

文章编号: 1001-0920(2004)12-1391-04

动态神经网络的输入-状态稳定性分析

沈艳霞¹, 纪志成¹, 姜建国²

(1. 江南大学 控制科学与工程研究中心, 江苏 无锡 214036;

2. 中国矿业大学 信息与电气工程学院, 江苏 徐州 221008)

摘要: 针对非自治的动态神经网络系统, 建立了动态神经网络的数学模型, 并将其等效成一个非线性仿射控制系统, 深入分析了该系统平衡点的存在性、唯一性和全局渐近稳定性, 给出了系统输入-状态稳定的充分条件, 构建了 ISS-Lyapunov 函数, 并应用该函数确保了系统的全局渐近稳定性

关键词: 动态神经网络; 全局渐近稳定性; 输入-状态稳定性

中图分类号: TP18

文献标识码: A

Input-to-state stability analysis of dynamic neural networks

SHEN Yan-xia¹, JI Zhi-cheng¹, JIANG Jian-guo²

(1. Control Science and Engineering Research Center, Southern Yangtze University, Wuxi 214036, China;

2. College of Information and Electronics Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China. Correspondent: SHEN Yan-xia, E-mail: shenyanxia@163.net)

Abstract: A mathematical model of dynamic neural networks is built, which is shown to be equivalent to an affine nonlinear control system. The existence and uniqueness of the equilibrium point and the global stability of dynamic neural network models for the non-autonomous case are investigated. The sufficient conditions for the input-to-state stability are provided. ISS-Lyapunov functions are constructed and employed to insure global asymptotic stability of systems.

Key words: dynamic neural network; global asymptotic stability; input-to-state stability

1 引言

神经网络系统是在现代神经生物学和神经心理学的研究基础上, 模仿人的大脑神经元的结构特征和功能特征而建立起来的一种非线性系统。其中动态神经网络又常被称为递归神经网络模型, 它具有分类、联想记忆和并行运算以及解决复杂系统最优化问题等强大功能, 逐渐成为科学界研究的热点。然而将动态神经网络用于并行计算、信号处理和求最优解时, 需要其具有全局吸引的唯一的平衡点^[1]。因此, 研究动态神经网络系统的全局渐近稳定性具有重大的理论和实际意义。

自 20 世纪 80 年代, 动态神经网络的稳定性问

题便成为人们研究的一个重要课题。Hopfield^[2]证明了对于离散 Hopfield 网络, 当连接权矩阵对称且为零对角时, 存在可用来判定稳定性的能量计算函数。随后, Hopfield^[3]又证明了连续 Hopfield 网络当连接权矩阵对称且输出作用函数单调递增时, 一定存在 Lyapunov 函数保证网络的稳定性。在此奠基性的工作基础上, Michel^[4]进一步研究了 Hopfield 连续网络, 给出了网络渐近指数稳定条件和渐近稳定平衡点区域的估计, 使局部渐近稳定性得到了证明, 并表明可能存在多个平衡点。这一成果对联想记忆或模式识别动态网络尤其有用。Guez^[5]也给出了保证网络在平衡点附近的局部稳定性条件。然而从

收稿日期: 2004-04-01; 修回日期: 2004-06-25

作者简介: 沈艳霞(1973—), 女, 山东淄博人, 博士, 从事智能控制、电气传动等研究; 纪志成(1959—), 男, 浙江杭州人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、电气传动等研究

控制角度的观点,全局渐近稳定性和输入-状态稳定性显得更为重要.因此,本文研究了动态神经网络的平衡状态的存在性和唯一性,当系统为非自治系统时,选取适当的ISS-Lyapunov函数,分析动态神经网络的输入-状态稳定性

2 动态神经网络(DNNs)模型

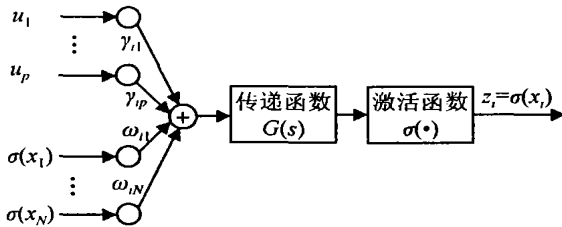


图1 神经元模型

动态神经网络的结构如图1所示.其动态传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s + \beta_i} \quad (1)$$

即每个单元符合以下的微分方程:

$$\dot{x}_i = -\beta_i x_i + d_i \quad (2)$$

其中

$$d_i(t) = \sum_{j=1}^N w_{ij} z_j(t) + \sum_{k=1}^p \gamma_{ik} u_k(t) + b_i$$

z_i 为输出, u_k 为输入, w_{ij} 和 γ_{ik} 分别为权重, b_i 为偏置

假定 $b_i = 0$, 则

$$\dot{x}_i = -\beta_i x_i + \sum_{j=1}^N w_{ij} \sigma(x_j) + \sum_{j=1}^p \gamma_{ij} u_j \quad (3)$$

其中: β_i, w_{ij} 和 γ_{ij} 为可调权重; x_i 为单元 i 的激活状态; u_1, \dots, u_p 为输入信号, $p \leq N$; 激活函数选为

$$\sigma(x_j) = \tanh(x_j) \quad (4)$$

为方便起见,网络的输出为矢量 x 的前 p 个状态,称为输出状态;剩下的 $N - p$ 个状态作为隐含层状态.这里考虑输入输出个数相等的DNN,从而式(3)的矢量表达式如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta x + w \sigma(x) + \gamma u, \\ y_n &= C_n x. \end{aligned} \quad (5)$$

其中: x 为 R^N 上的状态, $w \in R^{N \times N}$, $\sigma(x) = [\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_N)]^T$, $\gamma \in R^{N \times p}$, $u \in R^p$, $C_n = [I_{p \times p}, O_{p \times (N-p)}]$, $\beta \in R^{N \times N}$ 为对角阵,其对角元素为 $\{\beta_1, \dots, \beta_N\}$.

将一个DNN(如式(5))和一个具有如下形式的 p 个输入 p 个输出的一般非线性仿射系统作类比:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{j=1}^p g_j(x) u_j, \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $f(x), h(x), g_1(x), \dots, g_p(x)$ 为定义在 R^n 的一个开集上的光滑向量场.则式(5)描述的DNN为式(6)给出的控制仿射系统的一个特例,且

$$\begin{aligned} f(x) &= -\beta x + w \sigma(x), \\ g_j(x) &= [\gamma_{1j} \dots \gamma_{Nj}]^T, \\ h(x) &= C_n x. \end{aligned}$$

3 DNNs的平衡点

考虑式(5)给出的DNN,假定激活函数 $\sigma(x_i)$ 具有以下特征:

假定1: $\sigma(x_i)$ 是连续可微的;

假定2: $0 < d\sigma/dx_i < 1$;

假定3: $\sigma(x_i)$ 是有界的, $|\sigma(x_i)| \leq \sup_z |\sigma(z)|$

假定1和假定2说明了 $\sigma(x_i)$ 在 x_i 是李普西茨的,且矢量激活函数也是李普西茨的,其常数为 L_σ .即对所有 $x, y \in R^n$, 有

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq L_\sigma \|x - y\| \quad (7)$$

命题1 若对所有 $x \in R^N$, 矢量激活函数是连续的,且满足 $0 < d\sigma/dx_i < 1$, 则对每一个 u 值,由式(5)给出的DNN至少有一个平衡点,与映射 $\Phi(x) = \beta^{-1} w \sigma(x) + \beta^{-1} \gamma u$ 的一个定点相对应

证明 假设对于一个常数输入 u , 网络有一个平衡点 x . 对式(5)描述的DNN,平衡点 x 满足关系

$$x = \beta^{-1} w \sigma(x) + \beta^{-1} \gamma u$$

定义映射 $\Phi: R^N \rightarrow R^N$,

$$\Phi(x) = W \sigma(x) + S, \quad (8)$$

其中: $W = \beta^{-1} w, S = \beta^{-1} \gamma u$. 则由式(5)给出的DNN的一个平衡状态 x 是式(8)的一个定点,且满足

$$\Phi(x) = x. \quad (9)$$

由此命题得证

定义 $\Omega = \{x: \|x - S\| \leq \|W\|^{-1}\}$, 则假定 $\|W\| < 1$ 时,对 Ω 内所有的点,有

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - S\| &= \|W \sigma(x)\| \\ &\leq \|W\| \|\sigma(x)\| \leq \|W\|. \end{aligned} \quad (10)$$

即 $\Phi(x) \in \Omega$, Φ 是一个从有界的闭凸集到其自身的连续映射.根据Brouwer定点定理, Φ 在 Ω 内至少有一个定点.这样,对于每一个 u 值,由式(5)给出的DNN至少有一个平衡点

命题1表明,在对激活函数作一定的假设下,对

每个 u 值至少有一个平衡点 对于DNN (Hopfield 网络) 的平衡点唯一性的条件曾有很多学者作过研究, 但我们更为关心的是全局渐近稳定的条件, 若满足的话, 它可以确保平衡点的唯一性

令 $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]^T$ 是 $u = 0$ 时DNN 的一个平衡状态, 即

$$-\beta x^* + w \sigma(x^*) = 0 \quad (11)$$

取以下新的变量:

$$\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]^T = x - x^* \quad (12)$$

对式(12) 求导, 用式(5) 替代 \dot{x} , 并由 $x = \bar{x} + x^*$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \dot{x} - \dot{x}^* = \dot{x} \\ &= -\beta(\bar{x} + x^*) + w \sigma(\bar{x} + x^*) + \mathcal{Y}u \end{aligned} \quad (13)$$

加、减 $w \sigma(x^*)$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= -\beta \bar{x} + w [\sigma(\bar{x} + x^*) - \sigma(x^*)] + \\ &\quad \mathcal{Y}u - \beta x^* + w \sigma(x^*). \end{aligned} \quad (14)$$

由式(11) 知, 式(14) 的后两项为 0, 则式(14) 可写为

$$\dot{\bar{x}} = -\beta \bar{x} + w \delta(\bar{x}) + \mathcal{Y}u, \quad (15)$$

其中 $\delta(\bar{x})$ 为一个函数, 即

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x}) &= [\delta_1(\bar{x}_1), \dots, \delta_n(\bar{x}_n)]^T = \\ &\quad \sigma(\bar{x} + x^*) - \sigma(x^*). \end{aligned} \quad (16)$$

定理 1 在假定 1~ 假定 3 下, 矢量函数 $\delta(\bar{x})$ 满足

$$\delta(\bar{x}) \leq L_\sigma \bar{x},$$

其中 L_σ 为矢量激活函数 $\sigma(x)$ 的李普西茨常数

4 DNNs 的输入 - 状态稳定性分析

定义 1(输入 - 状态稳定性) 对非线性系统

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (17)$$

若: 1) 它的解在 $(0, \infty)$ 是连续的; 2) 存在一 k 类函数 $\mathcal{Y}_1(\bullet)$, 使得对任何紧集内的 x_0 和所有 u , 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x(x_0, u, t) - \mathcal{Y}_1(u)| = 0.$$

对一个有界的常数控制输入量 u , 不考虑初始条件, 当 t 非常大时, 状态轨迹将在一个半径为 $\mathcal{Y}_1(u)$ 的球内 一致性的要求即是对每一个 $r > 0$ 和 $\epsilon > 0$, 存在一个 $T > 0$, 使得对所有 u 和所有 x_0 , 当 $|x_0| < r, t > T$ 时, $|x(x_0, u, t) - \mathcal{Y}_1(u)| < \epsilon$, 则该系统是输入 - 状态稳定的 其中 $f(\bullet, \bullet)$ 是局部李普西茨的, $f(0, 0) = 0, \dot{x} = f(x, 0) = f(x, 0)$ 的解($x = 0$) 是全局渐近稳定的

定义 2(ISS-L yapunov 函数) 设函数 $V: R^n \rightarrow R_+$ 是连续可微且正定, 若满足条件

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\Psi(u(t)) - \alpha(|x(t)|), \quad (18)$$

则为一个输入 - 状态(ISS)L yapunov 函数, 对所有 $x \in R^n, u \in R^p, \alpha(\bullet)$ 和 $\Psi(\bullet)$ 为 K 类函数

定理 2 当且仅当存在一个 ISS-L yapunov 函数时, 系统(17) 是输入 - 状态稳定的

定理 3 当外部输入 $u = 0$ 时, 系统(15) 可表示为

$$\dot{\bar{x}} = -\beta \bar{x} + w \delta(\bar{x}) + \mathcal{Y}u \quad (19)$$

或等效地, 当满足以下充分条件:

- 1) 激活函数 $\sigma(x_i)$ 满足假定 1~ 假定 3;
- 2) 给定 $u \in R_+$, 存在一个L yapunov 函数的正定对称解 P 满足

$$-\beta^T P - P \beta = -\mu I; \quad (20)$$

- 3) 满足不等式

$$w^2 < \frac{\mu - 2P}{P}, \quad P < \frac{\mu}{2}. \quad (21)$$

则动态神经网络(5) 是输入 - 状态稳定的

证明 考虑函数 $V(\bar{x})$ 及其时间导数

$$\begin{aligned} V(\bar{x}) &= \bar{x}^T P \bar{x}, P = P^T > 0, \\ \dot{V}(\bar{x}) &= \bar{x}^T P \dot{\bar{x}} + \dot{\bar{x}}^T P \bar{x}. \end{aligned} \quad (22)$$

将式(19) 代入可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= \bar{x}^T P (-\beta \bar{x} + w \delta(\bar{x}) + \mathcal{Y}u) + \\ &\quad (-\beta \bar{x} + w \delta(\bar{x}) + \mathcal{Y}u)^T P \bar{x} = \\ &\quad -\bar{x}^T (P \beta + \beta^T P) \bar{x} + \bar{x}^T P w \delta(\bar{x}) + \\ &\quad \delta(\bar{x})^T w^T P \bar{x} + \bar{x}^T P \mathcal{Y}u + u^T \mathcal{Y}^T P \bar{x}. \end{aligned} \quad (23)$$

由式(20) 可得

$$\dot{V}(\bar{x}) \leq -\mu \bar{x}^T \bar{x} + 2\bar{x}^T P w \delta(\bar{x}) + 2\bar{x}^T P \mathcal{Y}u. \quad (24)$$

对任何矩阵 $X \in R^{n \times k}, Y \in R^{n \times k}$ 和正定对称矩阵 $\Lambda \in R^{n \times n}$, 有

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T \Lambda X + Y^T \Lambda^{-1} Y.$$

令 $X = \bar{x}, Y = P w \delta(\bar{x}), \Lambda = P$, 则

$$\begin{aligned} 2P w \delta(\bar{x}) &\leq \bar{x}^T P \bar{x} + (P w \delta(\bar{x}))^T P^{-1} P w \delta(\bar{x}) \\ &= P \bar{x}^2 + P w^2 \delta(\bar{x})^2. \end{aligned}$$

但若 $\sigma(x_i)$ 满足假定 1~ 假定 3, 则由定理 1 得

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x})^2 &\leq L_\sigma^2 \bar{x}^2, \\ 2P w \delta(\bar{x}) &\leq P \bar{x}^2 + P w^2 L_\sigma^2 \bar{x}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

对式(24) 的第 3 项, 令 $X = \bar{x}, Y = P \mathcal{Y}u, \Lambda = P$, 得

$$2x^T P \dot{y}u - x^T P x + (P \dot{y}u)^T P^{-1} P \dot{y}u = x^T P x + u^T \dot{y} P^T \dot{y} u. \quad (26)$$

则

$$2x^T P \dot{y}u - P \bar{x}^2 + P \dot{y}^2 u^2. \quad (27)$$

将式(25)和(27)代入(24)得

$$\dot{V}(\bar{x}) = (-\mu + 2P + L_\sigma^2 P w^2) \bar{x}^2 + P \dot{y}^2 u^2.$$

定义

$$\alpha(r) = -(-\mu + 2P + L_\sigma^2 P w^2) r^2, \\ \Psi(r) = P r^2 r^2,$$

对 $r \in R$, 有

$$\dot{V}(\bar{x}) = \Psi(u) - \alpha(\bar{x}).$$

若 $\alpha(\cdot)$ 和 $\Psi(\cdot)$ 为 K 函数, 则 $V(\bar{x})$ 为一个 ISS-Lyapunov 函数. 由于 $\Psi(\cdot)$ 总是满足该条件的, 当 $-\mu + 2P + L_\sigma^2 P w^2 < 0$ 时, 系统(19)是输入-状态稳定的, 即

$$w^2 < \frac{\mu - 2P}{L_\sigma^2 P}, \quad P < \frac{\mu}{2}.$$

5 结论

本文针对非自治的动态神经网络系统, 深入分析了平衡点的存在性、唯一性和全局渐近稳定性, 给出了系统输入-状态稳定的充分条件, 构建了 ISS-Lyapunov 函数并采用该函数确保系统的全局渐近

稳定性. 该方法只需满足全局 Lipschitz 条件, 比已有方法的条件放宽了^[6], 因此更有利于神经计算和设计全局稳定的神经网络, 在理论和工程应用中具有重要的意义.

参考文献(References):

- [1] Zhang J Y, Dai H Y, Wu P B. Global stability analysis in Hopfield neural networks[J]. *Control Theory and Applications*, 2003, 20(2): 180-184
- [2] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities[J]. *Proc of National Academy of Science*, 1982, 79(8): 2554-2558
- [3] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computation properties like those of two state neurons[J]. *Proc of National Academy of Science*, 1984, 81(10): 3088-3092
- [4] Michel A N, Farrel J A, Porod W. Qualitative analysis of neural networks[J]. *IEEE Trans on Circuit and Systems*, 1989, 36(2): 229-243
- [5] Guez A, Protopopescu V, Barhen J. On the stability, storage capacity and design of nonlinear continuous neural networks[J]. *IEEE Trans on System, Man, and Cybernetics*, 1988, 18(1): 80-87.
- [6] Juang J C. Stability analysis of Hopfield-type neural networks[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1999, 10(6): 1366-1374

(上接第 1367 页)

- [12] Eberhart R C, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory[A]. *Proc of the 6th Int Symposium on Micro Machine and Human Science* [C]. Nagoya, Piscataway: IEEE Service Center, 1995: 39-43
- [13] Eberhart R C, Shi Y. Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms[A]. *Proc Congress on Evolutionary Computation* [C]. Seoul, Piscataway: IEEE Service Center, 2001. (a): 99-100
- [14] Fan H Y. A modification to particle swarm optimization algorithm[J]. *Engineering Computations*, 2002, 19(8): 970-989
- [15] Kennedy J. The particle swarm: Social adaptation of knowledge[A]. *Proc Int Conf on Evolutionary Computation* [C]. Indianapolis, Piscataway: IEEE Service Center, 1997: 303-308
- [16] Kennedy J. Methods of agreement: Inference among the elements[A]. *Proc 1998 Int Symposium on Intelligent Control* [C]. Piscataway: IEEE Service Center, 1998: 883-887.
- [17] Naka S, Grenji T, et al. Practical distribution state estimation using hybrid particle swarm optimization[A]. *Proc of IEEE PES Winter Meeting* [C]. Columbus, 2001: 1-6
- [18] Shi Y, Eberhart R C. Empirical study of particle swarm optimization[A]. *Proc of the 1999 Congress on Evolutionary Computation* [C]. Piscataway: IEEE Service Center, 1999: 1945-1950
- [19] Shi Y, Eberhart R C. A modified particle swarm optimizer[A]. *Proc of the IEEE Int Conf on Evolutionary Computation* [C]. Piscataway: IEEE Press 1998. (b): 69-73