第 19 卷 第 12 期 控 制 与 决 策 2004 年 12 月
Vol 19 No. 12 Control and Decision Dec 2004

文章编号: 1001-0920(2004)12-1368-05

一种模糊系统稳定性的分析方法

张 钊, 吴爱国, 方来华
(天津大学 电气与自动化学院, 天津 300072)

摘 要: 针对 T-S 型模糊系统进行局部稳定性分析. 首先指出模糊系统全局渐近稳定充分条件的不足, 证明了此条件不是必要条件; 然后将模糊集合的隶属度函数代入模糊系统表达式, 得到一个特殊的非线性离散系统, 从系统分析的区域、判定稳定的条件及稳定范围 3 方面确定稳定区域; 最后对不稳定的系统给出了不稳定判据. 仿真实例证明了这种方法的有效性. 该方法对系统稳定点附近局部稳定性的判定有着很强的实用价值.

关键词: 模糊系统; T-S 模型; 稳定性; 非线性离散系统
中图分类号: TP11 **文献标识码**: A

Stability analysis method of fuzzy systems

ZHANG Zhao, WU Ai-guo, FANG Lai-hua
(School of Electrical and Automation Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China. Correspondent: ZHANG Zhao, E-mail: zh9219@163.com)

Abstract: Local stability of T-S fuzzy systems is analyzed. The deficiency of global asymptotic stability sufficient condition of fuzzy systems is pointed out. This condition is proved not to be necessary condition. The membership functions of fuzzy sets are substituted in fuzzy system expressions to derive a special nonlinear discrete system. The stability region is determined from three aspects: the analysis region, stability criterion condition and stability range. The instability criterion is presented with regard to instable systems. A simulation example shows the validity of the method.

Key words: fuzzy system; T-S model; stability; nonlinear discrete system

1 引 言

模糊系统稳定性分析是模糊控制理论的关键性问题之一. 文献[1]提出了一类重要的模糊系统模型, 简称 T-S 模型. 针对该模型稳定性的判定, 人们做了大量的工作. 文献[2]利用 Lyapunov 方法对 T-S 型模糊系统进行稳定性分析, 给出了系统稳定的充分条件, 并进行了理论上的证明. 即要求对所有模糊推理子系统的系统矩阵 $A_i(i=1,2,\cdots,l)$ 存在同一个公共正定矩阵 P, 且满足 Lyapunov 方程 $A_i^{\mathrm{T}}PA_i-P=-Q$ (Q 正定, $i=1,2,\cdots,l$); 文献[3～6]用一组 P 矩阵代替公共矩阵 P, 构造一个逐段近似平滑的二次型 Lyapunov 函数进行稳定性分析; 文献[7～9]则用线性矩阵不等式描述稳定性条件.

尽管文献[2]提出了系统稳定的充分条件, 但没有给出必要条件, 当公共正定矩阵 P 不存在时, 系统的稳定性便无法研究; 即使这个矩阵存在, 对于所有的子系统矩阵而言, 寻找一个公共正定阵 P 也是非常困难的.

本文指出了 T-S 模型全局渐近稳定充分条件的不足之处, 证明了其并非必要条件; 然后利用对非线性系统稳定性判定的方法, 对 T-S 型模糊系统进行稳定性分析; 进而分析了局部渐近稳定性以及判定稳定区域.

收稿日期: 2004-01-05; **修回日期**: 2004-04-19.
作者简介: 张钊(1965—), 男, 山东济南人, 副教授, 博士生, 从事智能系统、智能控制等研究; 吴爱国(1954—), 男, 山东德州人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论等研究.

2 T-S 模型开环稳定的充分条件

2 1 T-S 模型

T-S 模糊模型是指具有如下模糊蕴涵条件的模糊系统: 若 $x = M$, 则 $y = N$, 其中 N 是 x 的线性函数 模型的一般形式为

$$R^i:\ \text{if } x(k) \text{ is } M_1^i \text{ and } x(k-1) \text{ is } M_2^i \text{ and} \cdots \text{and } x(k-n+1) \text{ is } M_n^i,$$
$$\text{then } x(k+1) = a_1^i x(k) + a_2^i x(k-1) + \cdots + a_n^i x(k-n+1).$$

其中: $R^i(i = 1, 2, \cdots, l)$ 代表第 i 条模糊规则, l 为规则的总数; $x(k), x(k-1), \cdots, x(k-n+1)$ 为系统的状态变量; M 为状态变量的模糊集合; $x(k+1)$ 为被控系统的输出; a_j^i 为专用的系数

将上述模型写成矩阵形式, 有

$$x(k+1) = A_i x(k). \tag{1}$$

其中

$$x(k) = [x(k), x(k-1), \cdots, x(k-n+1)],$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_1^i & a_2^i & \cdots & a_{n-1}^i & a_n^i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$x(k) \in R^n, A_i \in R^n \times R^n.$$

系统总输出为

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{l} w^i(k) A_i x(k) \Big/ \sum_{i=1}^{l} w^i(k). \tag{2}$$

其中 w^i 为第 i 条规则的激活度, 即

$$w^i = \prod_{p=1}^{n} M_p^i [x(k-p+1)].$$

2 2 T-S 模型稳定的充分条件

模糊系统(2) 稳定的充分条件是, 对所有子系统存在一个公共的正定阵 P, 使得

$$A_i^{\mathrm{T}} P A_i - P = -Q \ (Q \text{ 正定}, i = 1, 2, \cdots, l).$$

2 3 充分条件的非必要性

T-S 模糊系统是多条模糊规则的加权平均, 其激活度由隶属函数决定 显然, 同一组模糊规则, 由于各自的隶属函数不同, 组成的模糊系统也不同, 其稳定性也必然不同 该充分条件没有涉及模糊规则的隶属函数, 就是说, 由此充分条件判定稳定的模糊系统, 无论各条规则的隶属函数如何, 所构成的模糊系统都是稳定的, 显然这个判据过于保守 有时公共正定阵不存在, 系统也可能是稳定的, 这说明公共正定阵 P 的存在并不是系统稳定的必要条件, 现证明如下:

给定由 l 个模糊规则和各自隶属函数分别为 M^i 组成的 T-S 型模糊系统

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{l} w^i(k) A_i x(k) \Big/ \sum_{i=1}^{l} w^i(k),$$

该系统存在公共正定阵 P, 使 $A_i^{\mathrm{T}} P A_i - P = -Q$ (Q 正定, $i = 1, 2, \cdots, l$). 由充分条件知该系统是稳定的

再来分析另一个模糊系统:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{l+1} w^i(k) A_i x(k) \Big/ \sum_{i=1}^{l+1} w^i(k),$$

它具有 $l+1$ 个模糊规则, 前 l 个规则和隶属函数与给定的模糊系统相同, 第 $l+1$ 个规则 $x^{l+1}(k+1) = A_{l+1} x^{l+1}(k)$ 是不稳定的系统 即对状态矩阵 A_{l+1} 不存在矩阵 P, 使 $A_{l+1}^{\mathrm{T}} P A_{l+1} - P = -Q$ (Q 正定), 所以对于系统

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{l+1} w^i(k) A_i x(k) \Big/ \sum_{i=1}^{l+1} w^i(k)$$

不存在公共矩阵 P, 使得 $A_i^{\mathrm{T}} P A_i - P = -Q$ (Q 正定, $i = 1, 2, \cdots, l, l+1$).

另一方面, 当第 $l+1$ 个规则的隶属函数 M^{l+1} 为零时, $w_{l+1}(k) = 0$ 则系统

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{l+1} w^i(k) A_i x(k) \Big/ \sum_{i=1}^{l+1} w^i(k) = \sum_{i=1}^{l} w^i(k) A_i x(k) \Big/ \sum_{i=1}^{l} w^i(k)$$

就是给定的系统, 所以该系统是稳定的 □

因此说稳定的模糊系统不一定有公共的矩阵 P. 另外, 寻找公共矩阵 P 是很困难的, 相当于 P 的一个超定线性方程组解存在的问题, 而这一超定线性方程组解存在的可能性很小 所以利用该充分条件进行模糊系统的稳定性分析, 条件过于苛刻, 对于大部分系统不适用, 从而限制了它的应用范围

3 T-S 模型稳定性分析

3 1 系统描述

对于式(2) 表达的模糊系统

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{l} w^i(k) A_i x(k) \Big/ \sum_{i=1}^{l} w^i(k) = \frac{\sum_{i=1}^{l} w^i(k) A_i}{\sum_{i=1}^{l} w^i(k)} x(k),$$

其中: $w^i = \prod_{p=1}^{n} M_p^i [x(k-p+1)]$, w^i 是 $x(k)$ 的函

数,而

$$A_i=\begin{bmatrix} a_1^i & a_2^i & \cdots & a_{n-1}^i & a_n^i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

则可令

$$w^i = g^i[x(k)],$$

$$G[x(k)] = \frac{\sum_{i=1}^{l} w^i(k)A_i}{\sum_{i=1}^{l} w^i(k)} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{l} a_1^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} & \frac{\sum_{i=1}^{l} a_2^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} & \cdots & \frac{\sum_{i=1}^{l} a_n^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

于是模糊系统的表达式可写为

$$x(k+1) = G[x(k)]x(k). \tag{3}$$

式(3) 是一个非线性离散系统状态方程的矩阵表达形式,其状态矩阵只有第一行是有效参数 此非线性方程可以表示为

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{l} a_1^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} x(k) + \frac{\sum_{i=1}^{l} a_2^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} x(k-1) + \cdots + \frac{\sum_{i=1}^{l} a_n^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} x(k-n+1). \tag{4}$$

3.2 确定分析区域

在实际分析中还存在一些问题,如针对每个规则的隶属函数在整个区域内往往不是一个表达式,而是由多个表达式的分段函数按 x 的取值分区 所以 $G[x(k)]$ 也是一个分区域表达的多矩阵,式(4) 也将形成多个表达式,直接进行稳定性分析显然是很困难的 然而对于系统来说,围绕着平衡点总存在一个区域 Ω_1,在 Ω_1 内每个规则的隶属函数都可用一个表达式来表示 于是在区域 Ω_1 内矩阵 $G[x(k)]$ 的所有元素都是一个表达式,依此矩阵判定系统的稳定性,就是系统在这个区域 Ω_1 内的稳定性

3.3 确定稳定区域

因为是在区域 Ω_1 内判定系统(3) 的稳定性,所以可将矩阵 $G[x(k)]$ 内的变量 $x(k)$ 看作是在 Ω_1 内变化的常数,这样系统就变成了一个线性定常离散系统

$$x(k+1) = G[x(k)]x(k).$$

方法 1 系统稳定的充分必要条件是:矩阵 $G[x(k)]$ 的特征值在单位圆 $\|Z\| = 1$ 内 因此在 Ω_1 内分析矩阵的特征值,使所有特征值均在单位圆内,确定变量 $x(k)$ 的取值范围,由此可求出系统稳定的区域 Ω_2

方法 2 当 $G[x(k)]$ 为 3 阶以上矩阵时,很难用特征值的方法确定 $x(k)$ 的取值范围 这时可用李雅普诺夫对线性定常离散系统的渐近稳定判定的充要条件进行确定:对于任意给定的正定实对称阵 Q,必存在一个正定实对称阵 P,且满足 $G^{\mathrm{T}}PG - P = -Q$. 可令 $Q = I$,使 P 正定可求出 $x(k)$ 的取值范围,得到 Ω_2

3.4 确定判定条件

按以上充分必要条件进行分析时,还必须满足一个条件,即当 $x(k)$ 在某一区域 Ω_3 内时,必须保证 $x(k+1)$ 也在该区域内,这样才能将状态矩阵 $G[x(k)]$ 作为常数矩阵来分析

具体可表示为:当 $|x(k-i)| \le M$ 时($i = 0, 1, \cdots, n-1$,M 为常数),

$$|x(k-i+1)| \le M, \tag{5}$$

依此找出区域 Ω_3

对于非线性方程(4),若 $|x(k-i)| \le M$ ($i = 0, 1\cdots, n-1$,M 为常数),则

$$|x(k+1)| = \left| \frac{\sum_{i=1}^{l} a_1^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} x(k) + \cdots + \frac{\sum_{i=1}^{l} a_n^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} x(k-n+1) \right| \le$$

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{l} a_1^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} \right| |x(k)| + \cdots + \left| \frac{\sum_{i=1}^{l} a_n^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} \right| |x(k-n+1)| \le$$

$$\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{l} a_1^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} \right| + \cdots + \left| \frac{\sum_{i=1}^{l} a_n^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} \right| \right) M.$$

当

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{l} a_1^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i}\right| + \cdots + \left|\frac{\sum_{i=1}^{l} a_n^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i}\right| \le 1 \qquad (6)$$

时, $|x(k+1)| \le M$, 则 $|x(k-i+1)| \le M$ ($i = 0, 1, \cdots, n-1$, M 为常数), 满足上述条件.

显然, 按式(6) 得到的范围是比较保守的. 在实际应用中, 可根据式(4) 的具体形式, 灵活地求出 $x(k)$ 的取值范围, 进而得到 Ω_3.

所有模糊子系统隶属函数可表示为 $g^i[x(k)] = A_i x(k) + a_i$. 当 A_i 是常数行矩阵时, g 为线性函数; 当 A_i 是 $x(k)$ 的函数时, g 为非线性函数.

当所有规则在 Ω_1 内的隶属函数之和为常数时, 即 $\sum_{i=1}^{l} g^i = N$, 则有

$$\left|\sum_{i=1}^{l} a_1^i [A_i x(k) + a_i]\right| + \cdots + \left|\sum_{i=1}^{l} a_n^i [A_i x(k) + a_i]\right| \le N. \qquad (7)$$

分析式(6), 若式中左边的任何一项 $\left|\sum_{i=1}^{l} a_j^i g^i \Big/ \sum_{i=1}^{l} g^i\right| \ge 1$, 或式(7) 中左边的任何一项 $\left|\sum_{i=1}^{l} a_j^i [A_i x(k) + a_i]\right| \ge N$, 则只有在平衡点 $x(k) = 0$ 处满足条件, 系统无稳定区域, 即系统是不稳定的. 这便是关于模糊系统不稳定的判据. 若此项不存在, 则根据式(6) 或式(7) 找出一个区域 Ω_3 满足式(5).

根据李雅普诺夫关于系统稳定的定义, 在区域 Ω_3 内, 系统至少是李雅普诺夫意义上的稳定. 系统的渐近稳定区域应为两个区域的交集, 即 $\Omega_2 \cap \Omega_3$. 当然, 由此找出的稳定区域只是充分条件.

4　T-S 模型稳定性分析仿真实例

对于模糊系统

R^1: if $x(k-1)$ is M^1,
then $x(k+1) = x(k) - 0.5x(k-1)$;

R^2: if $x(k-1)$ is M^2,
then $x(k+1) = -x(k) - 0.5x(k-1)$.

其中 M^1 和 M^2 的隶属函数如图 1 所示.

将模糊规则写成如下矩阵形式:

R^1: if $x(k-1)$ is M^1,
then $x(k+1) = A_1 x(k)$;

R^2: if $x(k-1)$ is M^2,
then $x(k+1) = A_2 x(k)$.

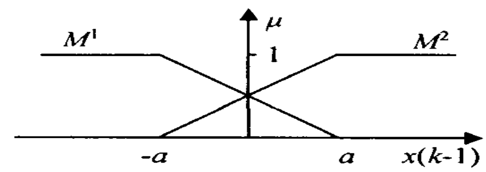

图 1　M^1 和 M^2 的隶属函数

其中

$$x(k) = [x(k), x(k-1)]^{\mathrm{T}},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

总输出为

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{l} w^i(k) A_i x(k) \Big/ \sum_{i=1}^{l} w^i(k) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{l} a_1^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} & \dfrac{\sum_{i=1}^{l} a_2^i g^i}{\sum_{i=1}^{l} g^i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{a}x(k-1) & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k).$$

1) 在 Ω_1 内, 即 $\begin{cases} x(k-1) \in [-a, a] \\ x(k) \in (-\infty, \infty) \end{cases}$ 区域内, 分析系统的稳定性.

2) 令 $\alpha = -\frac{1}{a}x(k-1)$, 则 $\alpha \in [-1, 1]$. 分析矩阵 $\begin{bmatrix} \alpha & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 当 $\alpha \in [-1, 1]$ 时, 其特征值均在单位圆内, 所以 Ω_2 就是 Ω_1.

3) 由 $\left|-\frac{1}{a}x(k+1)\right| + |-0.5| \le 1$, 有 $|x(k-1)| \le 0.5a$, 所求区域 Ω_3 为

$$\begin{cases} x(k-1) \in [-0.5a, 0.5a], \\ x(k) \in [-0.5a, 0.5a]. \end{cases}$$

所以模糊系统的稳定区域为 $\Omega_2 \cap \Omega_3$, 即

$$\begin{cases} x(k-1) \in [-0.5a, 0.5a], \\ x(k) \in [-0.5a, 0.5a]. \end{cases}$$

图 2～ 图 5 为不同初始条件下, 当 $a = 1$ 时系统的响应曲线. 其中: 图 2 和图 3 的初始条件在所确定的稳定范围之内; 图 4 和图 5 的初始条件在所确定的稳定范围之外. 由图看出, 当初始条件在稳定范围之内时, 系统是稳定的; 当在稳定范围之外时, 系统可能是稳定的, 也可能是不稳定的, 即对系统的稳定性无法判定.

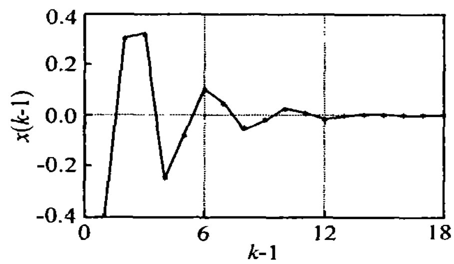

图 2 x(k) = [x(k), x(k - 1)]^T = [0.3, - 0.4]^T

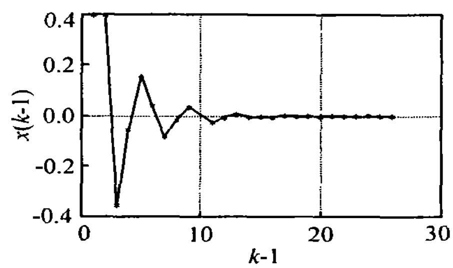

图 3 x(k) = [x(k), x(k - 1)]^T = [0.4, 0.4]^T

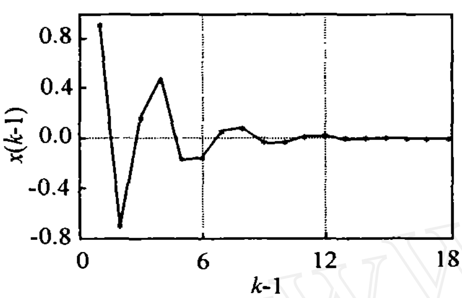

图 4 x(k) = [x(k), x(k - 1)]^T = [- 0.7, 0.9]^T

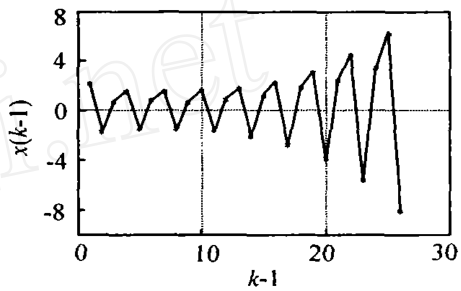

图 5 x(k) = [x(k), x(k - 1)]^T = [- 1.7, 1.9]^T

5 结 论

本文证明了 T-S 型模糊系统充分条件的非必要性; 将 T-S 型模糊系统转变为非线性离散系统分析其稳定性, 解决了一些用充分条件无法分析的模糊系统, 尤其是当系统不稳定时的判定; 对于局部稳定系统, 找出稳定区域; 对于稳定系统, 能确定局部稳定性. 在实际应用中, 往往只需对系统稳定点附近的一定区域进行稳定性判定, 而系统在无限远处的稳定与否, 与实际应用没有太大关系, 所以对系统稳定点附近进行局部稳定性的判定具有很强的实际意义.

参考文献(References):

[1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Trans on SMC*, 1985, 15(1): 116-132.

[2] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control system[J]. *Fuzzy Set and System*, 1992, 145(1): 135-156.

[3] Cao G, Rees N W, Feng G. Stability analysis of fuzzy control systems[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1996, 26(1): 201-204.

[4] Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 14-23.

[5] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, *H* infinity control theory and linear matrix inequalities[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1-13.

[6] Tanaka K, Kosaki T. Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1997, 27(3): 552-558.

[7] Ying. Constructing nonlinear variable gain controllers via the Takagi-Sugeno fuzzy control[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 226-234.

[8] 吴方向, 史忠科, 戴冠中. T-S 型模糊系统的稳定性分析及其应用[J]. 控制与决策, 1999, 14(1): 65-68.
(Wu F X, Shi Z K, Dai G Z. Stability analysis for T-S formal fuzzy System and its application[J]. *Control and Decision*, 1999, 14(1): 65-68.)

[9] 王立新. 模糊系统与模糊控制教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. 211-221.