文章编号: 1001-0920(2004)12-1407-05

一种基于三角模糊数多指标信息的 FCM 聚类算法

樊治平, 于春海, 尤天慧
(东北大学 工商管理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 针对一类具有不确定性三角模糊数多指标信息的聚类分析问题, 基于传统的数值信息 FCM 聚类算法, 提出一种新的聚类分析算法. 首先描述了具有三角模糊数多指标信息的聚类分析问题, 提出并证明了基于三角模糊数多指标信息的关于最优划分和最优聚类中心确定的两个定理; 然后根据这两个定理, 进一步给出了基于三角模糊数信息的 FCM 聚类算法的迭代步骤; 最后通过一个算例说明了该聚类算法的具体应用.

关键词: 聚类分析; 三角模糊数; FCM 聚类算法; 最优模糊划分; 模糊集
中图分类号: TP391.41; N945.25　　**文献标识码**: A

An FCM clustering algorithm for multiple attribute information with triangular fuzzy numbers

FAN Zhi-ping, YU Chun-hai, YOU Tian-hui
(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: FAN Zhi-ping, E-mail: zhipingfan@yahoo.com)

Abstract: Aiming at multiple attribute clustering analysis problems with uncertain triangular fuzzy numbers, a new clustering analysis algorithm is proposed based on the traditional FCM clustering algorithm. The multiple attribute clustering analysis problem with triangular fuzzy numbers is introduced. Then two theorems for determining the optimal partition and the optimal clustering center are proposed and proved. Based on that, calculation steps of the FCM clustering algorithm for multiple attribute information with triangular fuzzy numbers are presented. Finally, a numerical example shows the applicability of the FCM clustering algorithm.

Key words: clustering analysis; triangular fuzzy numbers; FCM clustering algorithm; optimal fuzzy partition; fuzzy set

1 引　　言

聚类是指按照事物的某些属性将事物聚集成类, 使类间的相似性尽量小, 类内相似性尽量大的一个无监督学习过程. 模糊聚类分析就是应用模糊数学方法将具有相似性质的事物分开并加以分类. 在模糊聚类分析方法中, FCM (Fuzzy C-Means) 聚类算法是常用的分析方法之一, 该方法最早由 Dunn[1] 提出, 并由 Bezdek[2] 将之推广, 目前已在模式识别、图像处理、模糊建模和经济管理等许多领域得到了广泛应用. 然而, 现有的 FCM 聚类算法及其相关方法[1~7], 通常仅适用于被聚类的信息(一般指聚类对象特征指标值)是精确(数值)信息. 在许多实际问题中, 由于待聚类的信息估计不精确或测量误差等原因, 常常以三角模糊数形式来表示, 于是, 具有三角模糊数信息的聚类分析问题的研究受到了广泛关注[8,9]. 文献[8]采用编网法进行聚类; 文献[9]则是

收稿日期: 2003-10-24; **修回日期**: 2003-12-11.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70071004, 70371050); 教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目(教人司[2002]123).
作者简介: 樊治平(1961—), 男, 江苏镇江人, 教授, 博士生导师, 从事管理决策分析、信息技术与管理等研究; 于春海(1968—), 男, 吉林长春人, 副教授, 博士, 从事管理决策分析、系统分析等研究.

基于传统的 FCM 聚类算法对模糊数据的聚类算法进行了研究,但其采用的三角模糊数间的距离公式过于繁琐,且理论依据并不充分,另外,关于聚类的收敛性也没有给出详实的论证.

本文在传统的 FCM 聚类算法基础上,针对具有不确定性三角模糊数多指标信息的聚类分析问题,提出一种新的比文献[9]更为简便适用的聚类分析算法,并对该算法的收敛性给予了充分的论证.

2 具有三角模糊数多指标信息的聚类分析问题

记 R^+ 为正实数集,$F(R^+)$ 为全体正模糊数集,R 为实数集,$F(R)$ 为全体模糊数集. 为便于问题描述,首先给出有关三角模糊数的几个相关概念.

定义 1 设 $\tilde{a} \in F(R)$,且

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} 1, x = a; \\ \dfrac{x - a^-}{a - a^-}, a^- \leq x \leq a; \\ \dfrac{a^+ - x}{a^+ - a}, a \leq x \leq a^+; \\ 0, \text{其他} \end{cases} \tag{1}$$

则称 $\tilde{a}$ 为三角模糊数,记为 $\tilde{a} = (a^-, a, a^+)$.

定义 2 设 $\tilde{a} = [a^-, a, a^+]$ 和 $\tilde{b} = [b^-, b, b^+]$ 为任意两个正三角模糊数,根据三角模糊数运算法则[10]有:① $\tilde{a} + \tilde{b} = [a^- + b^-, a + b, a^+ + b^+]$;② $k\tilde{a} = [ka^-, ka, ka^+]$,$k > 0$ 且 $k \in R^+$.

定义 3[11] 设三角模糊数向量 $\bar{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_p)^T$,$\bar{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_p)^T$,$\forall \tilde{a}_i, \tilde{b}_i \in F(R)$,$i = 1, 2, \cdots, p$,则 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 之间的距离定义为

$$D(\bar{a}, \bar{b}) = \| \bar{a} - \bar{b} \| = \frac{1}{3}\sqrt{\sum_{i=1}^{p} [(a_i^- - b_i^-)^2 + (a_i - b_i)^2 + (a_i^+ - b_i^+)^2]}. \tag{2}$$

定义 4 设 c 和 n 是给定的两个正整数且满足 $c < n$;$U = (\mu_{ik})_{c\times n}$ 是一个 Fuzzy 矩阵且满足条件:① $\sum_{i=1}^{c} \mu_{ik} = 1, \forall k$;② $\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik} > 0, \forall i$. 称 U 为 (c, n)—Fuzzy 划分,并将 (c, n)—Fuzzy 划分的全体记为 $U_f(c, n)$.

定义 5 设 $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\} \subset R^p$ 是样本集,$V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_c\}$ 是 R^p 中的有限集,$U = (\mu_{ik})_{c\times n}$ 是 Fuzzy 矩阵,$U \in U_f(c, n)$. 其中,$\bar{x}_k = (\tilde{x}_{k1}, \tilde{x}_{k2}, \cdots, \tilde{x}_{kp})^T$,$\bar{v}_i = (\tilde{v}_{i1}, \tilde{v}_{i2}, \cdots, \tilde{v}_{ip})^T$,$\mu_{ik}$ 表示第 k 个元素 $\bar{x}_k$ 属于第 i 类 $\bar{v}_i$ 的隶属度,$k = 1, 2, \cdots, n$,$i = 1, 2, \cdots, c$,且 $c < n$. 则聚类样本集 X 对于全体类别 V 的广义欧式距离平方和定义为

$$J(U, V) = \sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik})^m \| \bar{v}_i - \bar{x}_k \|^2, \tag{3}$$

其中 $m \in R$ 且 $m > 1$.

定义 6 若对于给定的 $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\} \subset R^p$,有 $V^* = \{\bar{v}_1^*, \bar{v}_2^*, \cdots, \bar{v}_c^*\} \subset R^p$ 和 $U^* = (\mu_{ik}^*)_{c\times n} \in U_f(c, n)$,使对其他任意 $V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_c\} \subset R^p$ 和 $U = (\mu_{ik})_{c\times n} \in U_f(c, n)$,都有 $J(U^*, V^*) \leq J(U, V)$,则称 U^* 为 X 的最优 (c, n)—Fuzzy 划分,称 V^* 为 Fuzzy 聚类中心.

设具有三角模糊数多指标信息的聚类分析问题的待聚类对象集为 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$,其对应的样本集为 $X' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\} \subset R^p$,特征指标集为 $Q = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_p\}$,对于第 k 个样本 $\vec{x}_k$ 按第 j 个指标 Q_j 进行测度,得到 $\vec{x}_k$ 关于 Q_j 的指标值为三角模糊数形式 $\tilde{x}'_{kj} = [x'^-_{kj}, x'_{kj}, x'^+_{kj}]$,不失一般性,这里假设 $\tilde{x}'_{kj} \in F(R^+)$. 本文要解决的问题是:对于已知的三角模糊数多指标样本信息,给出一个将 X 合理分类的 FCM 聚类分析算法.

3 聚类算法

对于给定的三角模糊数样本,在给出基于三角模糊数多指标信息的 FCM 聚类算法之前,首先给出关于确定最优划分和最优聚类中心的两个重要定理.

定理 1 设 $X = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\} \subset R^p$ 是样本集,其中:$\bar{x}_k = (\tilde{x}_{k1}, \tilde{x}_{k2}, \cdots, \tilde{x}_{kp})^T$,$\forall \tilde{x}_{kj} = [x_{kj}^-, x_{kj}, x_{kj}^+] \in F(R^+)$,$k = 1, 2, \cdots, n$,$j = 1, 2, \cdots, p$. 记 $H(V) = J(U^\#, V)$,且 $U^\# \in U_f(c, n)$ 是固定的. 则当 $V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_c\} \subset R^p$,记 $\bar{v}_i = (\tilde{v}_{i1}, \tilde{v}_{i2}, \cdots, \tilde{v}_{ip})^T$,$\forall \tilde{v}_{il} = [v_{il}^-, v_{il}, v_{il}^+] \in F(R^+)$ $(i = 1, 2, \cdots c;\ l = 1, 2, \cdots, p)$ 且下式成立时:

$$v_i^- = \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik})^m x_k^- \Big/ \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik})^m, \tag{4a}$$

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik})^m x_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik})^m, \tag{4b}$$

$$v_i^+ = \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik})^m x_k^+ \Big/ \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik})^m, \tag{4c}$$

使 $H(V)$ 取极小值. 式中:$i = 1, 2, \cdots, c$;$x_k^- = (x_{k1}^-, x_{k2}^-, \cdots, x_{kp}^-)^T$,$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kp})^T$,$x_k^+ = (x_{k1}^+, x_{k2}^+, \cdots, x_{kp}^+)^T$;$v_i^- = (v_{i1}^-, v_{i2}^-, \cdots, v_{ip}^-)^T$,$v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{ip})^T$,$v_i^+ = (v_{i1}^+, v_{i2}^+, \cdots, v_{ip}^+)^T$;$m$ 为大于 1 的常数.

证明 因为 $U^\# = (\mu_{ik})_{c\times n}$ 是固定的,即 μ_{ik} 均为常数,所以 $J(U, V)$ 只与 V 有关,由式(3) 可知

$$H(V) = J(U^{\#}, V) = \sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m \|\bar{v}_i - \bar{x}_k\|^2. \tag{5}$$

为使 $H(V)$ 达到极小值, 只需对每个 i, 使 $H_i(\bar{v}_i) = \sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m \|\bar{v}_i - \bar{x}_k\|^2$ 取极小值即可. 现固定 i, 设 $H_i(\bar{v}_i)$ 在 $\bar{v}_i$ 处取极小值, 则对于任意 $\bar{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \cdots, \tilde{w}_p)^T$ 且 $\bar{w} \in R^p$ 和任意实数 t, 都有

$$H_i(\bar{v}_i) \le H_i(\bar{v}_i + t\bar{w}). \tag{6}$$

注意到 $\bar{v}_i + t\bar{w} \in R^P$, $\bar{v}_i = (\tilde{v}_{i1}, \tilde{v}_{i2}, \cdots, \tilde{v}_{ip})^T$, $i = 1, 2, \cdots, c$, 即对该确定的 i 和任意确定的 $\bar{w} \in R^p$ 的函数为

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m \|\bar{v}_i + t\bar{w} - \bar{x}_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{p}\left[(v_{ij}^- + tw_j^- - x_{kj}^-)^2 + (v_{ij} + tw_j - x_{kj})^2 + (v_{ij}^+ + tw_j^+ - x_{kj}^+)^2\right]. \tag{7}$$

当 $t = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t\big|_{t=0} &= \sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{p}\big[2(v_{ij}^- + tw_j^- - x_{kj}^-)w_j^- + 2(v_{ij} + tw_j - x_{kj})w_j + 2(v_{ij}^+ + tw_j^+ - x_{kj}^+)w_j^+\big]\big|_{t=0} = \\ &\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{p}\big[2(v_{ij}^- - x_{kj}^-)w_j^- + 2(v_{ij} - x_{kj})w_j + 2(v_{ij}^+ - x_{kj}^+)w_j^+\big] = \\ &\frac{2}{9}w^-\left[v_i^-\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m - \sum_{k=1}^{m}(\mu_{ik})^m x_k^-\right] + \frac{2}{9}w\left[v_i\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m - \sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m x_k\right] + \\ &\frac{2}{9}w^+\left[v_i^+\sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m - \sum_{k=1}^{n}(\mu_{ik})^m x_k^+\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

式中: $w^- = (w_1^-, w_2^-, \cdots, w_p^-)$, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_p)$, $w^+ = (w_1^+, w_2^+, \cdots, w_p^+)$. 由式(8) 容易得出: 当式(4) 成立时, $\forall \bar{w}$(即 w^-, w, w^+ 是任意的) 都有 $\mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t\big|_{t=0} = 0$. 即当式(4) 成立时, 使 $H(V)$ 取极小值. □

定理 2　设 $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\} \subset R^p$ 是样本集, $V^{\#} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_c\} \subset R^p$ 是固定的, 并取定 $m > 1$, $c < n$. 任取 $k(1 \le k \le n)$, 有下列两种情况:

1) 若有 $l(1 \le l \le c)$ 使 $\bar{x}_k = \bar{v}_l$, 则令

$$\mu_{ik}^* = \begin{cases} 1, & i = l; \\ 0, & i \ne l. \end{cases} \tag{9}$$

2) 若对于任意 $i(i = 1, 2, \cdots, c)$, 都有 $\bar{x}_k \ne \bar{v}_i$, 则令

$$\mu_{ik}^* = \frac{1}{\sum_{t=1}^{c}\left(\dfrac{\|\bar{v}_i - \bar{x}_k\|}{\|\bar{v}_t - \bar{x}_k\|}\right)^{\frac{2}{m-1}}}. \tag{10}$$

设由式(9) 和(10) 构成 $U^* = (\mu_{ik}^*)_{c\times n}$, 则 $U^* \in U_f(c, n)$, 且使 $G(U) = J(U, V^{\#})$ 取极小值.

证明　对于 $U = (\mu_{ik})_{c\times n}$, 令 $U_k = (\mu_{1k}, \mu_{2k}, \cdots, \mu_{ck})^T$, 则 $U = (U_1, U_2, \cdots, U_n)$. 因为 $V^{\#}$ 是固定的, 故 $G(U) = J(U, V^{\#})$ 只与 U 有关, 令

$$G_k(U_k) = \sum_{i=1}^{c}(\mu_{ik})^m \|\bar{v}_i - \bar{x}_k\|^2, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{11}$$

因 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_c$ 是固定的, 故 $G_k(U_k)$ 仅与 U_k 和 $\bar{x}_k$ 有关. 由式(3) 得

$$G(U) = J(U, V^{\#}) = \sum_{k=1}^{n}G_k(U_k). \tag{12}$$

因此, $U = (U_1, U_2, \cdots, U_n)$ 使 $G(U)$ 取极小值, 当且仅当对于每个 k, U_k 使 $G_k(U_k)$ 取极小值. 现任取 $k(1 \le k \le n)$, 有下列两种情况:

1) 若有 $l(1 \le l \le c)$ 使 $\bar{x}_k = \bar{v}_l$, 则有式(9), 由式(11) 易知 $G_k(U_k) = 0$ 达到了极小值.

2) 若对于任意 i, 都有 $\bar{x}_k \ne \bar{v}_i$, 由此立即推知, 对于任意 i, $\|\bar{v}_i - \bar{x}_k\| > 0$. 由式(10) 可将 $G_k(U_k)$ 取极小值的问题归结为如下条件极值问题:

$$\min G_k(U_k) = \sum_{i=1}^{c}(\mu_{ik})^m \|\bar{v}_i - \bar{x}_k\|^2, \tag{13a}$$

$$\mathrm{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{c}\mu_{ik} = 1, \mu_{ik} \ge 0, \tag{13b}$$

$$i = 1, 2, \cdots, c, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{13c}$$

记 $F_k(U_k, \lambda) = \sum_{i=1}^{c}(\mu_{ik})^m \|\bar{v}_i - \bar{x}_k\|^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{c}\mu_{ik} - 1\right)$, 令 $\partial F_k(U_k, \lambda)/\partial\mu_{ik} = 0$, 则有 $m(\mu_{ik})^{m-1}\|\bar{v}_i - \bar{x}_k\|^2 - \lambda = 0$, $i = 1, 2, \cdots, c$. 因为 $\|\bar{v}_i - \bar{x}_k\| \ne 0$, 故

$$\mu_{ik}^* = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\left(1/\|\bar{v}_i - \bar{x}_k\|^{\frac{2}{m-1}}\right). \tag{14}$$

对于式(14) 改 i 为 t, 两边令 t 从 1 到 c 求和, 由 $\sum_{t=1}^{c}\mu_{tk} = 1$ 得 $1 = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}\sum_{t=1}^{c}\left(1/\|\bar{v}_t - \bar{x}_k\|^{\frac{2}{m-1}}\right)$. 由此得

$$\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}} = \frac{1}{\sum_{t=1}^{c}\left(1/\|\bar{v}_t - \bar{x}_k\|^{\frac{2}{m-1}}\right)}. \tag{15}$$

将式(15) 代入式(14) 即可得到式(10).

因假设 $c < n$, 故至少有一个 k, 使得对于任意 i 都有 $\overline{\mathrm{x}_k} \neq \overline{\mathrm{v}_i}$. 此时, μ_{ik}^* 由式(10) 确定. 容易证明 $\sum_{i=1}^{c} \mu_{ik}^* = 1$. 由式(10) 可知, 对于任意 i 都有 $\mu_{ik}^* > 0$, 故有 $\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}^* > 0$, 即令 $\mathrm{U}^* = (\mu_{ik}^*)_{c\times n}$, 则 $\mathrm{U}^* \in \mathrm{U}_f(c, n)$. □

根据定理 1 和定理 2, 下面给出基于正三角模糊数多指标信息的 FCM 聚类算法的具体计算步骤.

Step1　特征指标值规范化. 采用"比重变换法"[12], 根据三角模糊数运算法则, 将 $\widetilde{x}'_{kj} = [x_{kj}^{\prime -}, x'_{kj}, x_{kj}^{\prime +}]$ 规范化为 $\widetilde{x}_{kj} = [x_{kj}^-, x_{kj}, x_{kj}^+]$, $k = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, p$. 其计算公式为

$$\begin{cases} x_{kj}^- = x_{kj}^{\prime -} / x_j^{\max}, \\ x_{kj} = x'_{kj} / x_j^{\max}, \\ x_{kj}^+ = x_{kj}^{\prime +} / x_j^{\max}, \end{cases} \text{当 } Q_j \text{ 为效益型指标(即指标值越大越好)}; \tag{16a}$$

$$\begin{cases} x_{kj}^- = x_j^{\min} / x_{kj}^{\prime +}, \\ x_{kj} = x_j^{\min} / x'_{kj}, \\ x_{kj}^+ = x_j^{\min} / x_{kj}^{\prime -}, \end{cases} \text{当 } Q_j \text{ 为成本型指标(即指标值越小越好)}. \tag{16b}$$

其中: $x_j^{\max} = \max\{x_{1j}^{\prime U}, x_{2j}^{\prime U}, \cdots, x_{nj}^{\prime U}\}$, $x_j^{\min} = \min\{x_{1j}^{\prime L}, x_{2j}^{\prime L}, \cdots, x_{nj}^{\prime L}\}$, 显然 $x_{kj}^-, x_{kj}, x_{kj}^+ \in [0, 1]$, $\forall k, j$. 此时记 $\overline{\mathrm{x}_k} = (\widetilde{x}_{k1}, \widetilde{x}_{k2}, \cdots, \widetilde{x}_{kp})^{\mathrm{T}}$.

Step2　设定正整数 c(要求将待聚类对象集 $\mathrm{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 分为 c 类) 和 m ($m > 1$) 以及计算精度 ϵ($\epsilon > 0$). 设给定初始化聚类原型为 $\mathrm{V}^{(0)}$, 令 $b = 0$.

Step3　计算 $\mathrm{U}^{(0)}$. 若 $\forall i$, 都有 $\overline{\mathrm{x}_k} \neq \overline{\mathrm{v}_i^{(0)}}$, 则令

$$\mu_{ik}^{(0)} = 1 \Bigg/ \sum_{t=1}^{c} \left(\frac{\| \overline{\mathrm{v}_i^{(0)}} - \overline{\mathrm{x}_k} \|}{\| \overline{\mathrm{v}_t^{(0)}} - \overline{\mathrm{x}_k} \|} \right)^{2/(m-1)},$$

$$i = 1, 2, \cdots, c;\ k = 1, 2, \cdots, n. \tag{17}$$

如果 $\exists\, l(1 \leq l \leq c)$, 使得 $\overline{\mathrm{x}_k} = \overline{\mathrm{v}_l^{(0)}}$, 则当 $i = l$ 时, 令 $\mu_{ik}^{(0)} = 1$; 当 $i \neq l$ 时, 令 $\mu_{ik}^{(0)} = 0$.

Step4　采用下式计算 $\mathrm{V}^{(b+1)}$:

$$\mathrm{v}_i^{-(b+1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik}^{(b)})^m \mathrm{x}_k^- \right) \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik}^{(b)})^m; \tag{18a}$$

$$\mathrm{v}_i^{(b+1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik}^{(b)})^m \mathrm{x}_k \right) \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik}^{(b)})^m; \tag{18b}$$

$$\mathrm{v}_i^{+(b+1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik}^{(b)})^m \mathrm{x}_k^+ \right) \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik}^{(b)})^m. \tag{18c}$$

其中: $i = 1, 2, \cdots, c$; $\mathrm{x}_k^- = (x_{k1}^-, x_{k2}^-, \cdots, x_{kp}^-)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kp})^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{x}_k^+ = (x_{k1}^+, x_{k2}^+, \cdots, x_{kp}^+)^{\mathrm{T}}$; $\mathrm{v}_i^{-(b+1)} = (v_{i1}^{-(b+1)}, v_{i2}^{-(b+1)}, \cdots, v_{ip}^{-(b+1)})^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{v}^{(b+1)} = (v_{i1}^{(b+1)}, v_{i2}^{(b+1)}, \cdots, v_{ip}^{(b+1)})^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{v}_i^{+(b+1)} = (v_{i1}^{+(b+1)}, v_{i2}^{+(b+1)}, \cdots, v_{ip}^{+(b+1)})^{\mathrm{T}}$.

Step5　计算 $\mathrm{U}^{(b+1)}$. 若 $\forall i$, 都有 $\overline{\mathrm{x}_k} \neq \overline{\mathrm{v}_i^{(b+1)}}$, 令

$$\mu_{ik}^{(b+1)} = 1 \Bigg/ \sum_{t=1}^{c} \left(\frac{\| \overline{\mathrm{v}_i^{(b+1)}} - \overline{\mathrm{x}_k} \|}{\| \overline{\mathrm{v}_t^{(b+1)}} - \overline{\mathrm{x}_k} \|} \right)^{2/(m-1)},$$

$$i = 1, 2, \cdots, c;\ k = 1, 2, \cdots, n. \tag{19}$$

如果 $\exists\, l(1 \leq l \leq c)$, 使得 $\overline{\mathrm{x}_k} = \overline{\mathrm{v}_l^{(b+1)}}$, 则当 $i = l$ 时, 令 $\mu_{ik}^{(b+1)} = 1$; 当 $i \neq l$ 时, 令 $\mu_{ik}^{(b+1)} = 0$.

Step6　计算 $J(\mathrm{U}^{(b)}, \mathrm{V}^{(b)})$ 和 $J(\mathrm{U}^{(b+1)}, \mathrm{V}^{(b+1)})$. 由定义 5, $\forall b$, 显然有 $J(\mathrm{U}^{(b+1)}, \mathrm{V}^{(b+1)}) > 0$. 首先固定 U, 即取其为 $\mathrm{U}^{(b)}$, 由式(18) 即可确定新的聚类中心 $\mathrm{V}^{(b+1)}$, 此时根据定理 1 有 $J(\mathrm{U}^{(b)}, \mathrm{V}^{(b+1)}) \leq J(\mathrm{U}^{(b)}, \mathrm{V}^{(b)})$. 其次再固定聚类中心 V, 将其固定在第 $b+1$ 步迭代后的位置 $\mathrm{V}^{(b+1)}$, 由式(19) 可计算第 $b+1$ 步的隶属度值为 $\mathrm{U}^{(b+1)}$, 此时根据定理 2 有 $J(\mathrm{U}^{(b+1)}, \mathrm{V}^{(b+1)}) \leq J(\mathrm{U}^{(b)}, \mathrm{V}^{(b+1)})$. 综上有 $0 \leq J(\mathrm{U}^{(b+1)}, \mathrm{V}^{(b+1)}) \leq J(\mathrm{U}^{(b)}, \mathrm{V}^{(b)})$ 成立, 故 $\lim_{b\to+\infty} J(\mathrm{U}^{(b+1)}, \mathrm{V}^{(b+1)})$ 存在. 当 $J(\mathrm{U}^{(b)}, \mathrm{V}^{(b)}) - J(\mathrm{U}^{(b+1)}, \mathrm{V}^{(b+1)}) < \epsilon$ 时, 则停止迭代计算, 以 $\mathrm{U}^{(b+1)}$, $\mathrm{V}^{(b+1)}$ 作为最优 Fuzzy 划分和最优聚类中心, 否则重复 Step4.

4　算　　例

考虑一个具有三角模糊数多指标信息的聚类

表 1　聚类对象特征指标值

Q_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Q_1	[3.7, 4, 4.7]	[1.5, 2, 2.5]	[3, 3.2, 4]	[3.5, 4, 4.5]	[2.5, 3.2, 3.5]
Q_2	[5.9, 6, 6.9]	[4.7, 5, 5.7]	[4.2, 4.5, 5.2]	[4.5, 5, 5.5]	[5, 5.4, 6]
Q_3	[8, 8.5, 10]	[4, 5.2, 6]	[4, 5, 6]	[7, 7.5, 9]	[6, 7.5, 8]
Q_4	[30, 36, 40]	[65, 68, 75]	[60, 64, 70]	[35, 42, 45]	[50, 55, 60]
Q_5	[3, 3.8, 5]	[3, 4.2, 5]	[7, 8.4, 9]	[8, 8.8, 10]	[5, 6, 7]
Q_6	[90, 96, 100]	[70, 76, 80]	[80, 85, 90]	[85, 88, 95]	[85, 91, 95]
Q_7	[3, 4.5, 5]	[7, 7.8, 9]	[7, 8.5, 9]	[6, 7.2, 8]	[4, 5, 6]
Q_8	[6, 7.5, 8]	[4, 4.6, 6]	[5, 6.5, 7]	[7, 8, 9]	[8, 9, 10]

表 2　聚类中心特征指标值

Q_j	$v_1^{(0)}$	$v_2^{(0)}$	$v_1^{(6)}$	$v_2^{(6)}$
Q_1	[0.7, 0.8, 1]	[0.35, 0.39, 0.45]	[0.51, 0.64, 0.81]	[0.36, 0.41, 0.49]
Q_2	[0.75, 0.80, 0.88]	[0.78, 0.85, 0.96]	[0.76, 0.86, 0.92]	[0.70, 0.78, 0.84]
Q_3	[0.4, 0.50, 0.65]	[0.71, 0.76, 0.92]	[0.42, 0.53, 0.62]	[0.68, 0.77, 0.88]
Q_4	[0.42, 0.45, 0.48]	[0.68, 0.75, 0.85]	[0.43, 0.47, 0.50]	[0.62, 0.67, 0.79]
Q_5	[0.34, 0.45, 0.5]	[0.78, 0.9, 1.0]	[0.44, 0.56, 0.64]	[0.55, 0.64, 0.75]
Q_6	[0.72, 0.75, 0.81]	[0.83, 0.92, 0.95]	[0.74, 0.80, 0.84]	[0.86, 0.91, 0.96]
Q_7	[0.799, 0.85, 1]	[0.68, 0.82, 0.91]	[0.76, 0.88, 0.98]	[0.50, 0.64, 0.72]
Q_8	[0.42, 0.48, 0.63]	[0.67, 0.82, 0.89]	[0.45, 0.54, 0.65]	[0.69, 0.81, 0.89]

问题. 假设有 5 个待聚类对象 $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, 而聚类对象的特征由 8 个指标描述 $(Q_1, Q_2, \cdots, Q_8)$, 其中: Q_1, Q_2 和 Q_4 为成本型指标, 其他 5 个为效益型指标. 该问题的原始数据如表 1 所示.

为解决该聚类问题, 可按前述计算步骤进行. 限于篇幅, 这里仅给出其中的一些计算结果. 假设 $c = 2, m = 2, \epsilon = 0.005$, 聚类中心初始值及迭代结果见表 2. 经过 6 次迭代, $J(U^{(6)}, V^{(6)}) - J(U^{(5)}, V^{(5)}) = 0.000\,62 < \epsilon$, 最优模糊划分迭代结果见表 3. 从表 3 可以看出, 若根据最大隶属原则对样本分类, 则 $\{X_1, X_4, X_5\}$ 为一类, $\{X_2, X_3\}$ 为另一类. 另外, 还可进一步选取不同的 c, m 及 ϵ 值对分类结果进行比较研究, 从中寻求最好的分类结果.

表 3　模糊划分隶属度值

隶属度值	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$\mu_{1k}^{(6)}$	0.184	0.923	0.688	0.187	0.137
$\mu_{2k}^{(6)}$	0.816	0.077	0.312	0.813	0.863

5　结　语

本文给出一种基于三角模糊数多指标信息的 FCM 聚类分析算法. 该算法可直接处理特征空间为三角模糊数的聚类问题, 它可应用于模式识别、模糊控制和经济管理等许多领域. 需要指出的是, 与该聚类算法有关的问题, 如各项指标值的权重、参数 c 和 m 的确定等, 这些问题的解决直接关系到聚类结果的好坏, 这将是下一步值得深入研究的问题.

参考文献(References):

[1] Dunn J C. A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters [J]. J Cybernet, 1974, 3(2): 32-57.

[2] Bezdek J C. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms* [M]. New York: Plenum Press, 1981.

[3] Pezdrey W. Condition fuzzy C-means [J]. *Recognition Letters*, 1996, 17(4): 625-637.

[4] Bellman R E, Zadeh L A. Decision-making in a fuzzy environment [J]. *Management Science*, 1970, 17(4): 141-164.

[5] Chiu Stephen L. A cluster estimation method to fuzzy model identication [A]. *Proc of the IEEE Conf on Control Appilcations — Part2 (of 3)* [C]. 1994. 1240-1245.

[6] Bezdek J C, Dunn J C. Optimal fuzzy partitions: A heuristic for extimating the parameters in a mixture of normal distributions [J]. *IEEE Trans on Computer*, 1986, 35(8): 935-938.

[7] Cheng T W, Goldgof Dmitry B, Hall Lawren E O. Fast fuzzy clustering [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 93(1): 49-56.

[8] 张兴芳, 孟广武. 基于模糊数模糊集的聚类分析[J]. 北华大学学报, 2000, 1(5): 374-376.
(Zhang X F, Meng G W. The cluster analysis based on fuzzy number fuzzy sets [J]. *J of Beihua University*, 2000, 1(5): 374-376.)

[9] Yang M S, Ko C H. On a class of fuzzy C-numbers clustering problems for fuzzy data [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 84(1): 49-60.

[10] 杨纶标, 高英仪. 模糊数学原理及应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2002. 115-125: 176-183.

[11] Vania P, Ivan P. Comparison of clusters from fuzzy numbers [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, 97(1): 75-81.

[12] Goh C H, Tung Y C A, Cheng C H. A revised weighted sum decision model for robot selection [J]. *Computers and Industrial Engineering*, 1996, 30(2): 193-199.