

文章编号: 1001-0920(2004)12-1395-04

PWM DC-DC 变换器的一种改进的采样数据建模和分析方法

王新生, 张华强, 徐殿国

(哈尔滨工业大学 电气工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 以连续导通电压型 DC-DC 变换器为例, 分别给出了 PWM 变换器的闭环及其功率级的一种非线性和线性化的采样-数据模型, 并推导了其中各种传递函数。仿真实例表明了该方法的精确性

关键词: DC-DC 变换器; 采样-数据建模; 轨稳定性

中图分类号: TM 13 文献标识码: A

An improved sampled-data modeling and analysis method of PWM DC-DC converters

WANG Xin-sheng, ZHANG Hua-qiang, XU Dian-guo

(Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China Correspondent: WANG Xin-sheng, E-mail: xinshwang1@sina.com)

Abstract: The nonlinear and linearized sampled-data dynamics are proposed for DC-DC converters in continuous conduction mode under voltage mode control. Various transfer functions of these systems are derived. An example illustrates the accuracy of the proposed method.

Key words: DC-DC converter; sampled-data modeling; orbital stability

1 引言

在分析和设计 DC-DC 变换器时, 经常采用平均模型^[1]。平均模型是连续的而且简单, 但也存在一些缺点: 如平均模型是近似的, 它将 PWM 变换器的周期解平均为平衡点, 不能准确预测次谐波不稳定等现象。因为 PWM DC-DC 变换器中的控制是通过开关作用实现的, 采样数据模型应是一种自然而准确的模型^[2], 而采样数据建模的计算量往往很大, 所以在建模过程中都作一些近似处理, 这样就带来了不准确性。

DC-DC 变换器由功率级和控制器两部分组成。本文借鉴文献^[3]的思想, 以连续导通模式下 DC-DC 变换器为例, 给出恒频控制 PWM 变换器的闭环采样数据周期解, 讨论其稳定性, 并给出音频传递

函数、输出阻抗以及功率级控制到输出的传递函数

2 闭环系统模型

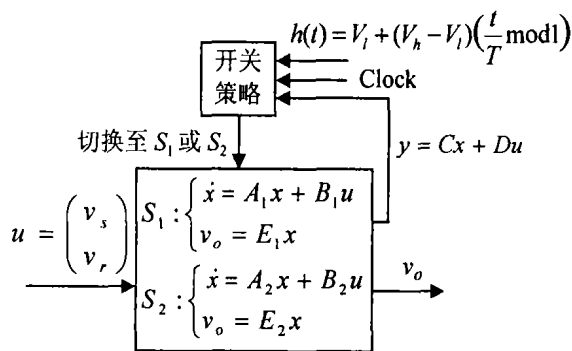


图 1 连续导通模式下 PWM 变换器的结构

图 1 为连续工作模式下 PWM 变换器的结构图, 该图对电流型和电压型控制均适用。图中: A_1 ,

收稿日期: 2004-02-23; 修回日期: 2004-05-10

作者简介: 王新生(1970—), 女, 黑龙江哈尔滨人, 副教授, 博士, 从事电力系统建模与控制等研究; 徐殿国(1960—), 男, 黑龙江大庆人, 教授, 博士生导师, 从事电力电子与电力传动等研究

$A_2 \in R^{N \times N}, B_1, B_2 \in B^{N \times r}, C, E_1, E_2 \in R^{1 \times N}, D \in R$ 均为常数矩阵, 由网络拓扑和电路参数确定; $x \in R^N, y \in R$ 分别为系统的状态(包括功率级和控制器)和反馈信号; v_s 为输入电压; v_r 为参考信号, 可以是电压或电流, 也可以是定常的或时变的; v_o 为输出电压; $h(t)$ 是一个以 T 为周期的斜坡信号; 时钟信号的频率与斜坡信号的频率相同, 即开关频率 $f_s = 1/T$. 在连续模式下, 变换器在每个时钟周期中的两个工作阶段为 S_1 和 S_2 : 当时钟到来时, 系统处于 S_1 阶段; 当 $y(t) = h(t)$ 时, 切换至 S_2 阶段

这里假设 PWM 变换器中的开关管和二极管均为理想情况, 即无工作压降

2.1 非线性大信号动态特性

考察 PWM 变换器在第 $n + 1$ 个周期 $t \in [nT, (n + 1)T]$ 中的工作状态. 一般 PWM 变换器的开关频率足够大, 则 v_s 和 v_r 在一个周期内的变化可以忽略. 即设 $u = (v_s, v_r)^T$ 在一个周期中为常数, 记为 $u_n = (v_{sn}, v_{rn})^T$, 并记 $x_n = x(nT), v_{on} = v_o(nT)$. 设在 $nT + d_n$ 时刻, $y(nT + d_n) = h(nT + d_n)$, 则有

$$S_1: \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u, \\ v_o = E_1 x, \end{cases} \quad t \in [nT, nT + d_n]; \quad (1)$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x} = A_2 x + B_2 u, \\ v_o = E_2 x, \end{cases} \quad t \in [nT + d_n, (n + 1)T] \quad (2)$$

连续模式下 PWM 变换器的采样数据动态方程为

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n, d_n) = e^{A_2(T-d_n)} \left(e^{A_1 d_n} x_n + \int_0^{d_n} e^{A_1(d_n-\theta)} d\theta B_1 u_n \right) + \int_{d_n}^T e^{A_2(T-\theta)} d\theta B_2 u_n, \quad (3)$$

$$g(x_n, u_n, d_n) = y(nT + d_n) - h(nT + d_n) = C \left(e^{A_1 d_n} x_n + \int_0^{d_n} e^{A_1(d_n-\theta)} d\theta B_1 u_n \right) + D u_n - h(nT + d_n) = 0, \quad (4)$$

$$v_{on} = E x_n \quad (5)$$

式(3)为 nT 时刻状态与 $(n + 1)T$ 时刻状态的转移关系; 式(4)为约束条件, 决定 d_n 的值; 式(5)中 E 可根据感兴趣的输出电压, 取 E_1, E_2 或 $(E_1 + E_2)/2$

2.2 稳态分析

PWM 变换器的稳态解应为周期解, 而不是平均法给出的平衡点. 系统的周期解对应于采样数据动态方程中的一个不动点. 设系统的周期解为

$x^0(t)$, 采样数据动态方程(3) ~ (5) 的不动点为 $(x_n, u_n, d_n) = (x^0(0), u, d)$, 其中 $u = (v_s, v_r)^T$. 则该不动点满足

$$x^0(0) = f(x^0(0), u, d), \quad (6)$$

$$g(x^0(0), u, d) = 0 \quad (7)$$

上面 $N + 1$ 个非线性方程含有 $N + 1$ 个未知数 ($x^0(0)$ 和 d), 可由牛顿迭代法求解. 求得 $x^0(0)$ 和 d 后, 系统的周期解 $x^0(t)$ 可表示为

$$x^0(t) = \begin{cases} e^{A_1 t} x^0(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\theta)} d\theta B_1 u, & t \in [0, d]; \\ e^{A_2(t-d)} x^0(d) + \int_d^t e^{A_2(t-\theta)} d\theta B_2 u, & t \in [d, T]; \\ x^0(\text{mod} T), & t \in T. \end{cases} \quad (8)$$

图 2 为系统周期解的示意, 图中

$$\begin{cases} x^0(d^-) = A_1 x^0(d) + B_1 u, \\ x^0(d^+) = A_2 x^0(d) + B_2 u. \end{cases} \quad (9)$$

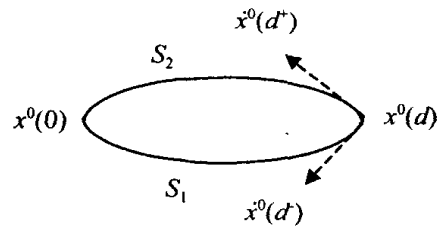


图 2 PWM 变换器周期解 $x^0(t)$ 的示意

2.3 小信号动态分析

式(3) ~ (5) 的采样数据模型是有约束的非线性方程. 根据隐函数定理, 可将其在不动点 $(x_n, u_n, d_n) = (x^0(0), u, d)$ 处线性化. 设

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial d_n} = C x^0(d^-) - \hat{h}(d) = 0,$$

则

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{\Phi}_n + \Gamma \hat{u}_n, \hat{v}_{on} = E \hat{x}_n \quad (10)$$

其中

$$\hat{\phi}_n = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_n} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial d_n} \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial d_n} \right)^{-1} \frac{\partial \hat{g}}{\partial x_n} \Big|_{(x^0(0), u, d)} = e^{A_2(T-d)} \left(I - \frac{((A_1 - A_2)x^0(d) + (B_1 - B_2)u)C}{C(A_1 x^0(d) + B_1 u) - \hat{h}(d)} \right) e^{A_1 d} = e^{A_2(T-d)} \left(I - \frac{(x^0(d^-) - x^0(d^+))C}{C x^0(d^-) - \hat{h}(d)} \right) e^{A_1 d}, \quad (11)$$

$$\Gamma = \frac{\partial \hat{x}}{\partial u_n} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial d_n} \left(\frac{\partial \hat{v}_o}{\partial d_n} \right)^{-1} \frac{\partial \hat{v}_o}{\partial u_n} \Big|_{(x_n^0, u_n, d_n) = (x^0(0), u, d)} = e^{A_2(T-d)} \left(\int_0^d e^{A_1\sigma} d\mathbf{B}_1 - \frac{x^0(d^-) - x^0(d^+)}{C x^0(d^-) - h(d)} \times \left(C \int_0^d e^{A_1\sigma} d\mathbf{B}_1 + D \right) + \int_0^{T-d} e^{A_2\sigma} d\mathbf{B}_2 \right) \quad (12)$$

注意到 $u_n = (v_{sn}, v_m)^T$, 记 $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2]$, 则式(10) 又 可写为

$$\begin{cases} \hat{x}_{n+1} = \hat{\Phi}_n + \Gamma_1 \hat{v}_{sn} + \Gamma_2 \hat{v}_m, \\ \hat{v}_{on} = E \hat{x}_n \end{cases} \quad (13)$$

2.4 稳定性分析

因为 PWM DC-DC 变换器的稳态解为周期解, 所以应讨论其渐近轨稳定性问题, 而不是平衡点的 渐近稳定性问题

定义 1^[4] 以 \mathcal{Y} 表示周期解 $x^0(t)$ 产生的闭轨 道, 如果存在一个 δ , 使

$$\text{dist}[x(0), \mathcal{Y}] < \delta \Rightarrow \lim_t \text{dist}[x(t), \mathcal{Y}] = 0,$$

则称 $x^0(t)$ 为渐近轨稳定的 其中 $\text{dist}[z, \mathcal{Y}]$ 表示点 z 与 \mathcal{Y} 上任意一点的最短距离

定理 1^[4] 若 $\hat{\Phi}$ 的所有特征根均位于复平面的 单位圆内, 则周期解 $x^0(t)$ 是渐近轨稳定的

证明略

2.5 输入音频衰减率和输出阻抗

输入音频衰减率和输出阻抗反映了闭环系统 对各种频率的电源扰动或负载扰动的抑制能力

由式(13) 可直接得到输入音频衰减率

$$T_{os}(z) = \frac{\hat{v}_o(z)}{\hat{v}_s(z)} = E(zI - \hat{\Phi})^{-1} \Gamma_1 \quad (14)$$

假想在负载端并联一电流源 i_o , 则类似可得输 出阻抗

$$T_{oo}(z) = \frac{\hat{v}_o(z)}{\hat{i}_o(z)} = E(zI - \hat{\Phi})^{-1} \Gamma_3$$

其中 Γ_3 为线性化模型中 \hat{i}_{on} 项的系数矩阵

3 功率级采样数据模型及控制到输出的传 递函数

进行控制器设计时, 首先应建立被控对象的数 学模型 由上节方法, 类似可得功率级的采样数据模 型以及控制到输出的传递函数

3.1 功率级采样数据模型

图 3 为连续导通电压型 PWM 变换器功率级采 样数据的动态结构 图中: $A_{o1}, A_{o2} \in R^{N_o \times N_o}, B_{o1}, B_{o2} \in R^{N_o \times 1}, E_{o1}, E_{o2} \in R^{1 \times N_o}$ 均为常矩阵

由图 3 可得

$$x_{o(n+1)} = f_o(x_{on}, v_{sn}, d_n) =$$

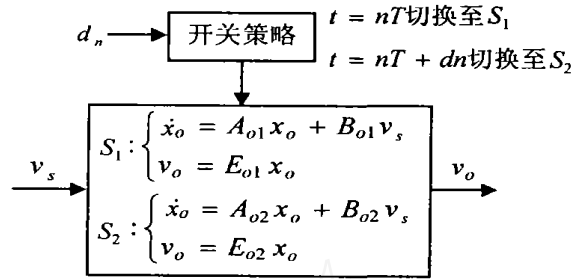


图 3 PWM 变换器的功率级结构

$$e^{A_{o2}(T-d_n)} \left(e^{A_{o1}d_n} x_{on} + \int_0^{d_n} e^{A_{o1}(d_n-\sigma)} d\mathbf{B}_{o1} v_{sn} \right) + \int_0^T e^{A_{o2}(T-\sigma)} d\mathbf{B}_{o2} v_s, \quad (15)$$

$$v_{on} = E_{o2} x_{on}, \quad (16)$$

其中 $E_o = E_{o1}, E_{o2}$ 或 $(E_{o1} + E_{o2})/2$

设图 3 系统存在周期解 $x^0(t)$, 对应采样数据模 型(15) 和(16) 的不动点为 $(x_{on}, v_{sn}, d_n) = (x_o^0(0), v_s, d)$, 则该不动点满足

$$x_o^0(0) = f_o(x_o^0(0), v_s, d) =$$

$$e^{A_{o2}(T-d)} \left(e^{A_{o1}d} x_o^0(0) + \int_0^d e^{A_{o1}(d-\sigma)} d\mathbf{B}_{o1} v_s \right) + \int_0^T e^{A_{o2}(T-\sigma)} d\mathbf{B}_{o2} v_s \quad (17)$$

设不动点对应的输出电压为 V_{SET} , 则

$$E_{o2} x_o^0(0) = V_{SET} \quad (18)$$

由式(17) 和(18) 求得不动点后, 将系统在该不动点 处线性化, 得到 PWM 变换器功率级的线性化小信 号模型

$$\tilde{x}_{o(n+1)} = \hat{\Phi} \tilde{x}_{on} + \Gamma_v \tilde{v}_{sn} + \Gamma_d \tilde{d}_n, \quad (19)$$

$$\tilde{v}_{on} = E_{o2} \tilde{x}_{on} \quad (20)$$

其中

$$\hat{\Phi}_o = \frac{\partial f_o}{\partial x_{on}} \Big|_{(x_o^0, v_s, d)} = e^{A_{o2}(T-d)} e^{A_{o1}d}, \quad (21)$$

$$\Gamma_v = \frac{\partial f_o}{\partial v_{sn}} \Big|_{(x_o^0, v_s, d)} = e^{A_{o2}(T-d)} \left(e^{A_{o1}d} \int_0^d e^{A_{o1}\sigma} d\mathbf{B}_{o1} + \int_0^{T-d} e^{A_{o2}\sigma} d\mathbf{B}_{o2} \right), \quad (22)$$

$$\Gamma_d = \frac{\partial f_o}{\partial d_n} \Big|_{(x_o^0, v_s, d)} = e^{A_{o2}(T-d)} \left((A_{o1} - A_{o2}) x_o^0(d) + (B_{o1} - B_{o2}) v_s \right) =$$

$$e^{A_{o2}(T-d)}(x_o^0(d^-) - x_o^0(d^+)). \quad (23)$$

3.2 控制到输出的传递函数

由式(19)和(20)可直接得到控制到输出的传递函数

$$\frac{\tilde{v}_o(z)}{\tilde{d}(z)} = E(zI - \Phi)^{-1}\Gamma_d \quad (24)$$

但在 PWM 控制方式下,开关控制作用是在采样时刻 $t = nT$ 之后的 $t = nT + d_n$ 时刻发生的,因而该模型是非因果关系,存在相位误差.由于控制作用是由 $t = nT + d_n$ 时刻的输出决定的,利用本文的采样数据模型容易得到

$$v_{on} = E_o x_o(nT + d_n) = E_o(e^{A_{o1}d_n}x_{on} + \int_0^{d_n} e^{A_{o1}\sigma} d\mathbf{B}_{o1}v_{sn}). \quad (25)$$

其线性化小信号模型为

$$\tilde{v}_{on} = E_o(e^{A_{o1}d}\tilde{x}_n + \dot{x}_o^0(d^-)\tilde{d}_n + \int_0^d e^{A_{o1}\sigma} d\mathbf{B}_{o1}\tilde{v}_{sn}). \quad (26)$$

于是,根据式(19)和(26),改进的控制到输出的传递函数为

$$T_{oc}(z) = \tilde{v}_o(z)/\tilde{d}(z) = E_o e^{A_{o1}d}(zI - \Phi)^{-1}\Gamma_d + E\dot{x}_o^0(d^-). \quad (27)$$

传递函数(24)与(27)具有相同的极点,它们的不同之处是输出电压的采样时刻不同.开环系统的稳定性由 Φ 决定,可由定理 1 来判断

4 仿真实例

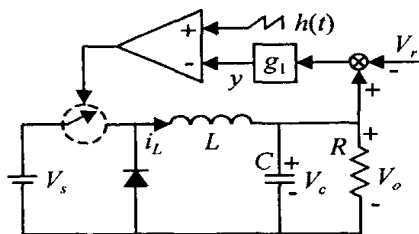


图 4 Buck 变换器

考虑图 4 中电流连续电压模式下的 Buck 变换器^[5]. 设 $T = 400 \mu s, L = 20 \text{ mH}, C = 47 \mu F, R = 22 \Omega, V_r = 11.3 \text{ V}, g_1 = 8.4, V_i = 3.8 \text{ V}, V_h = 8.2 \text{ V}$,

$$h(t) = V_i + (V_h - V_i)[\frac{t}{T} \bmod 1]$$

注意该变换器中 S_1 阶段对应主开关关断状态,所以对应图 3 中两个阶段的状态矩阵分别为

$$A_{o1} = A_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B_{o1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{o2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, E_{o1} = E_{o2} = [0 \quad 1]$$

当 $V_s = 20 \text{ V}$ 时,可求得占空比 $D_c = 0.598$,则 $d = (1 - D_c)T = 1.6074 \times 10^{-6}$,占空比到输出的传递函数为 $(-T)T_{oc}(z)$.图 5 为控制到输出的伯德图,其中虚线和实线分别为根据式(24)和式(27)的频率特性曲线

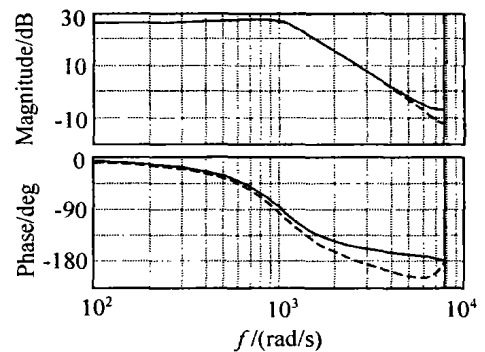


图 5 控制到输出的伯德图

本例中 $\Phi = e^{A_{o1}T}$ 的特征根为 $0.77 \pm 0.29i$,即对应周期解稳定.图 5 中实线对应的相角裕度为 13° ,而虚线对应的相角裕度为 -22° ;显然虚线误差较大

5 结 论

本文以连续导通电压型 DC-DC 变换器为例,给出了一种精确的采样数据建模法.该方法中的唯一假设是输入电压和参考电压在一个周期中为常数.这种建模方法能够得到 PWM DC-DC 变换器的稳态周期解,可减小由于控制作用的滞后等带来的建模误差,并通过判断周期解的稳定性,得到系统发生分岔等现象的条件.该方法通用性好,容易推广到非连续导通以及电流型变换器等情况

参考文献(References):

[1] Agrawal J P. *Power Electronic Systems Theory and Design*[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. 455-468
 [2] Lee F C Y, Wens R P, Yu Y, et al. Generalized computer-aided discrete time-domain modeling and analysis of DC-DC converters[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, 1979, 26(2): 58-69

(下转第 1406 页)

$$C_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1], D_{12} = 0 \ 1,$$

$$C_2 = [118 \ 8 \ 71 \ 4 \ 71 \ 8 \ 118 \ 8]$$

假设系统的不确定参数满足 $\Delta A = G \Sigma H$, Σ 满足 $\Sigma < \rho^2$. 其中: $\rho = 1, G = H = \text{diag}(0 \ 1, 0 \ 1, 0 \ 1, 0 \ 1)$. 选取干扰抑制度 $\gamma = 1$, 则系统实现二次容许且对干扰抑制度为 γ 的状态反馈控制律为

$$u = -Kx = -R^{-1}(B^T X + D^T C_1)x.$$

其中

$$X = \text{diag}(0 \ 2, 0 \ 2, 0 \ 2, 0 \ 2),$$

$$K = [148 \ 8 \ 89 \ 4 \ 89 \ 8 \ 148 \ 8]$$

取 $\epsilon_1 = 1/1.1, \epsilon_2 = 0.99$. 构造函数观测器参数如下:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -80 & 0 \\ 0 & -300 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 11 & 188 & 8 \\ 0 & & \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$S = [1 \ 2], M = 1.$$

如果选择 $P = \begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, G, H, K 保持不变, 则通过 $u = -\omega$ 进行反馈控制后, 闭环系统对干扰的抑制度和对不确定参数的限制度分别为 $\bar{\gamma} = 1.1, \bar{\rho} = 0.99$.

5 结 论

本文将分步 H_∞ 控制方法推广到具有参数不确定性和系统外部未知扰动的广义系统, 基于广义函数观测器实现系统的鲁棒控制. 首先根据给定的干扰抑制度和不确定参数的限制度, 通过求解一个广义代数 Riccati 不等式得到系统的状态反馈控制器, 然后构造系统的广义函数观测器, 使用状态函数的估计值实现状态反馈控制. 结果证明, 如果选择合适的观测器结构参数, 闭环系统仍能保持二次稳定, 且能任意逼近状态反馈下系统的鲁棒性能.

参考文献(References):

- [1] Wang H S, Yung C F, Chang F R. Bounded real Lemma and H_∞ control for descriptor systems[J]. *IEE Proc Control Theory Appl*, 1998, 145(3): 316-322
- [2] Lin C, Wang J L. Robustness of uncertain descriptor systems[J]. *Systems and Control Letters*, 1997, 31(3): 129-138
- [3] Huang J C, Wang H S, Chang F R. Robust H_∞ control for uncertain linear time-invariant descriptor systems[J]. *IEE Proc Control Theory Appl*, 2000, 147(6): 648-654
- [4] 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996: 197-204
- [5] Hou M, Muller P C. Observer design for descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1): 164-168
- [6] Darouach M, Boutayeb M. Design of observers for descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(7): 1323-1327
- [7] Hou M, Muller P C. Design of a class of Luenberger observer for descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(1): 133-136
- [8] Darouach M, Zasadzinski M, Hayar M. Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(7): 1068-1072
- [9] 邢伟, 张庆灵, 王启义, 等. 广义系统状态反馈 H_∞ 控制的一个条件[J]. *控制与决策*, 2001, 16(2): 219-225. (Xing W, Zhang Q L, Wang Q Y, et al. A condition of state feedback H_∞ control for descriptor systems[A]. *Control and Decision*, 2001, 16(2): 219-225.)
- [10] Yang D M, Zhang Q L, Zhang G F. H_2 algebraic Riccati equation for descriptor systems[A]. *Proc of the American Control Conference [C]*. Arlington, 2001: 2937-2942

(上接第 1398 页)

- [3] Fang C C, Abed E H. Sampled-data modeling and analysis of closed-loop PWM DC-DC converters[A]. *Proc IEEE ISCAS [C]*. Orlando, 1999: 110-115
- [4] Khalil H K. *Nonlinear Systems* [M]. New York: Macmillan, 1992: 89-110

- [5] Hamill D C, Deane J H B, Jefferies J. Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings[J]. *IEEE Trans on Power Electronics*, 1992, 7(1): 25-36