

文章编号: 1001-0920(2004)12-1399-04

## 一种基于最小二乘支持向量机的预测控制算法

刘 斌<sup>1,2</sup>, 苏宏业<sup>1</sup>, 褚 健<sup>1</sup>

(1. 浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027;  
2. 武汉科技大学 信息科学与工程学院, 湖北 武汉 430081)

**摘 要:** 针对工业过程中普遍存在的非线性被控对象, 提出一种基于最小二乘支持向量机建模的预测控制算法。首先, 用具有 RBF 核函数的 LS-SVM 离线建立被控对象的非线性模型; 然后, 在系统运行过程中, 将离线模型在每一个采样周期关于当前采样点进行线性化, 并用广义预测算法实现对被控系统的预测控制。仿真结果表明了该算法的有效性和优越性。

**关键词:** 非线性预测控制; 最小二乘支持向量机; 广义预测控制; 线性化

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Predictive control algorithm based on least squares support vector machines

L I U B i n<sup>1,2</sup>, S U H o n g - y e<sup>1</sup>, C H U J i a n<sup>1</sup>

(1. National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; 2. College of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China. Correspondent: L I U B i n, E-mail: bliu@ipc.zju.edu.cn)

**Abstract:** A predictive control algorithm based on least squares support vector machines (LS-SVM) model for a family of complex systems with strong nonlinearity is presented. The nonlinear offline model of the controlled plant is built by LS-SVM with the radial basis function (RBF) kernel. In the process of system operation, the offline model is linearized at each sampling instant, and the generalized predictive control (GPC) algorithm is employed to implement the predictive control of the controlled plant. The simulation results show the effectiveness of the presented algorithm.

**Key words:** nonlinear predictive control; least squares support vector machines; GPC; linearization

### 1 引 言

模型预测控制 (MPC) 是一种基于预测模型、滚动优化和反馈校正的控制策略。其本质是根据对系统未来状态的预测来优化系统行为, 而这种预测是通过预测模型实现的<sup>[1]</sup>, 因此预测模型是 MPC 中一个关键要素。对于非线性较弱并在平衡点附近工

作的对象, 利用线性预测模型便可得到较精确的拟合效果; 但如果对象具有很强的非线性, 且系统运行于很宽的工作范围, 则必须用非线性预测模型拟合系统动态。目前, 基于线性预测模型的预测控制方法已成功地应用于工业过程, 而基于非线性预测模型的预测控制, 由于建模以及在线滚动优化方面存在

收稿日期: 2003-12-16; 修回日期: 2004-03-12

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (NO YYSFC 60025308); 高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金资助项目

作者简介: 刘斌 (1972—), 女, 湖北武汉人, 博士生, 从事非线性预测控制等研究; 褚健 (1963—), 男, 浙江淳安人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制等研究

困难,目前还仅是一个开放的课题

常用的非线性预测模型包括神经网络及模糊模型等,其学习算法都是基于经验风险最小化原理.这种学习算法都存在“过拟合”问题<sup>[2]</sup>.Vapnik<sup>[3]</sup>基于统计学习和结构风险最小化原理提出了支持向量机(SVM)方法,它可兼顾学习算法的经验风险和推广能力,其用途之一就是非线性函数的拟合.Suykens<sup>[4]</sup>在标准SVM的目标函数中增加了误差平方和项,提出最小二乘支持向量机(LS-SVM)方法,并解决了其中存在的鲁棒性、稀疏性和大规模运算问题.本文则选用RBF核函数,利用LS-SVM方法建立系统的离线模型,并用修剪算法<sup>[5]</sup>得到具有稀疏支持向量的离线模型.

预测控制是一种滚动时域控制方法,如果直接利用非线性模型进行预测,就要求控制器在每个采样周期必须求解一个非线性规划问题,该问题的规模与预测控制的参数有关.本文所提出的预测控制策略,将离线学习得到的非线性预测模型在每个采样周期进行线性化,并用广义预测控制算法实现多步预测,进而求解控制策略,避免了在每个采样周期求解非线性规划问题,从而能够满足大多数系统实时控制的需要.

## 2 最小二乘支持向量机

Suykens在文献[4]中提出了LS-SVM方法.该方法采用如下形式的函数对未知函数进行估计:

$$y(x) = w^T \mathcal{Q}(x) + b \quad (1)$$

其中:  $x \in R^n, y \in R$ , 非线性函数  $\mathcal{Q}(\cdot): R^n \rightarrow R^h$  将输入空间映射为高维特征空间.

给定训练数据集  $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$ , LS-SVM 定义如下优化问题:

$$\min_{w, b, e} J(w, e) = \frac{1}{2} w^T w + \gamma \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e_k^2, \gamma > 0, \quad (2)$$

满足约束

$$y_k = w^T \mathcal{Q}(x_k) + b + e_k, k = 1, 2, \dots, N.$$

此优化问题有如下解析解:

$$\begin{bmatrix} b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & \Omega + \gamma^{-1} I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T, \mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T, \\ \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T;$$

$\Omega$  为一个方阵,其第  $k$  列  $l$  行的元素为  $\Omega_{kl} = \mathcal{Q}(x_k)^T \mathcal{Q}(x_l) = K(x_k, x_l)$ ,  $K(\cdot, \cdot)$  为核函数.

在式(3)的基础上可进一步求出  $w$ , 从而得到训练数据集的非线性逼近

$$y(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k K(x, x_k) + b \quad (4)$$

本文使用如下RBF作为核函数:

$$K(x, x_k) = \exp\{-\|x - x_k\|_2^2 / \sigma^2\}. \quad (5)$$

以上求解过程的具体步骤详见文献[4].

另外,由于在求解问题(2)的过程中,  $\alpha$  中的所有元素都不为零,使得LS-SVM不再具有标准SVM的支持向量稀疏性.为得到稀疏的支持向量集, Suykens<sup>[5]</sup>提出一种修剪算法,按照  $\alpha$  的绝对值的大小决定训练集中数据向量(支持向量)的重要程度,并从数据集中去掉一小部分最不重要的数据向量,利用剩下的数据向量重新进行函数估计.在修剪过程中可以调整  $\gamma$  和  $\sigma$  的值,从而提高函数的逼近性能.给定被控系统,将其输入输出特性描述为  $y = f(x)$ . 其中:  $x = [x(1), x(2), \dots, x(nu + ny)]$  为过去输入输出数据组成的回归向量,  $f(\cdot)$  为表征系统特性的待辨识非线性函数,  $nu$  和  $ny$  分别为系统输入输出的阶次.采样该系统的输入输出数据,构成训练数据集  $\{x_k, y_k\}_{k=1}^N$ . 其中:  $x_k$  为不同采样时刻的回归数据向量,  $y_k$  为与  $x_k$  相对应的输出.

用上述具有RBF核函数的LS-SVM方法对  $f(\cdot)$  进行估计,对于选定的  $\gamma$  和  $\sigma$ ,可以得到被控系统的非线性模型

$$y(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \exp\{-\|x - x_k\|_2^2 / \sigma^2\} + b \quad (6)$$

其中支持向量的个数  $N$  由执行修剪算法过程中函数逼近性能变化的具体情况而定.

## 3 模型线性化和GPC控制

### 3.1 模型实时线性化

为避免在系统运行的每个采样周期求解非线性规划问题,可在每个采样时刻将离线得到的被控系统非线性模型(6)线性化.

设当前采样时刻为  $k$ , 则当前采样点为  $x(k)$ , 为便于表达,令  $x_0 = x(k)$ . 将式(6)在点  $x_0$  处线性化,则有

$$y(x) = \\ y(x) \Big|_{x=x_0} + \frac{\partial y}{\partial x(1)} \Big|_{x=x_0} [x(1) - x_0(1)] + \dots + \\ \frac{\partial y}{\partial x(nu + ny)} \Big|_{x=x_0} [x(nu + ny) - x_0(nu + ny)] = \\ y(x) \Big|_{x=x_0} - \frac{\partial y}{\partial x(1)} \Big|_{x=x_0} x_0(1) - \dots - \\ \frac{\partial y}{\partial x(nu + ny)} \Big|_{x=x_0} x_0(nu + ny) + \frac{\partial y}{\partial x(1)} \Big|_{x=x_0} x(1) + \\ \dots + \frac{\partial y}{\partial x(nu + ny)} \Big|_{x=x_0} x(nu + ny) =$$

$$p + b_1 * x(1) + \dots + b_{nu} * x(nu) - a_1 * x(nu + 1) - \dots - a_{ny} * x(nu + ny).$$

其中  $p$  在当前采样周期为常量, 且只与当前采样点有关

取当前时刻的回归向量

$$x(k) = [u(k-1), \dots, u(k-nu), y(k-1), \dots, y(k-ny)],$$

则被控系统当前时刻的输入输出差分方程模型为

$$y(k) = p + b_{1u}(k-1) + \dots + b_{nuu}(k-nu) - a_{1y}(k-1) - \dots - a_{nyy}(k-ny),$$

即

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + p. \quad (7)$$

其中

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{ny}z^{-ny},$$

$$B(z^{-1}) = b_1 + b_2z^{-1} + \dots + b_{nu}z^{-(nu-1)}.$$

### 3.2 GPC 控制

根据当前时刻的输入输出线性模型(7), 在当前采样点附近, 可用如下离散差分方程描述系统特性:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + v(t). \quad (8)$$

其中  $v(t)$  表示用式(8)拟合当前时刻系统特性引起的误差及其他扰动, 可将  $v(t)$  进行如下分解:

$$v(t) = v_{dc} + v_{ac}(t),$$

其中:  $v_{dc}$  为  $v(t)$  中与时间无关的直流分量, 包含模型线性化过程中得到的常量  $p$ ;  $v_{dc}$  的幅值为  $v(t)$  的均值;  $v_{ac}(t)$  为  $v(t)$  中均值为零的交流分量, 用  $w(t)/\Delta$  对  $v_{ac}(t)$  建模, 其中,  $\omega(t)$  是均值为零的扰动量,  $\Delta = 1 - z^{-1}$  为差分算子. 于是, 系统当前时刻的输入输出方程为

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + v_{dc}(t) + w(t)/\Delta \quad (9)$$

用  $E_j(z^{-1})\Delta z^j$  乘以式(9)两端, 因为  $v_{dc}$  与时间无关, 所以  $\Delta v_{dc} = 0$ , 则式(9)变为

$$E_j(z^{-1})A(z^{-1})\Delta y(t+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(t+j-1) + E_j(z^{-1})w(t+j). \quad (10)$$

这时, 可用已有的 GPC 方法<sup>[6]</sup>继续对其进行处理, 得到  $y(t)$  的多步预测, 其向量表达式为

$$y^o = Gu + Fy(t) + H\Delta u(t-1),$$

GPC 控制律为

$$u = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T [y_r - Fy(t) - H\Delta u(t-1)]$$

上式中的各变量与文献[6]中相应变量具有相同的

定义

### 4 仿真研究

pH 中和过程是一种典型的具有严重非线性的复杂被控对象, 因此本文引入一个 pH 中和过程模型<sup>[7]</sup>作为被控对象, 以检验所提出的预测控制算法的有效性

考虑图 1 中的弱酸强碱的中和过程, 该过程的两个输入流为 HAc(弱酸)溶液和 NaOH(强碱)溶液,  $F_1$  和  $F_2$  分别代表酸和碱溶液的流速,  $C_1$  和  $C_2$  为各自的浓度. 假设两溶液在体积为  $V$  的容器中充分混合, 得到输出流,  $w_a$  和  $w_b$  分别为输出流中的酸浓度和碱浓度

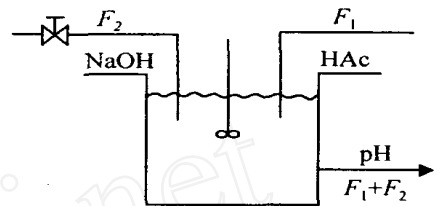


图 1 pH 中和过程

该中和过程的物理模型由线性的动态模型和非线性的静态模型两部分组成, 其中动态模型为

$$V \frac{dw_a}{dt} = F_1 C_a - (F_1 + F_2) w_a,$$

$$V \frac{dw_b}{dt} = F_2 C_b - (F_1 + F_2) w_b$$

$F_1$  和  $F_2$  为该模型的输入,  $w_a$  和  $w_b$  为输出, 后者也是下面静态模型的输入, 即

$$w_b + 10^{-y} - 10^{y-14} - \frac{w_a}{1 + 10^{pK_a - y}} = 0$$

其输出  $y$  是混和液的 pH 值

考虑单输入/单输出系统: 以 NaOH 的流速  $F_2$  为输入, 混和液的 pH 值为输出, 其他参数为与系统相关的常数<sup>[7]</sup>. 该系统的输入/输出特性呈很强的非线性和敏感性, 尤其在  $pH = 9$  附近, 输入的微小变化会引起输出的剧烈变化

用第 2 节中的 LS-SVM 方法估计以上 pH 中和过程的模型. 取模型的输入输出的阶次分别为  $n_u = 3, n_y = 3$ , 用  $(51.5 - 51.5, 51.5 + 51.5)$  区间内的随机信号作为被控对象输入, 取 300 对输入输出数据, 生成训练数据集  $\{x_k, y_k\}_{k=1}^{297}$ . 用具有 RBF 核函数的 LS-SVM 及修剪算法建立系统模型, 预先取式(2)中的  $\gamma = 10$ , 而支持向量机中支持向量的个数  $N$  及核函数中的  $\sigma$  的大小, 可在执行修剪算法过程中, 由函数逼近性能变化的具体情况确定

为检验所得系统模型的性能,用4种频率为正弦波叠加组成的信号作为输入数据,生成检验数据集.定义如下性能指标以衡量函数逼近性能的优劣:

$$VAF = 100 \left( 1 - \frac{\text{var}(Y_Y - Y_M)}{\text{var}(Y_Y)} \right)$$

其中:对应给定检验集中的输入数据, $Y_Y$ 为实际系统输出, $Y_M$ 为预测模型输出,函数 $\text{var}(\cdot)$ 表示求数据向量的方差.显然,VAF的值越大,说明函数逼近性能越好.

每次求解LS-SVM问题,可以得到与训练集中各数据向量分别对应的 $\alpha$ .采用修剪算法反复对数据集进行修剪,直到函数逼近的性能急剧下降.

在执行LS-SVM和修剪算法过程中,可得到不同的预测模型.表1给出不同模型所对应的支持向量的数目、函数逼近性能、 $\sigma$ 的大小以及基于该模型在每个采样周期计算控制量所需的平均计算时间.

表1 具有不同支持向量数目的预测模型的性能

支持向量个数	VAF	$\sigma$	平均运算时间/s
297	97.737 2	2.2	0.031 8
250	97.732 2	2.2	0.030 8
200	97.714 6	2.2	0.027 9
150	97.124 7	2.6	0.027 6

表1说明:首先,通过使用修剪算法,在一定程度上解决了支持向量的稀疏性问题,并且可以保证模型的性能;其次,即使不采用修剪算法,仅使用初始297个支持向量构成的预测模型,每个采样周期控制量的计算时间也是大多数系统所能接受的,这也说明了本文提出的基于最小二乘支持向量机的预测算法的可行性.

用由150个支持向量组成的支持向量机作为离线系统模型,并将其实时线性化.将所得线性模型用于GPC控制,取预测时域 $P = 10$ ,控制时域 $M = 5$ ,

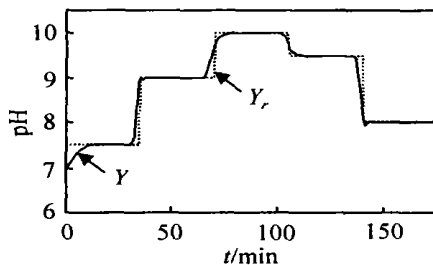


图2 pH过程跟踪控制曲线

得到系统跟踪参考给定的控制曲线如图2所示.其中: $Y_r$ 为给定参考信号, $Y$ 为系统输出.

由图2可以看出,本文提出的基于最小二乘支持向量机的预测控制算法,可以快速、稳定、无静差地对pH中和这一具有严重非线性的过程进行控制.

## 5 结 语

本文提出一种基于LS-SVM的预测控制算法. LS-SVM是一种基于结构风险最小化的建模方法,它可兼顾模型的经验风险和推广能力.建模过程中待定参数少,并且具有解析的求解公式.本文用LS-SVM方法建立被控系统的非线性离线模型,并在保证模型逼近性能的前提下,使用修剪算法得到具有稀疏性的SVM模型.为避免控制器在每个采样周期求解非线性规划问题,所提出的算法对离线模型在每个采样点进行实时线性化,并用GPC策略对系统进行控制.仿真结果表明了该算法的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] Rawlings J B. Tutorial overview of model predictive control[J]. *IEEE Control Systems Magazines*, 2000, 20(3): 38-52.
- [2] 张学工. 关于统计学习理论与支持向量机[J]. *自动化学报*, 2000, 26(1): 32-42.  
(Zhang X G. Introduction to statistical learning theory and support vector machines [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(1): 32-42.)
- [3] Vapnik V. *Statistical Learning Theory* [M]. New York: John Wiley, 1998.
- [4] Suykens J A K, Vandewalle J. Least squares support vector machine classifiers[J]. *Neural Processing Letters*, 1999, 9(3): 293-300.
- [5] Suykens J A K, Lukas L, Vandewalle J. Sparse approximation using least squares support vector machine [A]. *IEEE Int Symposium on Circuits and Systems* [C]. Geneva, 2000 (II): 757-760.
- [6] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized Predictive Control—Part I: The basic algorithm [J]. *Automatica*, 1987, 23(2): 137-148.
- [7] Nie J H, Loh A P, Hang C C. Modeling pH neutralization processes using fuzzy-neutral approaches [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(1): 5-22.