文章编号: 1001-0920(2004)11-1241-05

变权决策中变权效果分析与状态变权向量的确定

李德清, 李洪兴
(北京师范大学 数学系, 北京 100875)

摘 要: 引入状态变权向量调节度和标准调节度以及调权水平的概念, 为分析状态变权向量调节权重的能力提供了可量化的工具. 利用标准调节度讨论了选择状态变权向量的一些基本原则和理论依据, 并由调权水平给出了一种选择状态变权向量的可操作性方法.

关键词: 状态变权向量; 离散度; 调节度; 标准调节度; 调权水平
中图分类号: O159 **文献标识码**: A

Analysis of variable weights effect and selection of appropriate state variable weights vector in decision making

LI De-qing, LI Hong-xing
(Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China. Correspondent: LI Hong-xing, E-mail: lhxqx@bnu.edu.cn)

Abstract: Concepts of adjustment degree, standard adjustment degree and level of adjusting weights of state variable weights vector are introduced. Several measurable tools to analyze the effect of state variable weights vector are obtained. By applying standard adjustment degree, some principles and theoretic foundations of selection of appropriate state variable weights vector are discussed. Via the use of adjusting weights level of state variable weights vector, an operational method to select appropriate state variable weights vector is proposed.

Key words: state variable weights vector; dispersion degree; adjustment degree; standard adjustment degree; level of adjusting weights

1 引 言

在多因素决策问题中, 一种常用的决策模型是加权平均模型 $\sum_{j=1}^{m} w_j x_j$, 其中: w_j 为因素的权重, 满足 $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$; x_j $(j = 1, \cdots, m)$ 为因素的状态值. 在此模型中无论状态值如何变化, 权重总是保持不变, 故称其为常权综合. 但对于实际决策问题, 这种"常权综合"具有一定的片面性, 有时可能导致不科学的决策[1]. 为此, 文献[2]提出了变权的思想, 文献[1]进一步给出了变权综合决策模型 $\sum_{j=1}^{m} w_j(x_1, \cdots, x_m) x_j$, 其中: $w_j(x_1, \cdots, x_m)$ 是与因素状态值有关的变权, 满足归一性条件 $\sum_{j=1}^{m} w_j(x_1, \cdots, x_m) = 1$. 根据权重的变化趋势, 文献[1, 3]将变权分为惩罚型变权、激励型变权和混合型变权3种形式, 并给出了每种变权的公理化定义. 为研究权重变化规律, 又相应

收稿日期: 2003-12-16; **修回日期**: 2004-03-29.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60174013); 国家973重大基础研究基金资助项目(2002CB312200); 教育部博士点基金资助项目(20020027013); 教育部科学技术重点项目(03184).
作者简介: 李德清(1965—), 男, 江西萍乡人, 硕士生, 从事模糊数学与人工智能的研究; 李洪兴(1953—), 男, 天津人, 教授, 博士生导师, 从事模糊数学与人工智能的研究.

地引入了惩罚型、激励型和混合型状态变权向量及均衡函数的概念, 并得出如下重要结论: 设 $X = (x_1, \cdots, x_m)$ 为因素状态向量, $W = (w_1, \cdots, w_m)$ 为因素常权向量, $S(X) = (S_1(X), \cdots, S_m(X))$ 为状态变权向量, 则变权向量 $W(X) = (w_1(X), \cdots, w_m(X))$ 可表示为 W 和 $S(X)$ 的归一化的 Hadamard 乘积, 即

$$w_j(X) = w_j S_j(X) \Big/ \sum_{k=1}^{m} w_k S_k(X),\quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

因为均衡函数的梯度向量构成状态变权向量, 这样, 在实际应用中构成合适的状态变权向量或均衡函数, 也就相当于确定了因素之间权重的变化规律. 随后, 有许多文献研究了状态变权向量与均衡函数的性质及构造方法[3~11]. 另外, 学者们还对如何将变权方法应用于解决实际问题进行了研究[12, 13]. 但在已经构造好的状态变权向量中, 如何选择一个符合决策问题变权规律的状态变权向量, 仍是一个空白. 而它却是构建变权模型的关键. 因为只有选择了合适的状态变权向量, 实际问题的变权规律才能在建立的决策模型中得到真正的体现. 本文对此进行了重点研究, 通过引入离散度和调节度以及调权水平等概念, 对状态变权向量调节权重的能力给出了一些度量方法, 为分析状态变权向量的变权效果提供了理论工具, 并为如何选择合适的状态变权向量给出了一些原则和依据, 使之具有了更强的可操作性.

2 离散度和调节度

变权的目的是根据因素状态之间的均衡水平调整各因素在综合决策中的作用. 因此, 在变权综合中, 如何衡量因素状态的均衡程度并据此选择合适的状态变权向量, 是一个值得探讨的问题. 首先给出如下概念:

定义 1 设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为因素状态向量, 称

$$d(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)^2 \tag{1}$$

为该状态向量的离散度.

不难理解, 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$ 时, 可认为此时因素状态之间保持绝对均衡, 故离散度反映了因素状态向量和绝对均衡的偏差程度. 离散度的值越大, 说明因素状态之间的均衡程度越低; 离散度的值越小, 则因素状态之间均衡程度越高. 下面给出离散度的一些性质:

性质 1(对称性)

$$d(x_1, \cdots, x_m) = d(y_1, \cdots, y_m), \tag{2}$$

其中 $(y_1, \cdots, y_m)$ 是 $(x_1, \cdots, x_m)$ 的重排.

性质 2(幂零性)

$$d(a, a, \cdots, a) = 0. \tag{3}$$

性质 3 当 m 为偶数时, $d(X)$ 在

$$X = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{m/2}, 0, \cdots, 0)$$

处得到最大值 $m/4$; 当 m 为奇数时, $d(X)$ 在

$$X = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{(m-1)/2}, 0, \cdots, 0)$$

处得到最大值 $(m^2 - 1)/(4m)$.

状态变权向量的主要功能是根据因素状态值的变化调节各因素的权重, 从而使因素的权重能更好地反映相应因素在决策中的作用. 不同的状态变权向量调节权重的能力不一样, 而同一状态变权向量在不同的状态向量下对权重的调节能力也不一样. 下面引入调节度的概念, 使状态变权向量调节权重的能力有一个衡量标准.

定义 2 设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为因素的状态向量, $W = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 为因素的常权向量, $S(X) = (S_1(X), S_2(X), \cdots, S_m(X))$ 为状态变权向量, $W(X) = (w_1(X), w_2(X), \cdots, w_m(X))$ 是由 $S(X)$ 得到的变权向量. 令

$$D(X) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} (w_j(X) - w_j)^2, \tag{4}$$

称 $D(X)$ 为状态变权向量 $S(X)$ 在状态向量 X 下对常权向量 W 的调节度.

易知 $D(X) \in [0, 1]$. 调节度反映了状态变权向量调节权重的能力, 调节度越大, 因素之间权重的转移越多. 在实际应用中, 如果希望权重的调节大, 则选择调节度大的状态变权向量; 否则, 则选择调节度小的状态变权向量. 对于调节度, 易证:

定理 1 设 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 为因素常权向量, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为状态向量, $S(X)$ 为状态变权向量, 则 $S(X)$ 的调节度 $D(X) = 0$ 的充要条件是

$$S_1(X) = S_2(X) = \cdots = S_m(X). \tag{5}$$

从性质 3 可知, 最不均衡的状态向量是 X_0, 其中当 m 为偶数时 $X_0 = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{m/2}, 0, \cdots, 0)$, 当 m 为奇数时 $X_0 = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{(m-1)/2}, 0, \cdots, 0)$. 给定常权向量 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$, 状态变权向量 $S(X)$ 在 X_0 下的调节度 $D(X_0)$, 从一个侧面反映了该状态变权向量调节权重的能力, $D(X_0)$ 称为 $S(X)$ 的"标准调节度." 在决策问题中, 如果对均衡性要求较高, 则选择标准

调节度大的状态变权向量; 如果要求不高, 则可选取标准调节度稍低的状态变权向量. 对于标准调节度, 有以下结论:

定理 2　对由

$$S_j(x_1, x_2, \cdots, x_m) = e^{-\alpha(x_j - \bar{x})},\quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{6}$$

构作的状态变权向量 $S(X)$, 其标准调节度 $D(X_0)$ 随 $|\alpha|$ 的增大而增大.

证明　设 m 为偶数. 已知当 $\alpha \geq 0$ 时, $S(X)$ 为惩罚型状态变权向量; 当 $\alpha \leq 0$ 时, $S(X)$ 为激励型状态变权向量[6]. 证明如下:

1) 惩罚型: 设因素常权向量 $W = (w_1, \cdots, w_m)$, 则

$$D(X_0) = \sum_{j=1}^{m/2}\left(w_j e^{-\frac{\alpha}{2}} \Big/ \left(\sum_{k=1}^{m/2} w_k e^{-\frac{\alpha}{2}} + \sum_{k=m/2}^{m} w_k e^{\frac{\alpha}{2}}\right) - w_j\right)^2 + \sum_{j=m/2}^{m}\left(w_j e^{\frac{\alpha}{2}} \Big/ \left(\sum_{k=1}^{m/2} w_k e^{-\frac{\alpha}{2}} + \sum_{k=m/2}^{m} w_k e^{\frac{\alpha}{2}}\right) - w_j\right)^2.$$

令 $\sum_{k=1}^{m/2} w_k = b$, 则 $\sum_{k=m/2}^{m} w_k = 1 - b$. 因而有

$$D(X_0) = \sum_{j=1}^{m/2}\left(w_j e^{-\frac{\alpha}{2}} / (b e^{-\frac{\alpha}{2}} + (1 - b) e^{\frac{\alpha}{2}}) - w_j\right)^2 + \sum_{j=m/2}^{m}\left(w_j e^{\frac{\alpha}{2}} / (b e^{-\frac{\alpha}{2}} + (1 - b) e^{\frac{\alpha}{2}}) - w_j\right)^2.$$

当 $\alpha \geq 0$ 时, 只需证明和式中每项均关于 α 单调增. 事实上, 第 1 个和式中的每一项为

$$\left(w_j e^{-\frac{\alpha}{2}} / (b e^{-\frac{\alpha}{2}} + (1 - b) e^{\frac{\alpha}{2}}) - w_j\right)^2 = \left(w_j (1 - b)(e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{\alpha}{2}}) / (b e^{-\frac{\alpha}{2}} + (1 - b) e^{\frac{\alpha}{2}})\right)^2,$$

因 $(e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{\alpha}{2}}) / (b e^{-\frac{\alpha}{2}} + (1 - b) e^{\frac{\alpha}{2}}) \geq 0$, 并易证该式关于 α 单增, 所以, 第 1 个和式中的每一项均关于 α 单增. 同理可证第 2 个和式中的每一项也关于 α 单调增, 故 $D(X_0)$ 关于 α 单调增.

2) 激励型的情形证明同 1). □

定理 3　对均衡函数

$$B(X) = 2\sum_{j=1}^{m} x_j - \alpha d(X), \alpha \in [0, 1], \tag{7}$$

由其梯度向量构成的状态变权向量的标准调节度关于 α 单调增.

证明过程与定理 2 类似, 略.

3　调权水平与状态变权向量的选取

对惩罚型状态变权向量, 还可以从另外一个角度进行分析. 设 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 为因素常权向量, $S(X)$ 为惩罚型状态变权向量, 讨论在 $X_j = (1, \cdots, 1, x_j, 1, \cdots, 1)$ 且 $x_j \to 0$ 时, 因素 f_j 的变权及其对决策的影响. 记此时的变权为 $w_j(X_j)$, 易知 $w_j(X_j)$ 为因素 f_j 的最大变权值. 该值在某种程度上反映了因素 f_j 对决策方案否决权的大小, 也反映了决策问题对均衡性要求的高低. $w_j(X_j)$ 的值越大, 说明有明显缺陷的因素对决策的影响越大, 也说明该决策问题对均衡性的要求越高. 因此, 如果对均衡性要求高, 则 $w_j(X_j)$ 的值就应取较大; 反之, 如果对均衡性要求低, 则 $w_j(X_j)$ 的值可取小一些. 为综合利用 $w_j(X_j)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ 分析变权效果, 令

$$A = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_j(X_j), \tag{8}$$

称 A 为状态变权向量 $S(X)$ 的调权水平. 因为 $w_j \leq w_j(X_j) \leq 1$, 所以 $A \in [1/m, 1]$. A 的值从总体上反映了状态变权向量对因素状态之间均衡性的调节能力, 也从另一个角度反映了状态变权向量的变权效果. 不同的决策问题对因素状态之间的均衡性有不同的要求, 因而也就对状态变权向量的调权水平有不同的要求. 因此, 在实际应用中, 可根据对调权水平的要求选择状态变权向量. 对给定的常权向量 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$, 调权水平有以下性质:

性质 4　$A = 1$ 的充要条件是

$$w_j(X_j) = 1, j = 1, 2, \cdots, m. \tag{9}$$

性质 5　$A = 1/m$ 的充要条件是

$$w_j(X_j) = w_j, j = 1, 2, \cdots, m. \tag{10}$$

下面讨论几类常见的状态变权向量[1~6] 的调权水平.

1) 设 $S_1(X) = S_2(X) = \cdots = S_m(X)$, 此时 $w_j(X_j) = w_j, j = 1, 2, \cdots, m$, 故 $A = 1/m$.

2) 经验公式 $S'_j(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \prod_{i \neq j} x_i$. 因为

$$w_j(X_j) = \lim_{x_j \to 0}(w_j / x_j) / [(1 - w_j) + w_j / x_j] = 1, \tag{11}$$

所以 $A = 1$.

注 1　文献[1]强调"经验公式只是一类状态变权向量, 不可滥用." 本文给出了该思想的一种解释, 因为从上述结论可以看出, 当允许某些因素状态值很小甚至为零时, 这样的决策问题就不宜采用经验公式.

3) 由均衡函数 $B(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j^{\alpha}$ $(\alpha \in [0, 1])$ 的梯度向量构成的状态变权向量, 易知 $w_j(X_j) = 1$, 故 A

$= 1.$

4) $S_j(x_1, x_2, \cdots, x_m) = e^{-\alpha(x_j - \bar{x})}, j = 1, 2, \cdots, m, \alpha \geq 0.$ 此时

$$w_j(X_j) = w_j / [w_j + (1 - w_j)e^{-\alpha}], \quad (12)$$

因而

$$A = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} w_j / [w_j + (1 - w_j)e^{-\alpha}]. \quad (13)$$

可以看出 $S(X)$ 的调权水平 A 关于 α 单增. 当 $\alpha \to 0$ 时, $A \to 1/m$; 当 $\alpha \to +\infty$ 时, $A \to 1.$

5) 一般由和型均衡函数 $\sum_{j=1}^{m} g(x_j)$ ($g'(t) > 0$ 且单调减) 所得到的状态变权向量的调权水平. 因为 $S_j(X) = g'(x_j)$, 所以

$$w_j(X_j) = \lim_{x_j \to 0} w_j g(x_j) / [w_j g(x_j) + (1 - w_j) g(1)], \quad (14)$$

此时

$$A = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \lim_{x_j \to 0} (w_j g(x_j) / (w_j g(x_j) + (1 - w_j) g(1))). \quad (15)$$

6) 由一般积型均衡函数 $\prod_{j=1}^{m} h(x_j)$ ($h'(t) > 0$ 且单调减) 所得到的状态变权向量的调权水平. 因此时 $S_j(X) = h'(x_j) \prod_{k \neq j} h(x_k)$, 所以

$$\begin{aligned} w_j(X_j) = {} & \lim_{x_j \to 0} w_j h'(x_j) [h(1)]^{m-1} / \{w_j h'(x_j) [h(1)]^{m-1} + \\ & (1 - w_j) h(x_j) h'(1) [h(1)]^{m-2}\} = \\ & \lim_{x_j \to 0} w_j h'(x_j) [h(1)]^{m-1} / \{w_j h'(x_j) [h(1)]^{m-1} + \\ & (1 - w_j) h(x_j) h'(1) [h(1)]^{m-2}\}. \end{aligned} \quad (16)$$

故

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} & \lim_{x_j \to 0} \{w_j h'(x_j) [h(1)]^{m-1} / \\ & [w_j h'(x_j) (h(1))^{m-1} + (1 - \\ & w_j) h(x_j) h'(1) (h(1))^{m-2}]\}. \end{aligned} \quad (17)$$

可以看出, 经验公式和均衡函数 $B(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j^{\alpha}$ ($\alpha \in [0, 1]$) 的梯度向量构成的状态变权向量的调权水平最大, 说明由它们建立的变权综合模型最注重因素状态间的均衡关系. 对于一个实际决策问题, 如果对均衡性的要求很高, 则可考虑选取调权水平为 1, 此时应选择经验公式或由均衡函数 $B(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j^{\alpha}$ 得到的状态变权向量. 一般情况下, 可选其他几类状态变权向量, 如 $S_j(X) = e^{-\alpha(x_j - \bar{x})}, j = 1, 2, \cdots, m$. 此时首先请专家确定调权水平, 再由调权水平确定状态变权向量中的参数, 由此选择出合适的状态变权向量. 下面举例说明该方法的应用和效果.

假定 $f_1, f_2, \cdots, f_7$ 为与决策相关的 7 个因素, 其权重分别为 0.1, 0.15, 0.1, 0.25, 0.1, 0.1, 0.2, 即 $W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (0.1, 0.15, 0.1, 0.25, 0.1, 0.1, 0.2)$. 如果专家确定的调权水平为 $A = 0.5$, 则选取由 $S_j(x_1, x_2, \cdots, x_m) = e^{-\alpha(x_j - \bar{x})}$ ($j = 1, 2, \cdots, m$) 构成的状态变权向量 $S(X)$. 由式 (13) 得 $\alpha = 1.8631$, 此时各因素的最大变权分别为: 0.4172, 0.5320, 0.4172, 0.6823, 0.4172, 0.4172, 0.6169. 因专家认为当每个因素状态值很小时对决策的否决程度较大, 故给定的调权水平也相应变大, 假定取 $A = 0.8$, 则可得 $\alpha = 3.2985$, 此时各因素的最大变权分别为: 0.7504, 0.8268, 0.7504, 0.9002, 0.7504, 0.7504, 0.8712. 从上述数据可以看出, 当调权水平增大时, 各因素的最大变权也增大, 说明各因素有明显缺陷时对决策的影响也增大, 但这种影响与因素的常权有关, 常权越大, 则影响越大. 这样的结果基本符合生活常识, 因而利用调权水平来确定状态变权向量是一种可行的方法.

4 结 论

状态变权向量在变权综合理论中具有重要作用, 它一旦确定, 则变权综合中的变权规律也得以确定. 现有文献对如何构造状态变权向量进行了深入的研究, 并已获得许多不同类型的状态变权向量. 但正如本文所讨论的, 每一类状态变权向量都有其适用范围, 不同的决策问题应选用不同的类型. 因此, 在决策过程中如何选择合适的状态变权向量, 对变权综合而言是关键问题. 这说明如何制定一些普适原则来讨论状态变权向量的选用问题是一个非常有意义的研究课题. 本文通过定义离散度和调节度以及调权水平, 为分析状态变权向量的变权效果提供了量化工具. 调节度和标准调节度反映了状态变权向量调节权重的能力大小, 调节度越大, 则因素之间的权重转移越多. 在实际应用中, 如果对均衡性要求较高, 则选择标准调节度大的状态变权向量, 反之, 则应选择标准调节度小的状态变权向量. 调权水平既说明了不同的状态变权向量有不同的适用范围, 同时也为选用状态变权向量提供了一种可操作性的方法.

参考文献(References):

[1] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(VIII)[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(3): 1-9.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation (VIII) [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1995, 9(3): 1-9.)

[2] 汪培庄. 模糊集与随机集落影[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.

[3] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架(IX)[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(2): 12-19.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation (IX) [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1996, 10(2): 12-19.)

[4] 朱勇珍, 李洪兴. 状态变权的公理化体系和均衡函数的构造[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 116-118.
(Zhu Y Z, Li H X. Axiomatic system of state variable weights and construction of balance functions[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 1999, 19(7): 116-118.)

[5] 刘文奇. 均衡函数及其在变权综合中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(4): 58-64.
(Liu W Q. Balanced function and its application for variable weight synthesizing[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 1997, 17(4): 58-64.)

[6] 李德清, 李洪兴. 状态变权向量的性质与构造[J]. 北京师范大学学报, 2002, 38(4): 455-461.
(Li D Q, Li H X. The properties and construction of state variable weight vectors[J]. *J of Beijing Nomal University*, 2002, 38(4): 455-461.)

[7] 姚炳学, 李洪兴. 局部变权的公理体系[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(1): 106-109.
(Yao B X, Li H X. Axiomatic system of local variable weight[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2000, 20(1): 106-109.)

[8] 李洪兴. 综合分析[J]. 模糊系统与数学, 1988, 2(1): 9-19.
(Li H X. Synthesizing analysis [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1988, 2(1): 9-19.)

[9] Li Hongxing. Multifactorial functions in fuzzy sets theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, 33(1): 69-84.)

[10] 汪培庄, 李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机[M]. 北京: 科学出版社, 1996.

[11] 李洪兴, 汪培庄. 模糊数学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.

[12] 张剑湖, 何湘藩. 变权综合决策方法及应用[J]. 云南大学学报, 1999, 21(6): 443-445.
(Zhang J H, He X F. The method of variable weights synthesizing decision-making and its application[J]. *J of Yunnan University*, 1999, 21(6): 443-445.)

[13] 李洪兴, Yen V C. 因素空间与模糊决策[J]. 北京师范大学学报, 1994, 30(1): 41-46.
(Li H X, Yen V C. Factor spaces and fuzzy decision-making[J]. *J of Beijing Nomal University*, 1994, 30(1): 41-46.)

(上接第 1240 页)

[14] Zopounidis C, Doumpos M. Multi-group discrimination using multi-criteria analysis: Illustrations from the field of finance[J]. *European J of Operational Research*, 2002, 139: 371-389.

[15] Doumpos M, Kosmidou K, Baourakis G, et al. Credit assessment using a multi-criteria hierarchical discrimination approach: A comparative analysis[J]. *European J of Operational Research*, 2002, 138(2): 392-412.

[16] 高峰记. 不完全信息下对方案有偏好的多指标决策[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 94-97.
(Gao F J. Multiple attribute decision making on plans with alternative preference under incomplete information[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2000, 20(4): 94-97.)

[17] 徐泽水. 求解不确定型多属性决策问题的一种新方法[J]. 系统工程学报, 2002, 17(2): 177-181.
(Xu Z S. New method for uncertain multi-attribute decision making problems[J]. *J of Systems Engineering*, 2002, 17(2): 177-181.)

[18] Park K S, Kim S H. Tools for interactive multi-attribute decision making with incompletely identified information[J]. *European J of Operational Research*, 1997, 98(1): 111-123.

[19] Soung H K, Chang H H. An interactive procedure for multi-attribute group decision making with incomplete information[J]. *Computers & Operations Research*, 1999, 26(8): 755-772.

[20] 吴良刚. 运筹学[M]. 长沙: 湖南人民出版社, 2001.

[21] Mousseau V, Figueira J, Dias L, et al. Resolving inconsistencies among constraints on the parameters of an MCDA model[J]. *European J of Operational Research*, 2003, 147(1): 72-93.