

文章编号: 1001-0920(2004)11-1237-04

信息不完全的多准则层次分类方法研究

王 坚 强

(中南大学 商学院, 湖南 长沙 410083)

摘 要: 提出一种信息不完全的多准则层次分类决策方法。该方法利用决策者对训练集的分类结果(属于最高分类和不属于最高分类)和准则权系数的不完全信息构建非线性规划模型, 将其转换成线性规划模型, 求解得到训练集中方案在各准则值下的偏好值和准则权系数, 通过插值得到方案集中方案在各准则下的偏好值, 计算其一致性指标值, 确定是否属于该分类。对于不属于最高分类的训练集中的方案进行分类, 并继续上述过程, 直到所有方案均分类为止。最后通过实例说明该方法的有效性和可行性。

关键词: 多准则决策; 信息不完全; 偏好; 一致性指标; 分类

中图分类号: C934 文献标识码: A

Study on hierarchical discrimination approach of multi-criteria classification with incomplete information

WANG Jian-qiang

(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Email: jqwang@mail.csu.edu.cn)

Abstract: The hierarchical discrimination method of multi-criteria classification with incomplete information is proposed. Nonlinear programming is constructed by using classification (inside top category and outside top category) to reference set and incomplete information on weights. Then it is converted into linear programming, and the criteria weights and the preference values of alternatives in the reference set under the category are gained by solving the linear programming. And the preference values of alternative under the criteria and the category are obtained by using interpolation. Its concordance index is computed, and the alternative being in the category or the lower category is acquired. The reference set, in which alternatives belong to the lower top category, is classified, and continue the above process until all alternatives are classified. An example shows the feasibility and availability of this method.

Key words: multi-criteria decision making; incomplete information; preference; concordance index; classification

1 引 言

在社会经济生活中, 存在大量多准则分类决策问题。目前求解多准则分类决策问题的方法较多^[1~4], 其中 ELECTRE/PROMETHEE, UTA/UTADIS 是应用较广泛的有效方法。PROMETHEE 方法是决策者为每一准则选择或定义 1 个偏好函数^[5~7], 利用偏好函数和准则权系数, 定义两方案的偏好优序指数, 求出每一方案的优序级别的正方向

和负方向, 利用优序关系确定方案的分类。但该方法要求准则的权系数必须确定, 决策者必须为每一准则定义或选择一个适当的偏好函数, 这在实际决策中较难实现。ELECTRE III 是假设准则均为伪准则, 并为每一准则定义一个超过关系, 根据确定的权系数定义一致性指标和不一致性指标, 然后计算方案的可信度指标, 根据可信度指标和阈值确定方案的分类。但该方法要求准则的权系数必

收稿日期: 2004-02-09; 修回日期: 2004-04-05

作者简介: 王坚强(1963—), 男, 湖南湘潭人, 教授, 从事决策理论与应用、风险管理与控制等研究

须确定 有人对 ELECTRE 方法进行改进^[8~13], 其中重要的一类是根据决策者对训练集进行分类构造线性规划模型, 求解得到准则的权系数或其他阈值 在该类方法中要么权系数确定, 要么伪准则的参数确定, 其中未确定的变量完全通过训练集推导出来 Zopounidis 等在 UTA 方法的基础上提出一种多层次多准则分类方法 (MHD IS)^[14,15], 该方法通过训练集逐步得到方案属于某一类的效用值和不属于该类的效用值, 对这两种值进行比较得到方案是否属于该类 在 MHD IS 方法中, 准则权系数完全通过训练集推导得到, 且方案的效用值是各准则效用值之和

在实际决策中, 决策者可能给出各准则权系数的一些不完全信息, 并根据偏好对某一训练集进行决策 对信息不完全决策问题的研究已取得一些进展^[16~18], 而对准则权系数信息不完全且有训练集的决策问题的研究尚不多见 本文提出一种信息不完全且已知训练集分类的多准则层次分类决策方法

2 信息不完全的多准则层次分类方法

设某一决策问题的准则有 t 个, 记为 C_1, C_2, \dots, C_t ; m 个方案可供选择, 记为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 方案 A_i 在准则 C_j 下的值为 a_{ij} , 且准则 C_j 权系数为 ω_j ; 有 p 个分类 $D_1, D_2, \dots, D_p, D_1 > D_2 > \dots > D_p$.

设决策者根据自己的偏好对一部分方案 (训练集) $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 进行分类, 且给出各准则权系数的不完全信息 设方案 B_i 在准则 C_j 的值为 b_{ij} , H 表示决策者给出的准则部分信息确定的权系数集合 权系数不完全信息可分成下列 5 类^[19]:

- 1) $\{\omega \mid \omega\}$;
- 2) $\{\omega - \omega \mid \alpha\}$;
- 3) $\{\omega \mid \alpha\omega\}$;
- 4) $\{\alpha \mid \omega \mid \alpha + \epsilon\}$;
- 5) $\{\omega - \omega \mid \omega - \omega \mid j \mid k \mid l\}$.

其中 α 和 ϵ 为非负常数 已知的部分权系数信息可为上述 5 种情形的任意一种或多种的组合 根据决策者的偏好, 确定方案集 A_1, A_2, \dots, A_m 的分类

准则类型有效益型、成本型和区间型 对区间型准则和成本型准则作适当变换, 可使其成为效益型准则 不妨假设所有准则均为效益型准则, $a_{ik} \geq 0, b_{ik} \geq 0$

2.1 偏好关系的确定

设方案与分类 D_j 在准则 C_k 下的偏好函数为 $\varphi_{jk}(x)$. $\varphi_{jk}(x)$ 为非减的且值在 $0 \sim 1$ 之间的函数, 当 $x = 0$ 时, 其值为 0 该函数与偏好关系有下列关系: 当 B_i 与 D_j 在准则 C_k 下有严格偏好关系时,

$\varphi_{jk}(b_{ik}) = 1$; 当 B_i 与 D_j 在准则 C_k 下有弱偏好关系时, $\varphi_{jk}(b_{ik}) \in [0, 1]$; 当 B_i 与 D_j 在准则 C_k 下不能分辨时, $\varphi_{jk}(b_{ik}) = 0$

该函数有下列性质: 当 $x \leq y$ 时, $\varphi_{jk}(x) \leq \varphi_{jk}(y)$; 当 $x = 0$ 时, $\varphi_{jk}(x) = 0$; 当 $x = x^*$ 时, $\varphi_{jk}(x) = 1$. $\varphi_{jk}(x) = \varphi_{(j+1)k}(x)$.

B_i 与 D_j 分类一致性指标 $C_j(B_i)$ 定义为^[14,15]

$$C_j(B_i) = \prod_{k=1}^t \omega_k \varphi_{jk}(b_{ik}). \quad (1)$$

方案与低于 D_j 的分类在准则 C_k 下的偏好函数为 $\varphi_{jk}(x)$. $\varphi_{jk}(x)$ 为非增的且值在 $0 \sim 1$ 之间的函数, 当 $x = 0$ 时, 其值为 1.

该函数有下列性质: 当 $x \leq y$ 时, $\varphi_{jk}(x) \geq \varphi_{jk}(y)$; 当 $x = x^*$ 时, $\varphi_{jk}(x) = 0$. $\varphi_{jk}(x) = \varphi_{(j+1)k}(x)$.

B_i 与低于 D_j 的分类一致性指标 $C_{-j}(B_i)$ 定义为

$$C_{-j}(B_i) = \prod_{k=1}^t \omega_k \varphi_{jk}(b_{ik}). \quad (2)$$

将 B_i 指派给 D_j 的充分必要条件是 $C_j(B_i) > C_{-j}(B_i)$, 将 B_i 指派给低于 D_j 的分类的充分必要条件是 $C_j(B_i) < C_{-j}(B_i)$ ^[14,15].

2.2 信息不完全的多准则层次分类的决策过程

2.2.1 决策过程

信息不完全的多准则层次分类方法的决策过程如图 1 所示

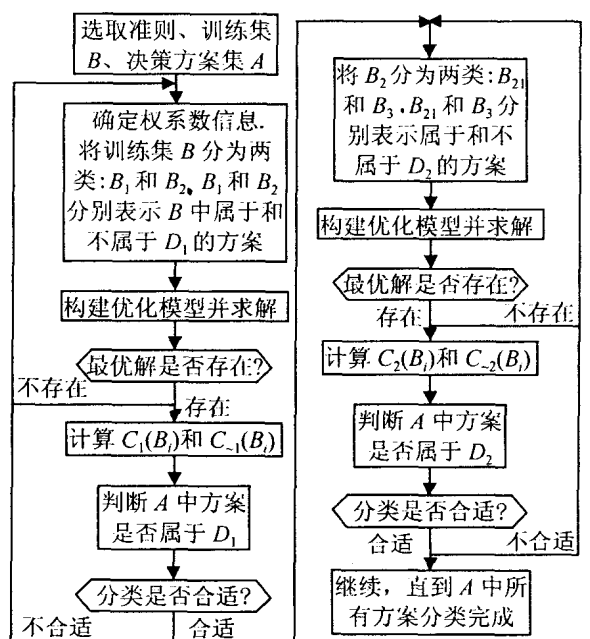


图 1 信息不完全的多准则层次分类决策过程

2.2.2 优化模型的构建

由前面讨论可知, 当 $B_i \in D_1$ 时, $C_1(B_i) > C_{-1}(B_i)$; 当 $B_i \notin D_1$ 时, $C_{-1}(B_i) > C_1(B_i)$. 因而有

$$\begin{cases} \omega \varphi_k(b_{ik}) - \omega \varphi_{1k}(b_{ik}) - \\ y_i = \delta, B_i \in D_1; \\ \omega \varphi_{1k}(b_{ik}) - \omega \varphi_k(b_{ik}) - \\ y_i = \delta, B_i \notin D_1 \end{cases} \quad (3)$$

其中 δ 为一小的正数 为此建立下列优化模型:

$$\begin{aligned} \max Z &= \alpha + \epsilon \sum_{i=1}^n y_i, \\ \text{s t } &\alpha \leq y_i; \\ &\omega \varphi_{1k}(b_{ik}) - \omega \varphi_k(b_{ik}) - \\ &y_i = \delta, B_i \in D_1; \\ &\omega \varphi_k(b_{ik}) - \omega \varphi_{1k}(b_{ik}) - \\ &y_i = \delta, B_i \notin D_1; \\ &\varphi_k(x) = \varphi_k(y), x = y; \\ &\varphi_{1k}(x) = \varphi_{1k}(y), x = y; \\ &\varphi_k(x) = 0, x = 0; \\ &\varphi_k(x) = 1, x = x_{1k}^*; \\ &\varphi_{1k}(0) = 1; \\ &\varphi_{1k}(x) = 0, x = x_{1k}^*; \\ &\omega \in H, \quad \omega = 1; \\ &y_i = 0, \alpha = 0; \\ &k = 1, 2, \dots, t \end{aligned} \quad (4)$$

其中 ϵ 和 δ 是小的正数

上述数学规划为非线性规划, 可利用非线性规划方法求解, 但求解过程较为复杂 为此将上述数学规划转换为线性规划

令 $\varphi_k(x) = \omega \varphi_k(x)$, $\varphi_{1k}(x) = \omega \varphi_{1k}(x)$, 此时有 $\varphi_k(x^*) = \omega$, $\varphi_{1k}(0) = \omega$. 则非线性规划模型 (4) 可化为下列线性规划模型:

$$\begin{aligned} \max Z &= \alpha + \epsilon \sum_{i=1}^n y_i, \\ \text{s t } &\alpha \leq y_i; \\ &\varphi_{1k}(b_{ik}) - \varphi_k(b_{ik}) - \\ &y_i = \delta, B_i \in D_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_k(b_{ik}) - \varphi_{1k}(b_{ik}) - \\ &y_i = \delta, B_i \notin D_1; \\ &\varphi_k(x) = \varphi_k(y), x = y; \\ &\varphi_{1k}(x) = \varphi_{1k}(y), x = y; \\ &\varphi_k(x) = 0, x = 0; \\ &\varphi_{1k}(x) = 0, x = x_{1k}^*; \\ &(\varphi_1(x_{11}^*), \dots, \varphi_t(x_{1t}^*)) \in H; \\ &\varphi_k(x_{1k}^*) = 1; \\ &(\varphi_{11}(0), \dots, \varphi_{1t}(0)) \in H; \\ &\varphi_{1k}(0) = 1; \\ &y_i = 0, \alpha = 0; \\ &k = 1, 2, \dots, t \end{aligned} \quad (5)$$

判断线性规划 (5) 的最优解是否存在^[20]. 如果最优解不存在, 则说明决策者对训练集 B 的分类与利用上述模型得到的分类不一致, 此时找出相互矛盾的约束条件^[21], 决策者调整对 B 的分类或准则的权系数信息, 调整后按上述方法继续求解; 如果最优解存在, 则决策者按图 1 所示过程进行其余步骤

2.2.3 最优解的灵敏度分析

设式 (5) 的最优值为 Z^* , $\epsilon > 0$ 为一个小的正数, 对每个 $k (k = 1, 2, \dots, t)$, 求解目标函数分别为 $\max G = \varphi_k(x_{1k}^*)$ 和 $\min G = \varphi_k(x_{1k}^*)$, 约束条件为式 (5) 中的约束条件加上 $\alpha + \epsilon \sum_{j=1}^n (x_j + y_j) = Z^* - \epsilon$ 约束的线性规划 对这些线性规划的最优解进行分析, 找到最适合决策者偏好的解

2.2.4 方案的分类

通过线性插值或样条插值得到备选方案 a 在各准则下的函数值, 利用式 (1) 和 (2) 求得备选方案的 $C_1(a)$ 和 $C_{-1}(a)$ 值, 根据 $C_1(a)$ 和 $C_{-1}(a)$ 大小, 确定是否属于 D_1 .

按上述过程分别构建优化模型, 并对未分类的方案 a 求出 $C_i(a)$ 和 $C_{-i}(a)$, $i = 2, 3, \dots, p - 1$, 并确定备选方案 a 是否属于 D_i , 直到方案集 A 中的所有方案均分类为止

应当注意, 在构建第 2 次分类以后的优化模型中, 必须在式 (4) 中 (即在式 (5) 中) 增加约束条件: $\varphi_k(x) = \varphi_{(i-1)k}(x) (i = 2, 3, \dots, p - 1)$ 和 $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{(i-1)k}(x) (i = 2, 3, \dots, p - 1)$, 其中 x 为训练集中方案在准则下的值, $\varphi_{(i-1)k}(x)$ 和 $\varphi_{(i-1)k}(x)$ 是由上一步优化模型求得的值或通过线性插值及样条插值

得到的

3 应用实例

有 5 个准则(均为效益型准则), 10 个方案的决策问题, 其数据见表 1.

表 1 各方案的准则值

方案	准则 1	准则 2	准则 3	准则 4	准则 5
a_1	30	6	5	3.5	18
a_2	70	3	8	4.5	24
a_3	50	1	4	5.5	15
a_4	100	4	6	8.0	20
a_5	60	2	8	7.5	19
a_6	80	5	7	6.0	21
a_7	30	2	4	4.5	17
a_8	70	3	6	6.5	19
a_9	60	4	7	7	22
a_{10}	45	3	4	5	19

已知前 8 个方案分为 3 类: $D_1 > D_2 > D_3$ 分别是: $a_4, a_6 \in D_1; a_1, a_8, a_2 \in D_2; a_5, a_3, a_7 \in D_3$

准则权重满足条件: $0.1 \leq \omega_1 \leq 0.35; 0.15 \leq \omega_2 \leq 0.45; 0.05 \leq \omega_3 \leq 0.2; 0.1 \leq \omega_4 \leq 0.3; 0.08 \leq \omega_5 \leq 0.15; \omega_1 > 2\omega_2; \omega_1 > 3\omega_3; \omega_2 > 2\omega_4; \omega_2 > \omega_5 > \omega_3 > \omega_4 > 0$, 试确定 a_9 和 a_{10} 属于何类

利用 Matlab 6.5 编程计算得到: $C_1(a_9) = 0.5499, C_{-1}(a_9) = 0.4501, C_1(a_{10}) = 0.0001, C_{-1}(a_{10}) = 0.9999$, 因此 $a_9 \in D_1, a_{10} \notin D_1, C_2(a_{10}) = 0.1283, C_{-2}(a_{10}) = 0.8716$, 因此 $a_{10} \notin D_2$ 由此可得 $a_{10} \in D_3$

通过对数据进行分析可知, 该分类是合理的

4 结 论

本文定义了方案与某一分类和低于该分类的一致性指标, 提出一种信息不完全的有训练集的多准则层次分类方法, 它是一个分步交互的分类过程. 该方法充分反映了决策者的偏好, 能满足决策者给出一些准则权重信息的要求, 较好地满足决策者在分类决策过程中进行的交互, 不断调整决策以满足自己的决策偏好的需要. 在实际应用中应选取适应的训练集, 使分类中方案分布尽可能均匀.

参考文献(References):

- [1] 陈珏. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
 [2] Jacquet Lagrèe E, Siskos Y. Preference disaggregation: 20 years of MCDA experience[J]. *European J of*

Operational Research, 2001, 130(2): 233-245

- [3] Zopounidis C, Doumpos M. Multi-criteria classification and sorting methods: A literature review [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 138(2): 229-246
 [4] Zopounidis C, Doumpos M. Multi-criteria decision aid in financial decision making: Methodologies and literature review [J]. *J of Multi-Criteria Decision Analysis*, 2002, 11(1): 167-186
 [5] 郭勇, 邱志明. 用 PROMETHEE 方法解决舰炮武器系统方案优化问题[J]. *兵工学报*, 1999, 20(2): 97-101.
 (Guo Y, Qiu ZM. The PROMETHEE method in optimizing a number of selection schemes of naval gun weapon system [J]. *ACTA Armamentarii*, 1999, 20(2): 97-101.)
 [6] Dulmin R, Mininno V. Supplier selection using a multi-criteria decision aid method [J]. *J of Purchasing and Supply Management*, 2003, 9(1): 177-187.
 [7] Goumas M, Lygerou V. An extension of the PROMETHEE method for decision making in fuzzy environment: Ranking of alternative energy exploitation [J]. *European J of Operational Research*, 2000, 123(3): 606-613
 [8] Mousseau V, Slowinski R. Inferring an ELECTRE TRI model from assignment examples [J]. *J of Global Optimization*, 1998, 112(1): 157-174
 [9] Mousseau V, Figueira J, Naux J. Using assignment examples to infer weights for ELECTRE TRI model: Some experimental results [J]. *European J Operational Research*, 2001, 130(2): 263-275
 [10] Figueira J, Roy B. Determining the weights of criteria in the ELECTRE type methods with a revised Simos procedure [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 139(2): 317-326
 [11] The A N, Mousseau V. Using assignment examples to infer category limits for the ELECTRE TRI method [J]. *J of Multi-criteria Decision Analysis*, 2002, 11(11): 29-43
 [12] Miettinen K, Salminen P. Decision-aid for discrete multiple criteria decision making problems with imprecise data [J]. *European J of Operational Research*, 1999, 119(1): 50-60
 [13] Lourenco R P, Costa J P. Using ELECTRE TRI outranking method to sort MOM LP nondominated solutions [J]. *European J of Operational Research*, 2004, 153(2): 271-289

(下转第 1245 页)

参考文献(References):

- [1] 李洪兴 因素空间理论与知识表示的数学框架(V III) [J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(3): 1-9
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation (V III) [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1995, 9(3): 1-9.)
- [2] 汪培庄 模糊集与随机集落影[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.
- [3] 李洪兴 因素空间理论与知识表示的数学框架(IX) [J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(2): 12-19
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation (IX) [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1996, 10(2): 12-19.)
- [4] 朱勇珍, 李洪兴 状态变权的公理化体系和均衡函数的构造[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 116-118
(Zhu Y Z, Li H X. Axiomatic system of state variable weights and construction of balance functions[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 1999, 19(7): 116-118.)
- [5] 刘文奇 均衡函数及其在变权综合中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(4): 58-64
(Liu W Q. Balanced function and its application for variable weight synthesizing[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 1997, 17(4): 58-64.)
- [6] 李德清, 李洪兴 状态变权向量的性质与构造[J]. 北京师范大学学报, 2002, 38(4): 455-461
(Li D Q, Li H X. The properties and construction of state variable weight vectors[J]. *J of Beijing Normal University*, 2002, 38(4): 455-461.)
- [7] 姚炳学, 李洪兴 局部变权的公理体系[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(1): 106-109
(Yao B X, Li H X. Axiomatic system of local variable weight [J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2000, 20(1): 106-109.)
- [8] 李洪兴 综合分析[J]. 模糊系统与数学, 1988, 2(1): 9-19
(Li H X. Synthesizing analysis [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1988, 2(1): 9-19.)
- [9] Li Hongxing Multifactorial functions in fuzzy sets theory [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 33(1): 69-84.)
- [10] 汪培庄, 李洪兴 模糊系统理论与模糊计算机[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [11] 李洪兴, 汪培庄 模糊数学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.
- [12] 张剑湖, 何湘藩 变权综合决策方法及应用[J]. 云南大学学报, 1999, 21(6): 443-445
(Zhang J H, He X F. The method of variable weights synthesizing decision making and its application [J]. *J of Yunnan University*, 1999, 21(6): 443-445.)
- [13] 李洪兴, Yen V C. 因素空间与模糊决策[J]. 北京师范大学学报, 1994, 30(1): 41-46
(Li H X, Yen V C. Factor spaces and fuzzy decision-making [J]. *J of Beijing Normal University*, 1994, 30(1): 41-46.)
- [14] Zopounidis C, Doumpos M. Multi-group discrimination using multi-criteria analysis: Illustrations from the field of finance [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 139: 371-389.
- [15] Doumpos M, Kosmidou K, Baourakis G, et al Credit assessment using a multi-criteria hierarchical discrimination approach: A comparative analysis [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 138(2): 392-412.
- [16] 高峰记 不完全信息下对方案有偏好的多指标决策 [J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 94-97.
(Gao F J. Multiple attribute decision making on plans with alternative preference under incomplete information [J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2000, 20(4): 94-97.)
- [17] 徐泽水 求解不确定型多属性决策问题的一种新方法 [J]. 系统工程学报, 2002, 17(2): 177-181.
(Xu Z S. New method for uncertain multi-attribute decision making problems [J]. *J of Systems Engineering*, 2002, 17(2): 177-181.)
- [18] Park K S, Kim S H. Tools for interactive multi-attribute decision making with incompletely identified information [J]. *European J of Operational Research*, 1997, 98(1): 111-123.
- [19] Soung H K, Chang H H. An interactive procedure for multi-attribute group decision making with incomplete information [J]. *Computers & Operations Research*, 1999, 26(8): 755-772.
- [20] 吴良刚 运筹学[M]. 长沙: 湖南人民出版社, 2001.
- [21] Mousseau V, Figueira J, Dias L, et al Resolving inconsistencies among constraints on the parameters of an MCDA model [J]. *European J of Operational Research*, 2003, 147(1): 72-93.

(上接第 1240 页)

- [14] Zopounidis C, Doumpos M. Multi-group discrimination using multi-criteria analysis: Illustrations from the field of finance [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 139: 371-389.
- [15] Doumpos M, Kosmidou K, Baourakis G, et al Credit assessment using a multi-criteria hierarchical discrimination approach: A comparative analysis [J]. *European J of Operational Research*, 2002, 138(2): 392-412.
- [16] 高峰记 不完全信息下对方案有偏好的多指标决策 [J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 94-97.
(Gao F J. Multiple attribute decision making on plans with alternative preference under incomplete information [J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2000, 20(4): 94-97.)
- [17] 徐泽水 求解不确定型多属性决策问题的一种新方法 [J]. 系统工程学报, 2002, 17(2): 177-181.
(Xu Z S. New method for uncertain multi-attribute decision making problems [J]. *J of Systems Engineering*, 2002, 17(2): 177-181.)
- [18] Park K S, Kim S H. Tools for interactive multi-attribute decision making with incompletely identified information [J]. *European J of Operational Research*, 1997, 98(1): 111-123.
- [19] Soung H K, Chang H H. An interactive procedure for multi-attribute group decision making with incomplete information [J]. *Computers & Operations Research*, 1999, 26(8): 755-772.
- [20] 吴良刚 运筹学[M]. 长沙: 湖南人民出版社, 2001.
- [21] Mousseau V, Figueira J, Dias L, et al Resolving inconsistencies among constraints on the parameters of an MCDA model [J]. *European J of Operational Research*, 2003, 147(1): 72-93.