许、稳定、无跳跃模. 通过求解矩阵不等式, 给出了不确定 2-D 奇异系统鲁棒能稳问题可解的充分条件及静态状态反馈控制律设计的代数表达式. 最后通过算例验证了方法的有效性.

关键词: 2-D 奇异系统; 跳跃模; 鲁棒能稳; 矩阵不等式
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

A matrix inequalities approach to the robust stabilization for uncertain 2-D singular Roesser models

XU Hui-ling, *ZOU Yun*
(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: XU Hui-ling, E-mail: xuhl@nj165.com)

Abstract: The problem of robust stabilization for linear discrete time 2-D singular Roesser models (2-D SRM) with parameter uncertainty is discussed. The purpose is to design the state feedback controllers such that the resulting closed-loop system is acceptable, jump modes free and stable of all admissible uncertainties. A sufficient condition of the solvability of the robust stabilization problem for linear discrete time uncertain 2-D SRM is given. And a desired state feedback controller is constructed by solving a set of matrix inequalities. Numerical example shows the applicability of the proposed approach.

Key words: 2-D singular systems; jump modes; robust stabilization; matrix inequalities

1 引 言

近 10 年来, 2-D 奇异系统的广泛应用引起了人们的关注, 许多 1-D 奇异系统的结果被推广到 2-D 情形[1~4]. 文献[1]在给出跳跃模概念的基础上讨论了 2-D 奇异系统的渐近稳定性, 几个相关问题在[2]中得到解决, 但关于不确定 2-D 奇异系统鲁棒能稳问题涉及的却较少. 本文考虑具有参数不确定的2-D 奇异系统鲁棒能稳问题. 首先, 利用线性矩阵不等式, 给出 2-D 奇异系统容许、稳定、无跳跃模的充分条件; 在此基础上, 得到了不确定 2-D 奇异系统鲁棒能稳问题可解的充分条件及静态状态反馈控制律设计的代数表达式.

2 预备知识及问题的描述

考虑如下不确定 2-D SRM 系统:

$$E\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = (A+\Delta A)\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + Bu(i,j), \tag{1a}$$

收稿日期: 2004-01-11; **修回日期**: 2004-06-11.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60074007); 高等学校骨干教师基金项目.
作者简介: 徐慧玲(1969—), 女, 江苏新沂人, 博士, 讲师, 从事奇异系统、鲁棒控制等研究; 邹云(1962—), 男, 江苏宜兴人, 博士生导师, 教授, 从事非线性系统、复杂系统等研究.

其边界条件为

$$x^h(0,j)=x_j^h,\ x^v(i,0)=x_i^v. \tag{1b}$$

其中: $x^h(i,j)\in R^{n_1}$, $x^v(i,j)\in R^{n_2}$ 分别为水平和垂直局部状态向量; $y(i,j)\in R^l$, $u(i,j)\in R^m$ 分别为系统的输出和输入向量; A,B,C 为适维实矩阵; $E\in R^{n\times n}$ 为奇异矩阵; ΔA 为时不变的参数不确定性, 且满足如下 2-D 正则约束条件, 即若存在复数 (z,w), 使其系数矩阵 E,A 满足条件

$$\det[EI(z,w)-A]=\sum_{k=0}^{\bar{n}_1}\sum_{l=0}^{\bar{n}_2}a_{kl}z^kw^l\neq 0,$$

其中 $I(z,w)=\mathrm{diag}\{zI_{n_1},wI_{n_2}\}$, 且当 $a_{\bar{n}_1,\bar{n}_2}\neq 0$ 时系统(1) 称为容许的.

注 1　一般而言: 无论 ΔA 多么小, 系统(1) 的容许性也并不能保证系统

$$E\begin{bmatrix}x^h(i+1,j)\\x^v(i,j+1)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\x^v(i,j)\end{bmatrix}+Bu(i,j) \tag{2}$$

的容许性. 但文献[1] 指出: 不容许的系统在某种意义下是不适定的(ill-posed), 这样的模型是不能有效反映实际对象的. 因此, 本文不仅假定(1) 为容许的, 并同时假定所关心的不确定性 ΔA 不会破坏系统(1) 的容许性, 即仅仅讨论那些使得形如(2) 的系统均为容许的 ΔA.

在本文中假定参数不确定性具有如下形式:

$$\Delta A=MFN.$$

其中: $F\in R^{j\times k}$ 为未知的定常矩阵函数, 且 F 满足 $FF^{\mathrm{T}}\leq I$; 这里 I 为适维单位阵, M,N 为适维已知矩阵, 并称满足上述条件的不确定性 ΔA 是容许的.

对不确定系统(1) 作如下的状态反馈:

$$u(i,j)=Kx(i,j),\ K\in R^{m\times n}, \tag{3}$$

则闭环系统为

$$E\begin{bmatrix}x^h(i+1,j)\\x^v(i,j+1)\end{bmatrix}=(A_c+\Delta A)\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\x^v(i,j)\end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中 $A_c=A+BK$.

鲁棒能稳问题: 寻求状态反馈控制律(3), 使闭环系统(4) 对所有容许的 ΔA 都是容许、稳定且无跳跃模; 若这样的状态反馈控制律(3) 存在, 则称(3) 是(4) 的鲁棒状态反馈控制律. 为方便起见, 称式(2) 为系统(1) 的标称系统.

为得到本文的主要结论, 基于现有文献, 给出如下各种相关内容.

引理 1　系统(2) 是容许的、渐近稳定且无跳跃模的, 如果存在块对称阵 $P=\mathrm{diag}\{P_h,P_v\}\in R^{n\times n}$, $P_h\in R^{n_1\times n_1}$, $P_v\in R^{n_2\times n_2}$, 使得

$$EPE^{\mathrm{T}}\geq 0,\ APA^{\mathrm{T}}-EPE^{\mathrm{T}}<0, \tag{5}$$

而且如果式(5) 成立, 则 P 是可逆的.

注 2　文献[1] 给出了系统(4) 跳跃模的定义, 即系统的跳跃模是当系统的输入端发生某些类型的突发性扰动时, 系统状态所发生的强迫性跃迁的行为模态. 跳跃模的存在性是奇异系统最重要的属性之一, 奇异系统不存在跳跃模态当且仅当该系统可以等价地化为一个降阶的正则系统. 文献[3] 则进一步指出奇异 1-D 离散系统的跳跃模即对应于奇异 1-D 连续系统脉冲模. 鉴于跳跃模的数学描述较为复杂, 其定义详见文献[1].

引理 2[4]　容许的系统(2) 无跳跃模, 则必存在可逆矩阵 $M\in R^{n\times n}$ 和 $N=\mathrm{diag}\{N_h,N_v\}\in R^{n\times n}$, 其中 $N_h\in R^{n_1\times n_1}$, $N_v\in R^{n_2\times n_2}$, 使得 $MEN=\bar{E}=\mathrm{diag}(\bar{E}_h,\bar{E}_v)$, 其中 $E_h\in R^{n_1\times n_1}$, $E_v\in R^{n_2\times n_2}$, $MAN=\bar{A}$, $MB=\bar{B}$.

注 3　由于鲁棒能稳问题要求系统(1) 是容许、渐近稳定且无跳跃模的, 由引理 2 可知, 不失一般性, 本文假定系统(1) 中 $E=\mathrm{diag}\{E_h,E_v\}$, 其中 $E_h\in R^{n_1\times n_1}$, $E_v\in R^{n_2\times n_2}$.

3　主要结果

引理 3　系统(2) 的自治系统

$$E\begin{bmatrix}x^h(i+1,j)\\x^v(i,j+1)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x^h(i,j)\\x^v(i,j)\end{bmatrix} \tag{6}$$

是容许、稳定且无跳跃模的, 如果存在对称阵 $P=\mathrm{diag}\{P_h,P_v\}\in R^{n\times n}$, 使得

$$E^{\mathrm{T}}PE\geq 0,\ A^{\mathrm{T}}PA-E^{\mathrm{T}}PE<0 \tag{7}$$

同时成立, 则 P 是可逆的.

证明　由引理 1 和引理 2 易证得.

由引理 3 易得如下结论:

定理 1　对于系统(1) 若存在状态馈控反馈控制(3) 及可逆对称阵 $P=\mathrm{diag}\{P_h,P_v\}\in R^{n\times n}$, 对所有容许的 ΔA, 使得不等式

$$E^{\mathrm{T}}PE\geq 0,$$
$$(A_c+\Delta A)^{\mathrm{T}}P(A_c+\Delta A)-E^{\mathrm{T}}PE<0 \tag{8}$$

同时成立, 其中 $A_c=A+BK$, 则闭环系统(4) 对所有容许的 ΔA 都是容许、稳定且无跳跃模的.

下面利用矩阵不等式给出状态反馈鲁棒能稳问题可解的条件.

定理 2　不确定的系统(1) 是鲁棒能稳的, 如果存在常数 $\epsilon>0$, $\mu>0$ 和可逆对称矩阵 $P=\mathrm{diag}\{P_h,P_v\}\in R^{n\times n}$, 其中 $P_h\in R^{n_1\times n_1}$, $P_v\in R^{n_2\times n_2}$ 满足 $R=M^{\mathrm{T}}PM+I>0$, $\mu^{-1}I-R>0$, $\Phi=B^{\mathrm{T}}VB+\epsilon I$ 是可逆的, 并且

$$E^{\mathrm{T}} P E \geq 0, \tag{9a}$$

$$A^{\mathrm{T}} V A - A^{\mathrm{T}} V B \Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A + \mu^{-1} N^{\mathrm{T}} N - E^{\mathrm{T}} P E < 0, \tag{9b}$$

其中 $V = P + PM(\mu^{-1} I - R)^{-1} M^{\mathrm{T}} P$. 在这种情况下, 鲁棒状态反馈控制律可按如下选取:

$$u(i, j) = K x(i, j), K = -\Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A. \tag{10}$$

证明 根据鲁棒状态反馈控制律(10), 式(1)与(10)构成的闭环系统为

$$E \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = (A_c + MFN) \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

其中

$$A_c = A - B \Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A. \tag{12}$$

按照 R 的定义, 可得

$$[A_c + MFN]^{\mathrm{T}} P [A + MFN] \leq A_c^{\mathrm{T}} P A_c + A_c^{\mathrm{T}} PMFN + (MFN)^{\mathrm{T}} P A_c + (FN)^{\mathrm{T}} R (FN). \tag{13}$$

注意到 $\mu^{-1} I - R > 0$, 即有

$$A_c^{\mathrm{T}} PMFN + (MFN)^{\mathrm{T}} P A_c + (FN)^{\mathrm{T}} R (FN) = -[N^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} - A_c^{\mathrm{T}} PM(\mu^{-1} I - R)^{-1}](\mu^{-1} I - R)[FN - (\mu^{-1} I - R)^{-1} M^{\mathrm{T}} P A_c] + \mu^{-1} N^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} FN + A_c^{\mathrm{T}} PM(\mu^{-1} I - R)^{-1} M^{\mathrm{T}} P A_c \leq \mu^{-1} N^{\mathrm{T}} N + A_c^{\mathrm{T}} PM(\mu^{-1} I - R)^{-1} M^{\mathrm{T}} P A_c. \tag{14}$$

由式(13)和(14)及 V 的定义, 有

$$(A_c + MFN)^{\mathrm{T}} P (A_c + MFN) \leq A_c^{\mathrm{T}} V A_c + \mu^{-1} N^{\mathrm{T}} N. \tag{15}$$

将式(12)中的 A_c 代入式(15)的右端可得

$$A_c^{\mathrm{T}} V A_c + \mu^{-1} N^{\mathrm{T}} N = [A + B(-\Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A)]^{\mathrm{T}} V [A + B(-\Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A)] + \mu^{-1} N^{\mathrm{T}} N \leq A^{\mathrm{T}} V A + A^{\mathrm{T}} V B(-\Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A) + (-\Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A)^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} V A + (-\Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A)^{\mathrm{T}} \Phi (-\Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A) + \mu^{-1} N^{\mathrm{T}} N = A^{\mathrm{T}} V A - A^{\mathrm{T}} V B \Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A + \mu^{-1} N^{\mathrm{T}} N, \tag{16}$$

则由式(9b), (15)和(16), 得

$$(A_c + MFN)^{\mathrm{T}} P (A_c + MFN) - E^{\mathrm{T}} P E < 0, \tag{17}$$

即

$$(A_c + \Delta A)^{\mathrm{T}} P (A_c + \Delta A) - E^{\mathrm{T}} P E < 0,$$

$$A_c = A + BK.$$

再根据(9a)及引理 3, 便得到结论. □

4 数值算例

考虑如下不确定 2-D SRM 系统:

$$E = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], A = \left[\begin{array}{c|cc} -0.01 & -0.1 & 0 \\ \hline 0.1 & 0 & -1 \\ 1 & 0.1 & -1 \end{array}\right],$$

$$C = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{cc} 0.01 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ 0.01 & 0 \end{array}\right],$$

$$M = [0.1 \quad 0.2 \quad 0.1]^{\mathrm{T}}, N = [0.1 \quad 0.2 \quad 0.1].$$

设 $\mu = 0.99, \epsilon = 1$,

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} 0.01 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

经计算满足定理 2 条件, 所以根据定理 2, 鲁棒状态反馈控制律为

$$u(i, j) = -\Phi^{-1} B^{\mathrm{T}} V A x(i, j) = \begin{bmatrix} -0.0058 & -0.0006 & 0.0041 \\ 0.1550 & 0.0188 & 0.2096 \end{bmatrix} x(i, j),$$

此算例验证了该方法的有效性.

5 结 论

本文讨论了具有参数不确定性的 2-D 奇异系统 Roesser 模型(简称 2-D SRM)鲁棒能稳问题. 首先通过求解线性矩阵不等式, 给出了 2-D 奇异系统容许、稳定、无跳跃模的充分条件. 在此基础上, 得出了鲁棒能稳问题可解的充分条件及静态状态反馈控制律设计的代数表达式.

参考文献(References):

[1] Zou Y, Campbell S L. The jump behavior and stability analysis for 2-D singular systems[J]. *Multidimensional Systems & Signal Processing*, 2000, 11(4): 321-338.

[2] Cai C, Wang W, Zou Y. A note on the internal stability for 2-D acceptable linear singular discrete systems[J]. *Multidimensional Systems & Signal Processing*, 2004, 15(2): 197-204.

[3] Zou Y, Wang W, Xu S. Regular state observers design for 2-D singular roesser models[A]. *The 2003 Int Conf on Control and Automation*[C]. Canada: IEEE Operations Center, 2003. 93-97.

[4] Zou Y, Xu H, Xu S. Equivalence and duality of 2-D singular systems[A]. *47th IEEE Midwest Symtosium on Circuits and Systems & IEEE on Circuits and Systems Society*[C]. Hiroshima, 2004. 561-564.