

文章编号: 1001-0920(2004)11-1232-05

基于集结策略的非线性稳定预测控制器

刘 斌, 席裕庚

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘 要: 针对有约束非线性系统预测控制在线计算量大的问题, 引入集结策略降低其在线计算量并重点讨论了系统的稳定性问题 指出当控制器的终端状态处于某集合内且集结衰减系数的上界满足一定条件时, 其最优目标函数递减 进而提出了一个双模控制律, 可使系统渐近稳定 最后, 通过仿真对该结论进行了验证

关键词: 预测控制; 非线性系统; 集结

中图分类号: F201 **文献标识码:** A

Stable nonlinear model predictive controller based on aggregation strategy

L I U B i n, X I Y u - g e n g

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China Correspondent: XI Yu-geng, E-mail: ygxi@sjtu.edu.cn)

Abstract: In order to reduce the online computation burden of predictive control for constrained nonlinear systems, the aggregation strategy is introduced and the system stability is analyzed It is shown that the optimal cost function will be decreasing if the terminal state of the controller lies in a certain set and the upper bound of the decaying coefficient satisfies some conditions A dual-model control law is proposed to make the controlled systems asymptotically stable The simulation result shows the effectiveness of the method

Key words: predictive control; nonlinear systems; aggregation

1 引 言

模型预测控制(MPC)近年来已成为控制界研究的热点^[1]。MPC中,在每一采样时刻,通过解决一个有限时域的优化问题,得到一控制序列,但只有该序列的第1项作为输入应用到系统中,下一时刻,重复上述过程 对非线性系统的预测控制问题,由于其更接近实际情况并且难度更大,一直是研究的热点 Magni和Nicolao^[2]针对非线性系统提出了一种双模控制器 通过引入一个使线性化系统稳定的线性反馈控制律 K_x ,得到与之对应的状态不变集作为其终端约束集,进而取该集合内以 K_x 为控制律时

无穷时域上的目标函数作为其终端代价函数,最后得到了该控制器的稳定性

典型的模型预测控制器在线求解一非线性约束优化问题,在线计算量通常较大,为克服这一困难,文献[3]提出了一种输入集结方法,通过引入集结变换,将预测控制器的控制变量数目大大减少,从而降低了在线计算量;[4]针对线性系统提出了一种基于集结的预测控制器,并在该预测控制器的基础上给出一种双模控制律,使得系统渐近稳定 为此,本文从另一个角度对基于集结策略的非线性预测控制进行了研究并得到了相应的结论

收稿日期: 2003-11-26; 修回日期: 2004-02-23

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(69934020).

作者简介: 刘斌(1975—),男,湖北咸宁人,博士生,从事预测控制的稳定性和鲁棒性研究; 席裕庚(1946—),男,上海人,教授,博士生导师,从事复杂工业过程的优化控制、智能机器人控制等研究

2 预备知识

考虑如下非线性系统:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)). \quad (1)$$

其中: $x(k) \in X \subseteq R^n, u(k) \in U \subseteq R^m$ 分别为系统状态和系统输入; X 和 U 为闭紧集, $0 \in X, 0 \in U, U$ 为一凸集; $f(\cdot, \cdot)$ 为一个连续函数且 $(0, 0)$ 为系统的一个平衡点, 即 $f(0, 0) = 0$ 现作如下定义和假设:

定义 1 设 Y 为一闭紧集, $0 \in Y$, 记 $\delta(Y)$ 为 Y 的边界, 定义 $\bar{r}(Y) = \max_{y \in \delta(Y)} \|y\|$.

定义 2 B_r 为一个以原点为中心, 以 $r > 0$ 为半径的超球体

定义 3 设 S, T 为两个包含原点的闭紧集, 且 $S \supseteq T$, 定义

$$d(S, T) = \min\{\|x - y\| \mid x \in \delta S, y \in \delta T\}, \quad (2)$$

其中 $\delta S, \delta T$ 分别表示 S 和 T 的边界

假设 1 存在 $(0, 0)$ 点的一个有限邻域 $X_0 \times U_0 = \Pi_0$, 使得当 $(x(k), u(k)) \in \Pi_0$ 时, 系统(1)为若干线性系统的凸组合, 即

$$\begin{aligned} \forall (x(k), u(k)) \in \Pi_0, \\ f(x(k), u(k)) = \sum_{i=1}^L \lambda_i [A_i x(k) + B_i u(k)], \\ \lambda_i \geq 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

也可表示为

$$\text{Co}\{A_i x(k) + B_i u(k), i = 1, 2, \dots, L\}. \quad (4)$$

假设 2 A_i 均为稳定阵, 且对任一 A_i 都存在一矩阵 $P_i > 0$, 使得对某正数 γ 和集合 $X_i = \{x \mid x^T P_i x \leq \gamma\}$, 有 $A_i X_i \subset X_i (i = 1, 2, \dots, L)$ 成立, 其中 $A_i X_i = \{y \mid y = A_i x, x \in X_i\}$.

假设 3 对于 A_i 和 X_i , 有 $\text{Co}\{A_i X_i\} \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_L = W$, 其中

$$\begin{aligned} \text{Co}\{A_i X_i\} = \left\{ y \mid y = \sum_{i=1}^L \alpha_i x_i, \alpha_i \geq 0, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1, x_i \in A_i X_i \right\}. \end{aligned}$$

3 集结非线性预测控制器

考虑如下非线性系统(1)的预测控制器^[5]:

$$\begin{aligned} \text{C0: } \min_{u(k+i|k)} J(k) = \\ \sum_{i=0}^{N-1} [x(k+i|k)]^2 + \\ u(k+N|k) = 0; \end{aligned}$$

$$u(k+i|k) \in U, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } x(k+i+1|k) = \\ f(x(k+i|k), u(k+i|k)), \\ x(k|k) = x(k); \\ x(k+i|k) \in X; \\ u(k+i|k) \in U, i = 0, 1, \dots, N-1; \\ x(k+N|k) = 0; \end{aligned}$$

其中 $x(k)$ 为系统状态

引理 1^[5] 对于由 C0 描述的 MPC 控制器, 设其 k 时刻最优解为

$$\begin{aligned} U^*(k) = [u^*(k|k), u^*(k+1|k), \dots, \\ u^*(k+N-1|k)], \end{aligned} \quad (6)$$

以 $u^*(k|k)$ 作为系统 k 时刻输入, 则受控系统渐近稳定

如上所述, 在这一标准问题中, 控制器每一时刻要求解优化问题 C0, 优化的变量为 N 个 m 维变量 $u(k+i|k)$, 因涉及到非线性系统, 并且 $x(k+i|k) \in X$ 和 $u(k+i|k) \in U$ 不一定是线性约束, 故其每一时刻的寻优属于非线性规划的范畴, 随着 N 的增长, 计算量将急剧增大, 不利于预测控制的在线计算. 类似于文献[4], 为减少控制器的在线计算量, 本文引入了文献[3]中的集结策略, 将其修改后得到如下预测控制器:

$$\begin{aligned} \text{C1: } \min_{U(k)} J(k) = \\ \sum_{i=0}^{N-1} [x(k+i|k)]^2 + \\ u(k+N|k) = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } x(k+i+1|k) = \\ f(x(k+i|k), u(k+i|k)), \\ x(k|k) = x(k); \\ u(k+i|k) \in U; \\ x(k+i|k) \in X, i = 0, 1, \dots, N-1; \\ x(k+N|k) \in W; \\ u(k+s+j|k) = \rho^j(k) u(k+s|k), \\ 0 < \rho^j(k) < \bar{\rho} < 1, \\ j = 1, 2, \dots, N-s-1; \\ U(k) = [u(k|k), u(k+1|k), \dots, \\ u(k+N-1|k)] \end{aligned}$$

其中: s 为一个选定的整数, 且 $s > 0; W$ 为假设 3 中定义的集合且设其满足如下条件: 存在一个正数 $\beta > 1$, 使得 $W \subseteq B_{\bar{r}(W)} \subset \beta W \subseteq X_0$. 这相当于对原优化变量 $U(k)$ 作一线性集结, 其中集结矩阵的形式为

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I & \rho(k)I & \dots & \rho^{N-s-1}(k)I \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

H 为一 $Nm \times (s+1)m$ 矩阵

注 1 在该控制器中 s 的取值范围是 $0 \sim N - 1$ 的整数 当 s 越大时, 说明引入的集结约束条件越少, 最优目标函数值越小, 但这样在线计算的控制变量数则越多, 在线计算量越大; 当 s 越小时则相反 $s = 0$ 与 $s = N - 1$ 分别对应于仅当前 $u(k|k)$ 和 $\rho(k)$ 为优化变量以及未集结这两种极端情况 所以, 要根据具体的在线计算能力选择一个适当的 s 值

对于 C1 控制器, 由引理 1 无法得到其闭环系统的稳定性, 所以有必要重新对其性质进行讨论

4 集结非线性预测控制器的性质分析

定理 1 设由 C1 描述的 MPC 控制器, 其 k 时刻最优解为

$$U^*(k) = [u^*(k|k), u^*(k+1|k), \dots, u^*(k+s|k), \rho^*(k)u^*(k+s|k), \dots, (\rho^*(k))^{N-s-1} \times u^*(k+s|k)], \quad (9)$$

$u^*(k|k)$ 作为系统(1)的 k 时刻输入, 则必存在一个正数 ϵ , 使得当 $\bar{\rho} \in \epsilon$ 时,

$$U(k+1) = [u^*(k+1|k), \dots, u^*(k+s|k), \rho^*(k)u^*(k+s|k), \dots, (\rho^*(k))^{N-s} \times u^*(k+s|k)] \quad (10)$$

为 C1 控制器 $k+1$ 时刻的一个可行解

证明 设与 $U^*(k)$ 对应的系统预测状态为 $x^*(k|k), x^*(k+1|k), \dots, x^*(k+N|k)$, 与 $U(k+1)$ 对应的系统预测状态为 $x(k+1|k+1), x(k+2|k+1), \dots, x(k+N+1|k+1)$. 容易得到

$$x(k+1+i|k+1) = x^*(k+1+i|k), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11)$$

可以看出, 要求 $U(k+1)$ 可行的一个关键条件是 $x(k+1+N|k+1) \in W$.

因 U 为有限集合, 故必存在一个 $\epsilon \in [0, 1)$, 使得对 $\forall \rho^*(k) \in [0, \epsilon)$, 有 $(\rho^*(k))^{N-s}U \subseteq U_0$, 此时必有 $(\rho^*(k))^{N-s}u^*(k+s|k) \in U_0$, 又因为 $x^*(k+N|k) \in W \subseteq X_0$, 所以有 $(x^*(k+N|k), (\rho^*(k))^{N-s}u^*(k+s|k)) \in \Pi_0$ 根据假设 1 知: 存在

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{s+1} = 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1, \text{ 使}$$

$$f(x^*(k+N|k), (\rho^*(k))^{N-s}u^*(k+s|k)) =$$

$$\sum_{i=1}^L \lambda_i x^*(k+N|k) + \sum_{i=1}^L \lambda_i (\rho^*(k))^{N-s} B_i \times u^*(k+s|k). \quad (12)$$

将式(12)中前后两分量分别记为 M_1 和 M_2

因为 $x^*(k+N|k) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_L$, 所以有 $A_1 x^*(k+N|k) \in A_1 X_1, \dots, A_L x^*(k+N|k) \in A_L X_L$, 故 $M_1 \in \text{Co}\{A_i X_i\}$. 同时, 因为 $d(\text{Co}\{A_i X_i\}, W) > 0$, 故必存在一 $\epsilon > 0$, 使得 $\rho^*(k) \in [0, \epsilon)$ 时, 对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, L\}$, 有 $(\rho^*(k))^{N-s} B_i U \subseteq B d(\text{Co}\{A_i X_i\}, W)$,

即有

$$(\rho^*(k))^{N-s} B_i u^*(k+s|k) \subseteq B d(\text{Co}\{A_i X_i\}, W)$$

或 $M_2 \in B d(\text{Co}\{A_i X_i\}, W)$.

通过以上分析可知, 取 $\bar{\rho} \in \epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ 时, 有 $M_1 \in \text{Co}\{A_i X_i\}$ 和 $M_2 \in B d(\text{Co}\{A_i X_i\}, W)$, 结合定义 3 可得

$$f(x^*(k+N|k), (\rho^*(k))^{N-s}u^*(k+s|k)) = M_1 + M_2 \in W.$$

又因为 $u(k+1)$ 满足 C1 中各项约束, 结合上述得 $U(k+1)$ 为该控制器在 $k+1$ 时刻的一个可行解

定理 2 设由 C1 描述的 MPC 控制器 k 时刻最优解为

$$U^*(k) = [u^*(k|k), u^*(k+1|k), \dots, u^*(k+s|k), \rho^*(k)u^*(k+s|k), \dots, (\rho^*(k))^{N-s-1} \times u^*(k+s|k)], \quad (13)$$

$u^*(k|k)$ 作为系统(1)的 k 时刻输入, $x(k)$ 为系统状态, 若 $x(0) \in B_{\bar{r}(W)+\Delta}$, 则必定存在一个 ϵ , 如果 C1 控制器中的 $\bar{\rho}$ 满足 $\bar{\rho} \in \epsilon$, 当 k 时, $x(k)$ 必定进入或无限趋近于 $B_{\bar{r}(W)+\Delta}$, 其中: Δ 为一个事先给定的正数, ϵ 符合定理 1 中条件

证明 由定理 2 条件, 因 $\bar{\rho} \in \epsilon$, 故可与定理 1 类似, 由 $U^*(k)$ 得到该控制器 $k+1$ 时刻的可行解 $U(k+1)$. 设与 C1 控制器 k 时刻最优解 $U^*(k)$ 对应的目标函数为 $J^*(k)$, 与该控制器 $k+1$ 时刻可行解 $U(k+1)$ 对应的目标函数为 $J(k+1)$, 根据最优性原理容易得到

$$J^*(k) - J^*(k+1) = x(k)^2 - x(k+N+1|k+1)^2 - (\rho^*(k))^{N-s}u^*(k+s|k)^2. \quad (14)$$

根据定理 2 条件, 可知 $x(k+N+1|k+1) \in W$, 即有 $x(k+N+1|k+1)^2 \leq \bar{r}(W)^2$; 另一

方面, 类似于定理 1 中的分析, 因 $u^*(k+s|k) \in U$ 且 U 为有限集, 故可找到一个正数 ϵ , 使得当 $\rho^*(k) \in \epsilon$ 时, 对 $\forall u^*(k+s|k) \in U$ 有

$$(\rho^*(k))^{N-s} u^*(k+s|k)^2 \leq \Delta^2 + 2\bar{r}(W)\Delta$$

所以当 $\bar{\rho} = \min\{\epsilon, \epsilon\}$ 时, 有

$$x(k+N+1|k+1)^2 + (\rho^*(k))^{N-s} u^*(k+s|k)^2 \leq (\bar{r}(W) + \Delta)^2$$

当某一 $x(k)$ 进入 $B_{\bar{r}(W)+\Delta}$ 内时, 系统结论已得; 否则, 对所有 k , 由式(14)和定理 2 条件可知

$$J^*(k) - J^*(k+1) + x(k)^2 - (\bar{r}(W) + \Delta)^2 > 0, \quad (15)$$

将式(15)从 $k \sim$ 迭加并令

$$y(k+i) = x(k+i)^2 - (\bar{r}(W) + \Delta)^2,$$

可得 $J^*(k) = J^*(k) + \sum_{i=0}^{k-1} y(k+i)$, 由于 $J^*(k)$

有限, 且等号右边各项都非负, 所以必有 $\sum_{i=0}^{k-1} y(k+i)$ 有限, 又因 $y(k+i) > 0$, 故 $\lim_{i \rightarrow \infty} y(k+i) = 0$ 或 $\lim_{i \rightarrow \infty} (x(k+i)^2 - (\bar{r}(W) + \Delta)^2) = 0$, 即系统状态 $x(k)$ 无限趋近 $B_{\bar{r}(W)+\Delta}$

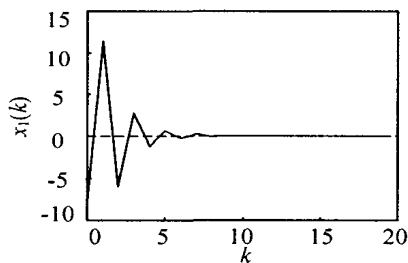
由定理 2 可知, 当 C1 控制器中的参数 $\bar{\rho}$ 满足某种条件时, 系统状态可以从某集合外无限趋近或进入其中, 但无法保证系统的渐近稳定性 下面进一步给出一种可使系统渐近稳定的双模控制律

5 一种双模控制律

引理 2 对系统(1), 若任意的状态 $x(k) \in W$, 当取 $u(k+i) = 0, i = 0, 1, \dots$, 则有 $x(k+i) \in W$ 且当 $i \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(k+i) \rightarrow 0$

证明略

下面给出一种双模控制律: $x(k)$ 为系统 k 时刻状态, 因 $B_{\bar{r}(W)} \subset \beta V$, 故可假设 $B_{\bar{r}(W)+\Delta} \subset \beta V$. 利用



(a) $x_1(k)$ 的变化曲线

$u^*(k|k)$ 表示由 C1 控制器得到的系统输入, 则双模控制律

$$v(k, x(k)) = \begin{cases} u^*(k|k), & x(k) \notin \beta V; \\ 0, & x(k) \in \beta V. \end{cases} \quad (16)$$

因为 $B_{\bar{r}(W)+\Delta} \subset \beta V$, 所以若 $x(k)$ 趋近或进入 $B_{\bar{r}(W)+\Delta}$, 则有 $x(k) \in \beta V$. 这说明通过将 C1 作为外部控制器, 可使系统状态从 βV 外引入该集合中 当 k 时刻系统状态 $x(k)$ 进入 βV 后, 由引理 2 可知, 当 $u(k+i) = 0$ 时, 有 $x(k+i) \in \beta V$, 且当 $i \rightarrow \infty$ 时有 $x(k+i) \rightarrow 0$

推论 1 若系统(1)初始状态 $x(0) \in \beta V$, 且对 C1 控制器定理 1 和定理 2 中的条件成立, 系统输入为(16)所示的双模控制律, 则系统状态 $x(k)$ 将最终进入 βV 且有 $\lim_{i \rightarrow \infty} x(k+i) = 0$, 即系统渐近稳定

6 仿真实例

考虑非线性系统

$$x(k+1) = \begin{cases} A_1 x(k) + B u(k), & |x(k)| \leq 4; \\ \frac{x(k)}{4} A_1 x(k) + \left(1 - \frac{|x(k)|}{4}\right) \times \\ A_2 x(k) + B u(k), & |x(k)| > 4 \end{cases}$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.64 & 0.8 \\ 0 & -0.48 \end{bmatrix},$$

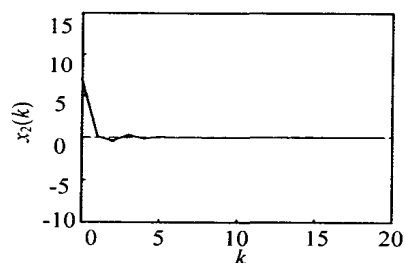
$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.52 & 0.8 \\ 0 & -0.56 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -1.5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$x(k) \in X = \{x(k) \mid |x(k)| \leq 15\},$$

$$u(k) \in U = \{u(k) \mid |u(k)| \leq 6\}.$$

系统初始状态 $x(0) = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \end{bmatrix}$. 根据假设 2, 对 A_1 和 A_2 分别取



(b) $x_2(k)$ 的变化曲线

图 1 $x(k)$ 的各分量随时间变化的曲线

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & - & 1 \\ - & 1 & 8 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & - & 1 \\ - & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

此外令

$$U_0 = \{u(k) \mid u(k) = 2\},$$

$$X_0 = \{x(k) \mid x(k) = 4\},$$

并令

$$W = \{x(k) \mid x^T(k)P_1x(k) = 1\}$$

$$\{x(k) \mid x^T(k)P_2x(k) = 1\},$$

$$\beta = 3.5$$

按照定理1和定理2的结论计算得到 $\bar{\rho} = 0.55$,将以上数据代入C1控制器中进行仿真,得到 $v(k, x(k))$ 作为系统输入,图1为系统的状态 $x(k)$ 的各个分量随时间变化的图像,可以看出,系统渐近稳定

7 结论

针对有约束非线性系统的预测控制器,本文引入了集结策略,给出了一种新的预测控制器C1,大大减少了该控制器的在线计算量;同时对该控制器

的性质进行了分析并给出了相关结论,进而在C1的基础上,给出了一种双模控制律,可使闭环系统渐近稳定

参考文献(References):

- [1] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993
- [2] Magni L, De Nicolao G, Magnani L, et al. A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2001, 37(9): 1351-1362
- [3] Du Xiaoning, Xi Yugeng, Li Shaoyuan. A computationally efficient aggregation optimization strategy of model predictive control[J]. *High Technology Letters*, 2002, 8(2): 68-71
- [4] 刘斌, 席裕庚. 一种有约束集结预测控制器及其性质分析[A]. 中国控制会议[C]. 宜昌, 2003
- [5] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814

(上接第1231页)

5 结论

本文研究了非线性多输入/多输出系统的 H_2/H_∞ 混合模糊控制问题,提出了一种 H_2/H_∞ 模糊输出反馈控制设计方法.与已提出的 H_2/H_∞ 混合控制方法相比,该方法具有以下特点:1)该方法考虑了模糊逼近误差和外部干扰对系统性能的影响,既能有效抑制外部干扰和模糊逼近误差对系统性能的影响,又能使系统获得较好的动态性能;2)该方法采用LMI方法求解EVP,大大简化了控制系统的设计,便于应用;3)该方法只需调整一个边界参数,缩短了设计时间,简化了设计过程

参考文献(References):

- [1] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Syst*, 1998, 6: 250-265
- [2] Cao S G, Rees N W, Feng G. H_∞ -infinity control of non-

linear continuous time systems based on dynamical fuzzy models[J]. *Int J Syst Sci*, 1996, 27: 821-830

- [3] Tamaka K, Sano M. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Syst*, 1994, 2: 119-134
- [4] Chen B S, Tseng C S, Vang H J. Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Syst*, 1999, 7: 571-585
- [5] Chen B S, Chang Y C. Nonlinear mixed H_2/H_∞ control for robust tracking design of robotics systems[J]. *Int J Contr*, 1997, 67(6): 837-857
- [6] Chen B S, Tseng C S, U ang H J. Mixed H_2/H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: An LMI approach[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Syst*, 2000, 8(3): 249-265
- [7] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Trans on Syst Man Cybern*, 1985, (15): 116-132