第 19 卷 第 12 期 控 制 与 决 策 2004 年 12 月
Vol 19 No. 12 Control and Decision Dec 2004

文章编号: 1001-0920(2004)12-1403-04

广义不确定系统的分步 H ∞鲁棒控制

刘艳红, 李春文, 姜培刚
(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘 要: 针对具有参数不确定性和外部未知扰动的广义系统鲁棒控制问题, 在系统状态不可测时, 提出一种基于广义函数观测器的分步 H_∞控制方法. 首先确定使系统二次容许且具有一定干扰抑制度和不确定参数限制度的状态反馈控制器; 然后构造广义函数观测器以实现反馈控制. 结果证明, 闭环系统可以保持二次容许, 且 H_∞鲁棒性能可任意逼近原状态反馈系统. 具体算例表明了该方法的有效性.

关键词: 广义系统; 鲁棒控制; 函数观测器
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Staged H ∞ robust control for uncertain descriptor systems

LIU Yan-hong, LI Chun-wen, JIANG Pei-gang
(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: LIU Yan-hong, E-mail: liuyh99@mails. tsinghua. edu. cn)

Abstract: For robust control of descriptor systems with parameter uncertainty and unknown disturbance, when the states are not measurable, a staged H_∞ control method based on generalized function observer is proposed. Firstly, a state feedback controller is designed to quadratically stabilize the system satisfying the prescribed disturbance attenuation and uncertain parameter limit. Secondly, a generalized state function observer is presented to implement the controller. The closed system is shown to be quadratically stable and the H_∞ performance can arbitrarily approach to that achieved by state feedback. An example illustrates the effectiveness of the method.

Key words: descriptor systems; robust control; function observer

1 引 言

当系统中存在代数约束时, 很多系统需要用广义系统模型来描述, 如电力系统、受限机械系统、机器人系统等. 目前, 确定性广义系统的研究已取得了很大进展, 但对于具有参数不确定性和外部未知扰动的广义系统, 其鲁棒分析和控制等方面的研究还较少[1~3]. Wang 等[1]针对广义系统提出了广义有界实引理, 为广义系统的 H_∞控制奠定了基础. Lin 等[2]得到了参数不确定线性广义系统消除脉冲模态并渐近稳定的充分条件. Huang 等[3]研究了具有参数不确定性和外界未知扰动的广义系统通过状态反馈和动态输出实现系统镇定和干扰抑制的条件, 但其动态输出反馈控制器的实现建立在两个广义代数 Riccati 不等式存在容许解的基础上, 控制器的阶数较高且构造复杂.

对于含有不确定参数和系统外部未知扰动的正常系统, 如果状态不完全可测, 可采用分步 H_∞设计方法实现鲁棒控制. 即首先设计状态反馈鲁棒控制器, 然后通过观测器设计实现状态反馈[4], 只要观测器设计合理, 系统的鲁棒性能可任意接近原状态反

收稿日期: 2004-02-02; **修回日期**: 2004-04-12
基金项目: 国家重点基础研究专项基金资助项目(G1998020307); 国家自然科学基金重点项目(69934010).
作者简介: 刘艳红(1970—), 女, 河南孟州人, 博士生, 从事广义系统控制、电力系统控制的研究; 李春文(1957—), 男, 河南武陟人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、电力系统控制等研究.

馈系统 本文将这种方法推广到状态不完全可测的不确定广义系统 由于广义系统状态观测器的构造很困难[5~8], 而且需要满足许多假设条件, 本文通过构造广义函数观测器估计状态函数来实现反馈控制 该控制算法只需求解一个广义代数 Riccati 不等式, 相对于文献[3]中算法更为简单

2 问题描述

考虑下面具有参数不确定性和外部未知扰动的广义系统 P_Σ:

$$E\dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1 w + B_2 u, \tag{1}$$

$$z = C_1 x + D_{12} u, \tag{2}$$

$$y = C_2 x. \tag{3}$$

其中: $x \in R^n, u \in R^m, w \in R^q, y \in R^p, z \in R^s$ 分别为状态、控制输入、干扰输入、可测输出和控制输出; $E \in R^{n\times n}$ 可以是奇异矩阵; 其他矩阵具有相应的维数; ΔA 表示系统的不确定参数

假设 1 ΔA 满足 $\Delta A = G\Sigma H$, 其中: G 和 H 为给定矩阵, Σ 为未知矩阵且满足 $\|\Sigma\| < \rho^2$.

设被控广义系统 P_Σ 经输出反馈控制律 $u = Ky$ 构成的闭环系统 S_Σ 如下:

$$E\dot{x} = A(\Sigma)x + B_1(\Sigma)w, \tag{4}$$

$$z = C(\Sigma)x. \tag{5}$$

定义 1[1] 若 $\{E, A\}$ 正则、稳定、无脉冲, 则称 $\{E, A\}$ 容许

定义 2[3] 对给定的干扰抑制水平 γ, 设 $A(\Sigma)$ 中不确定参数满足假设 1, 如果系统 $\{E, (A(\Sigma)\}$ 正则、二次稳定、无脉冲且 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$, 则称该闭环系统 S_Σ 二次容许且对干扰的抑制度为 γ, 对不确定参数的限制度为 ρ

根据广义有界实引理[1], 广义系统二次容许且对干扰的抑制度为 γ, 对不确定参数的限制度为 ρ 等价于下面广义代数 Riccati 不等式解的存在性:

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}(\Sigma)X + X^{\mathrm{T}}A(\Sigma) + \\ C^{\mathrm{T}}(\Sigma)C(\Sigma) + \\ \dfrac{1}{\gamma^2}X^{\mathrm{T}}B_1(\Sigma)B_1^{\mathrm{T}}(\Sigma)X < 0, \\ E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

3 分步 H_∞ 鲁棒控制

下面分两步完成广义系统的输出反馈 H_∞ 鲁棒控制器设计 首先, 在给定的干扰抑制度和不确定参数限制度下, 设计状态反馈控制器满足要求的鲁棒性能; 然后, 在系统状态不完全可测条件下, 设计广义函数观测器实现反馈控制

3.1 构造状态反馈鲁棒控制器

引理 1[3] 给定干扰抑制度 γ 和不确定参数限制度 ρ, 设广义系统 $\{E, A\}$ 容许, 定义

$$R_1 = D_{12}^{\mathrm{T}} D_{12},$$

$$\begin{aligned} R_1(X) = {} & (A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^{\mathrm{T}} C_1)^{\mathrm{T}} X + \\ & X^{\mathrm{T}}(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^{\mathrm{T}} C_1) + \\ & C_1^{\mathrm{T}}(I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^{\mathrm{T}}) C_1 + \\ & X^{\mathrm{T}}\Big(\frac{1}{\gamma}[B_1 \quad \gamma G][B_1 \quad \gamma G]^{\mathrm{T}} - \\ & B_2 R_1^{-1} B_2^{\mathrm{T}}\Big) X + \rho^2 H^{\mathrm{T}} H. \end{aligned}$$

设 $R_1 > 0$, 则系统通过状态反馈实现二次容许且满足鲁棒性能的充要条件是:

$$\begin{cases} R_1(X) < 0, \\ E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

有解 X_∞. 在式(7) 有解的条件下, 系统状态反馈控制器的形式为

$$u = -Kx = -R_1^{-1}(B_2^{\mathrm{T}} X_\infty + D_{12}^{\mathrm{T}} C_1)x. \tag{8}$$

如果系统 $\{E, A\}$ 不容许, 根据文献[9], 可以通过预置状态反馈首先使系统容许, 然后按照引理 1 完成系统控制器的设计

3.2 设计广义函数器实现反馈控制

首先假设:

1) $R_1 > 0$;

2) $\forall s \in R$, 矩阵 $\begin{bmatrix} A - jsE & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ 列满秩且不可约

定理 1 如果存在适当维数的矩阵 J, F, N, Q, S 满足 $\{J, F\}$ 稳定, $JPA - QC_2 = FPE, MC_2 + SJPE = K, N = JPB_2$, 则

$$J\dot{\zeta} = F\zeta + Nu + Qy, \tag{9}$$

$$\omega = SJ\zeta + My, \tag{10}$$

是 P_Σ 的标称系统的广义函数观测器, 即

$$\lim_{t\to\infty}(\omega - Kx) = 0.$$

证明 由定理条件可得

$$\begin{aligned} \omega - Kx = {} & SJ\zeta + MC_2 x - Kx = \\ & SJ(\zeta - PEx). \end{aligned}$$

令 $e = PEx - \zeta$, 则有

$$\begin{aligned} J\dot{e} = {} & JPAx + JPB_2 u - F\zeta - \\ & Nu - QC_2 x = Fe. \end{aligned}$$

再根据定理条件, 即可证得结论 □

引理 2 假设 $\{J, F\}$ 容许, $\{J, F, \hat{B}\}$ 可镇定, $I - \dfrac{1}{\gamma^2}\hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C}\hat{B} > 0$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 W_∞ 使得

下式成立:

$$\begin{cases} F^{\mathrm{T}}W_\infty + W_\infty^{\mathrm{T}}F + \hat{C}^{\mathrm{T}}C + \frac{\epsilon}{\gamma^2}W_\infty^{\mathrm{T}}\hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}}W_\infty < 0, \\ J^{\mathrm{T}}W_\infty = W_\infty^{\mathrm{T}}J \geq 0. \end{cases} \tag{11}$$

其中: $\hat{B} = [JPB_1 \quad JPG]$, $\hat{C} = D_{12}SJ$.

证明　由 $\{J, F, \hat{B}\}$ 可镇定及 $\left\{\frac{J}{\sqrt{\epsilon}}, \frac{F}{\sqrt{\epsilon}}, \left[\frac{\hat{C}^{\mathrm{T}}}{\sqrt[4]{\epsilon}}, I\right]^{\mathrm{T}}\right\}$ 可观测, 再由文献[1, 10]易证得结论. □

令 $\bar{\gamma} = \gamma/\epsilon_1$, $\bar{\rho} = \rho\epsilon_2$, $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, 1)$ 且 ϵ_1, ϵ_2 可任意趋近于 1. 再令

$$\rho_1 = \frac{\epsilon_2^2}{1 - \epsilon_2^2}, \alpha = \frac{1 - \epsilon_1^2}{\epsilon_1^2}.$$

则有如下定理:

定理 2　假设矩阵方程(8) 有解 X_∞, 且定理 1 中条件得到满足, $\{J, F, \hat{B}\}$ 可镇定, $I - \frac{1}{\gamma^2}\hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C}\hat{B} > 0$, 则 P_Σ 和控制器 $u = \omega$ 构成的闭环系统二次容许, 对干扰的抑制度为 $\bar{\gamma}$, 对不确定参数的限制度为 $\bar{\rho}$, 而且 $\bar{\gamma}$ 和 $\bar{\rho}$ 可任意趋近状态反馈下的对应值.

证明　由定理条件有

$$\omega = SJ\zeta + MC_2x = Kx - SJe.$$

这时闭环系统为

$$\begin{bmatrix} E & \\ & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A - B_2K + \Delta A & B_2SJ \\ JP\Delta A & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ JP \end{bmatrix}w =$$

$$A_c\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + B_cw,$$

$$z = [C_1 - D_{12}K \quad D_{12}SJ]\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = C_c\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}.$$

设 $Y = \begin{bmatrix} X_\infty & \\ & W_\infty \end{bmatrix}$, 则

$$A_c^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}A_c + C_c^{\mathrm{T}}C_c + \frac{1}{\bar{\gamma}^2}Y^{\mathrm{T}}B_cB_c^{\mathrm{T}}Y =$$

$$\begin{bmatrix} (A - B_2K + \Delta A)^{\mathrm{T}} & (JP\Delta A)^{\mathrm{T}} \\ (B_2SJ)^{\mathrm{T}} & F^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_\infty & \\ & W_\infty \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} X_\infty^{\mathrm{T}} & \\ & W_\infty^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A - B_2K + \Delta A & B_2SJ \\ JP\Delta A & F \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} (C_1 - D_{12}K)^{\mathrm{T}} \\ (D_{12}SJ)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}[C - D_{12}K \quad D_{12}SJ] +$$

$$\frac{1}{\bar{\gamma}^2}\begin{bmatrix} X_\infty^{\mathrm{T}} & \\ & W_\infty^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ JPB_1 \end{bmatrix} \times$$

$$[B_1^{\mathrm{T}} \quad (JPB_1)^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix} X_\infty & \\ & W_\infty \end{bmatrix}.$$

将上式等号右半部分展开, 可得

$$A_c^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}A_c + C_c^{\mathrm{T}}C_c + \frac{1}{\bar{\gamma}^2}Y^{\mathrm{T}}B_cB_c^{\mathrm{T}}Y \leq$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^{\mathrm{T}} & M_{22} \end{bmatrix}.$$

其中

$$M_{11} = (A - B_2R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)^{\mathrm{T}}X_\infty +$$
$$X_\infty^{\mathrm{T}}(A - B_2R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}}C_1) +$$
$$C_1^{\mathrm{T}}(I - D_{12}R_1^{-1}D_{12}^{\mathrm{T}})C_1 +$$
$$\frac{1+\alpha}{\gamma^2}X_\infty^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}X_\infty + X_\infty^{\mathrm{T}}GG^{\mathrm{T}}X_\infty -$$
$$X_\infty^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}R_1B_2X_\infty + \left(1 + \frac{1}{\rho_1}\right)\bar{\rho}^2H^{\mathrm{T}}H,$$

$$M_{22} = F^{\mathrm{T}}W_\infty + W_\infty^{\mathrm{T}}F + (D_{12}SJ)(D_{12}SJ)^{\mathrm{T}} +$$
$$\frac{1}{\gamma^2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)W_\infty^{\mathrm{T}}JPB_1(JPB_1)^{\mathrm{T}}W_\infty +$$
$$\rho_1W_\infty^{\mathrm{T}}JPG(JPG)^{\mathrm{T}}W_\infty,$$

$$M_{12} = X_\infty^{\mathrm{T}}B_2SJ + (C_1 - D_{12}K)^{\mathrm{T}}D_{12}SJ.$$

由式(7) 可得 $M_{11} < 0$. 将 K 的表达式代入 M_{12} 可得 $M_{12} = 0$. 再由引理 2 得 $M_{22} < 0$. 从而

$$A_c^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A_c + C_c^{\mathrm{T}}C_c + \frac{1}{\bar{\gamma}^2}P^{\mathrm{T}}B_cB_c^{\mathrm{T}}P < 0,$$

同时有 $\begin{bmatrix} E & \\ & J \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}Y = Y^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} E & \\ & J \end{bmatrix} \geq 0$. 由 $\bar{\gamma}$ 和 $\bar{\rho}$ 的取法可得 $\lim\limits_{\epsilon_1 \to 1}\bar{\gamma} = \gamma$, $\lim\limits_{\epsilon_2 \to 1}\bar{\rho} = \rho$. □

4　算　　例

考虑下面具有参数不确定性和外界扰动的广义系统:

$$E\dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1w + B_2u,$$
$$z = C_1x + D_{12}u,$$
$$y = C_2x.$$

其中

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$B_1 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^{\mathrm{T}}$,

$B_2 = [1.388 \quad 0.794 \quad 0.798 \quad 1.388]^{\mathrm{T}}$,

$C_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1], D_{12} = 0.1,$

$C_2 = [118.8 \quad 71.4 \quad 71.8 \quad 118.8].$

假设系统的不确定参数满足 $\Delta A = G\Sigma H$, Σ 满足 $\|\Sigma\| < \rho^2$. 其中: $\rho = 1, G = H = \mathrm{diag}(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$. 选取干扰抑制度 $\gamma = 1$, 则系统实现二次容许且对干扰抑制度为 γ 的状态反馈控制律为

$$u = -Kx = -R_1^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}X_\infty + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)x.$$

其中

$$X_\infty = \mathrm{diag}(0.2, 0.2, 0.2, 0.2),$$

$$K = [148.8 \quad 89.4 \quad 89.8 \quad 148.8].$$

取 $\epsilon_1 = 1/1.1, \epsilon_2 = 0.99$. 构造函数观测器参数如下:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -80 & 0 \\ 0 & -300 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 11.188\,8 \\ 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$S = [1 \quad 2], M = 1.$$

如果选择 $P = \begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, G, H, K 保持不变, 则通过 $u = -\omega$ 进行反馈控制后, 闭环系统对干扰的抑制度和对不确定参数的限制度分别为 $\bar{\gamma} = 1.1, \bar{\rho} = 0.99$.

5 结 论

本文将分步 H_∞ 控制方法推广到具有参数不确定性和系统外部未知扰动的广义系统, 基于广义函数观测器实现系统的鲁棒控制. 首先根据给定的干扰抑制度和不确定参数的限制度, 通过求解一个广义代数 Riccati 不等式得到系统的状态反馈控制器, 然后构造系统的广义函数观测器, 使用状态函数的估计值实现状态反馈控制. 结果证明, 如果选择合适的观测器结构参数, 闭环系统仍能保持二次稳定, 且能任意逼近状态反馈下系统的鲁棒性能.

参考文献(References):

[1] Wang H S, Yung C F, Chang F R. Bounded real Lemma and H_∞ control for descriptor systems[J]. *IEE Proc Control Theory Appl*, 1998, 145(3): 316-322.

[2] Lin C, Wang J L. Robustness of uncertain descriptor systems[J]. *Systems and Control Letters*, 1997, 31(3): 129-138.

[3] Huang J C, Wang H S, Chang F R. Robust H_∞ control for uncertain linear time-invariant descriptor systems[J]. *IEE Proc Control Theory Appl*, 2000, 147(6): 648-654.

[4] 申铁龙. H_∞控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996. 197-204.

[5] Hou M, Muller P C. Observer design for descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1): 164-168.

[6] Darouach M, Boutayeb M. Design of observers for descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(7): 1323-1327.

[7] Hou M, Muller P C. Design of a class of Luenberger observer for descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(1): 133-136.

[8] Darouach M, Zasadzinski M, Hayar M. Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(7): 1068-1072.

[9] 邢伟, 张庆灵, 王启义, 等. 广义系统状态反馈 H_∞控制的一个条件[J]. 控制与决策, 2001, 16(2): 219-225.
(Xing W, Zhang Q L, Wang Q Y, et al. A condition of state feedback H_∞ control for descriptor systems[A]. *Control and Decision*, 2001, 16(2): 219-225.)

[10] Yang D M, Zhang Q L, Zhang G F. H_2 algebraic Riccati equation for descriptor systems[A]. *Proc of the American Control Conference*[C]. Arlington, 2001. 2937-2942.

(上接第 1398 页)

[3] Fang C C, Abed E H. Sampled-data modeling and analysis of closed-loop PWM DC-DC converters[A]. *Proc IEEE ISCAS*[C]. Orlando, 1999. 110-115.

[4] Khalil H K. *Nonlinear Systems*[M]. New York: Macmillan, 1992. 89-110.

[5] Hamill D C, Deane J H B, Jefferies J. Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings[J]. *IEEE Trans on Power Electronics*, 1992, 7(1): 25-36.