

文章编号: 1001-0920(2004)12-1416-04

具有不对称结构的广义时滞神经网络的动态分析

季 策, 张化光, 王占山

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 研究一类具有不对称互连结构的广义时滞神经网络的动态行为. 通过构造适当的 Lyapunov 泛函及扇区条件, 给出了平衡点渐近稳定的充分条件, 并对由推论给出的一种小增益条件进行了分析. 仿真结果进一步证明了结论的有效性.

关键词: 广义时滞神经网络; Lyapunov 泛函; 渐近稳定性

中图分类号: TP183 **文献标识码:** A

Dynamic analysis for the generalized neural networks with time delay and asymmetric structure

J I Ce, Z H A N G H u a - g u a n g , W A N G Z h a n - s h a n

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China

Correspondent: J I Ce, E-mail: hanfj119@163.net)

Abstract: The dynamic behavior of a class of generalized neural networks with time delay and asymmetric interconnecting structure is investigated. The sufficient condition for the asymptotic stability of equilibrium point is given via the method of constructing a suitable Lyapunov functional and sector conditions. A small gain condition obtained by the corollary is analyzed. Simulation samples demonstrate the effectiveness of the results.

Key words: generalized neural networks with time delay; Lyapunov functional; asymptotic stability

1 引 言

具有对称互连结构的反馈型神经网络的研究及应用已渗透到各个领域, 并取得了丰硕的成果^[1~3]. 然而, 由于参数的不确定性及测量误差的影响, 互连结构要实现完全对称是不可能的; 另一方面, 在神经网络的实现过程中, 会不可避免地引入时滞^[4,5], 并可能产生振荡. 因此, 在分析神经网络的动态行为时, 考虑时滞和互连结构的影响是很重要的. 文献[6,7]给出了具有不对称互连结构的时滞 Hopfield 神经网络的定性结论. 本文对上述文献中的结论进行推广, 考虑一类更为广泛的神经网络模型, 即具有

不对称互连结构的广义时滞神经网络模型, 研究该模型的定性分析问题. 通过构造适当的 Lyapunov 泛函, 以矩阵形式给出平衡点渐近稳定的充分条件, 这些条件仅包含一个对矩阵或不等式的某种检验. 在反馈型神经网络的设计及实现过程中, 这些条件很实用. 仿真也进一步证明了推论中给出的小增益条件在实际应用中是行之有效的.

2 网络模型

广义时滞神经网络模型如下:

$$\dot{x}(t) = -A(x(t)) [B(x(t)) - TS(x(t-\tau))], \quad (1)$$

收稿日期: 2003-09-28; 修回日期: 2003-12-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60244017); 辽宁省自然科学基金资助项目(20022030); 沈阳市自然科学基金资助项目(1022033-1-07).

作者简介: 季策(1969—), 女, 辽宁沈阳人, 博士生, 从事神经网络控制的研究; 张化光(1959—), 男, 吉林省吉林市人, 教授, 博士生导师, 从事神经网络控制、模糊控制等研究.

其中

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n)^T, \\ A(x) &= \text{diag}[a_1(x_1), \dots, a_n(x_n)], \\ B(x) &= [b_1(x_1), \dots, b_n(x_n)]^T, \\ S(x) &= [s_1(x_1), \dots, s_n(x_n)]^T, \end{aligned}$$

互连矩阵 $T = [t_{ij}] \mathbf{R}^{n \times n}$ 可为非对称矩阵 本文假设各神经元具有相同的 τ 值, 并假设放大函数 $a_i(\bullet)$ 是正的、有界的连续函数, 即 $0 < \alpha_i^- \leq a_i(x_i) \leq \alpha_i^+$, $i = 1, 2, \dots, n$; 任意函数 $b_i(\bullet)$ 是连续的; $s_i(\bullet): \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$ 为 Sigmoid 函数 网络模型(1) 的拓扑结构如图 1 所示

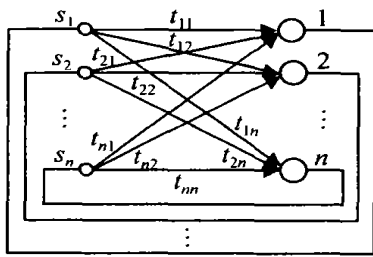


图 1 神经网络模型(1) 的拓扑结构

当 $T = [t_{ij}] \mathbf{R}^{n \times n}$ 为对称矩阵且 $\tau = 0$ 时, 式(1) 变为

$\dot{x}(t) = -A(x(t))[B(x(t)) - TS(x(t))]$, (2)
该式即为 Cohen 和 Grossberg 在文献[8] 中给出的一种具有对称互连结构的广义神经网络模型 若在式(2) 中, 令

$$\begin{aligned} A(x(t)) &= \text{diag}[1/C_1, \dots, 1/C_n], \\ B(x(t)) &= [x_1(t)/R_1 - I_1, \dots, x_n(t)/R_n - I_n]^T, \end{aligned}$$

则式(2) 变为

$$Cx(t) = -Rx(t) + TS(x(t-\tau)) + I. \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} C &= \text{diag}[C_1, \dots, C_n], \\ R &= \text{diag}[1/R_1, \dots, 1/R_n], \\ I &= [I_1, \dots, I_n], \end{aligned}$$

C_i, R_i 和 I_i 分别为神经元的等效输入电容、等效输入电阻和外部输入电流 显然, 式(3) 即为连续的 Hopfield 神经网络模型 此外, 若适当选取各变量, 还可得到更一般的神经网络模型 关于这一点, 在文献[8] 中有详细说明

3 动态分析

引理 1^[9] 对于时滞泛函微分方程 $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, 如果存在 Lyapunov 泛函 $V(t, \mathcal{Q})$, 使得存在非减连续函数 $u, v, w: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, 且 $u(0) = v(0) = 0$, 并满足 $u(\mathcal{Q}(0)) \leq V(t, \mathcal{Q}) \leq v(\mathcal{Q})$ 和 $\dot{V}(t, \mathcal{Q}) \leq -w(\mathcal{Q}(0))$, 则该泛函微分方程的零解 $x = 0$ 是渐近稳定的

在上述引理中, \mathcal{Q} 表示 \mathbf{R}^n 上的 Euclid 范数 对于 $\theta \in [-\tau, 0]$, 定义 $x_t \in C([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$ 为 $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, 其中 $t > 0, x \in C([-\tau, +\infty), \mathbf{R}^n)$, $C([-\tau, +\infty), \mathbf{R}^n)$ 表示从 $[-\tau, +\infty)$ 到 \mathbf{R}^n 的所有连续函数的集合 同理, $C([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$ 表示从 $[-\tau, 0]$ 到 \mathbf{R}^n 的所有连续函数的集合 对于任意的 $\mathcal{Q} \in C([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$, 定义 $|\mathcal{Q}| = \max\{|\mathcal{Q}(t)| : t \in [-\tau, 0]\}$.

为证明系统(1) 的平衡点 $x = 0$ 的渐近稳定性, 再作如下假设:

假设 1 函数 $s_i(x_i)$ 和 $b_i(x_i)$ 分别满足下列扇区条件:

$$0 < \sigma_i^- \leq \frac{s_i(x_i)}{x_i} \leq \sigma_i^+, \quad (4)$$

$$0 < \beta_i^- \leq \frac{b_i(x_i)}{x_i} \leq \beta_i^+, \quad (5)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$.

定理 1 对于任意的有界时滞 τ , 如果存在一个正定矩阵 P 和一个正对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, 其中 $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$, 使得矩阵

$$S = - (B^m A^m P + P A^m B^m) + \Lambda + P A^m T \Sigma^m \Lambda^{-1} \Sigma^m T^T A^m P \quad (6)$$

是负定的, 其中

$$\begin{aligned} \Sigma^m &= \text{diag}[\sigma_1^m, \dots, \sigma_n^m], \\ A^m &= \text{diag}[\alpha_1^m, \dots, \alpha_n^m], \\ A^m &= \text{diag}[\alpha_1^m, \dots, \alpha_n^m], \\ B^m &= \text{diag}[\beta_1^m, \dots, \beta_n^m], \end{aligned}$$

则系统(1) 的平衡点 $x = 0$ 是渐近稳定的

证明 将系统(1) 重写为

$$\dot{x}(t) = -A(x(t))[B(x(t)) - T \Sigma(x(t-\tau))x(t-\tau)], \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \Sigma(x) &= \text{diag}[\sigma_1(x_1), \dots, \sigma_n(x_n)], \\ \sigma_i(x_i) &= s_i(x_i)/x_i, i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

则有 $\sigma_i(x_i) \in [\sigma_i^-, \sigma_i^+]$

在此, 引入如下形式的 Lyapunov 泛函:

$$V(x_t) = x^T(t) P x(t) + \int_{-\tau}^t x^T(\theta) \Lambda x(\theta) d\theta \quad (8)$$

沿着式(7) 的任意轨迹, $V(x_t)$ 对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \\ & x^T(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) P x(t) + \\ & x^T(t) \Lambda x(t) - x^T(t-\tau) \Lambda x(t-\tau) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - B^T A^T P x(t) + x^T(t-\tau) \Sigma^T T^T A^T P x(t) - \\
 & x^T(t) P A B + x^T(t) P A T \Sigma x(t-\tau) + \\
 & x^T(t) \Lambda x(t) - x^T(t-\tau) \Lambda x(t-\tau) = \\
 & - x^T(t) \bar{B}^T A^T P x(t) - x^T(t) P A \bar{B} x(t) + \\
 & x^T(t) P A T \Sigma \Lambda^{-1} \Sigma^T T^T A^T P x(t) + \\
 & x^T(t) \Lambda x(t) - [\Lambda^{\frac{1}{2}} x(t-\tau) - \\
 & \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Sigma^T T^T A^T P x(t)]^T [\Lambda^{\frac{1}{2}} x(t-\tau) - \\
 & \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Sigma^T T^T A^T P x(t)] \\
 & - x^T(t) \bar{B}^T A^T P x(t) - x^T(t) P A \bar{B} x(t) + \\
 & x^T(t) \Lambda x(t) + x^T(t) P A T \Sigma \Lambda^{-1} \Sigma^T T^T A^T P x(t).
 \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\bar{B} = \text{diag}[b_1(x_1)/x_1, \dots, b_n(x_n)/x_n]$ 为书写方便,在推导过程中将 $A(x(t)), B(x(t))$ 和 $\Sigma(x(t-\tau))$ 分别记为 A, B 和 Σ

如果对于任意给定的 t , 令 $y^T(t) = (y_1, \dots, y_n) = x^T(t) P A T$, 则式(9)的最后一项具有如下形式:

$$\begin{aligned}
 y^T \Sigma \Lambda^{-1} \Sigma y &= \sum_{i=1}^n y_i^2 \lambda_i^{-1} \sigma_i^2(x_i(t-\tau)) \\
 &= \sum_{i=1}^n y_i^2 \lambda_i^{-1} (\sigma_i^*)^2 = \\
 & x^T(t) P A T \Sigma^M \Lambda^{-1} \Sigma^M T^T A^T P x(t).
 \end{aligned} \tag{10}$$

又因为 A^M, \bar{B}^M, A^m, B^m 均为正对角矩阵, P 为正定矩阵, 故根据矩阵的相关理论, 容易证明

$$x^T(t) \bar{B}^T A^T P x(t) - x^T(t) B^m A^m P x(t) > 0, \tag{11}$$

$$x^T(t) P A \bar{B} x(t) - x^T(t) P A^m B^m x(t) > 0, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 & x^T(t) P A T \Sigma^M \Lambda^{-1} \Sigma^M T^T A^T P x(t) \\
 & x^T(t) P A^M T \Sigma^M \Lambda^{-1} \Sigma^M T^T A^M P x(t).
 \end{aligned} \tag{13}$$

考虑式(10) ~ (13), 则可将式(9)记为

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x_t) &= x^T(t) [- (B^m A^m P + P A^m B^m) + \Lambda + \\
 & P A^M T \Sigma^M \Lambda^{-1} \Sigma^M T^T A^M P] x(t) = \\
 & x^T(t) S x(t).
 \end{aligned}$$

因此, 如果矩阵 S 是负定的, 则有 $\dot{V}(x_t) < 0$ 故根据引理 1 可知, 对于任意的有界时滞 $\tau > 0$, 系统(1)的平衡点 $x = 0$ 均为渐近稳定的

若在定理 1 中, 令

$$P = \bar{P} = \text{diag}[1/\alpha_i^m \beta_i^m, \dots, 1/\alpha_n^m \beta_n^m],$$

$\Lambda = I$ 为单位阵, 则有

$$S = -I + \bar{P} A^M T \Sigma^M \Sigma^M T^T A^M \bar{P} < 0 \tag{14}$$

将不等式两侧同时取范数, 不难得出

$$\bar{P} A^M T \Sigma^M \Sigma^M T^T A^M \bar{P} < 1 \tag{15}$$

再根据矩阵范数的性质, 则有

$$0 < \bar{P} A^M T \Sigma^M \Sigma^M T^T A^M \bar{P} < 1, \tag{16}$$

其中 $\sigma^{\bar{P}} = \max\{\sigma_i^M: 1 \leq i \leq n\}$, 因此, 当

$$\bar{P} A^M T \Sigma^M \Sigma^M T^T A^M \bar{P} < 1 \tag{17}$$

时, 式(15)成立

由以上分析可得如下推论:

推论 1 对于任意的有界时滞 τ , 系统(1)的平衡点 $x = 0$ 是渐近稳定的, 如果

$$\bar{P} A^M T < \frac{1}{\sigma^{\bar{P}}}. \tag{18}$$

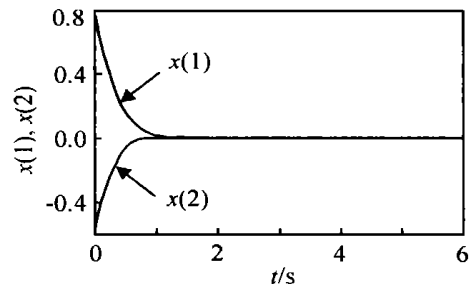
其中 \bar{P} 表示由 Euclid 向量范数诱导出的矩阵范数, 即 $\bar{P} = \sqrt{\lambda_{\max}(\bar{P}^T \bar{P})}$.

由推论 1 得到了一个小增益条件, 即对于某一矩阵 T , 当增益 $\sigma^{\bar{P}}$ 取得充分小时, 条件(18)将成立; 另一方面, 当增益 $\sigma^{\bar{P}}$ 固定且较大时, 为保证系统平衡点的渐近稳定, 要求互连矩阵 T 的范数很小, 因为该推论适用于任意的有界时滞 τ , 所以为了补偿大时滞而使系统保持稳定, 必须使时滞项 $T S(x(t-\tau))$ 足够小

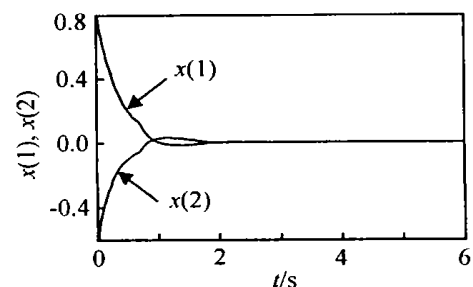
4 仿真研究

下面通过仿真实例来验证推论 1 的有效性, 为系统(1)选取各变量如下:

$$A(x(t)) = \text{diag}[\sin x_1 + 2, \cos x_2 + 3],$$



(a) $\tau = 0.3$



(b) $\tau = 1$

图 2 系统的状态曲线图

$$\begin{aligned} & \text{故有 } 1 \quad a_1(x_1) \quad 3, 2 \quad a_2(x_2) \quad 4, \\ & S(x(t)) = [\tanh(0.2x_1), \tanh(0.5x_2)]^T, \\ & B(x(t)) = [\operatorname{tg}(2x_1), \operatorname{tg}(4x_2)]^T, \\ & T = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 \\ -1 & 0.3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由上述选取可知, $A^M = \operatorname{diag}[3, 4]$, $A^m = \operatorname{diag}[1, 2]$ 将 $S(x(t))$ 和 $B(x(t))$ 分别在原点处线性化后有 $\Sigma^M = \operatorname{diag}[0.2, 0.5]$, $B^m = \operatorname{diag}[2, 4]$, 故 $\bar{P} = \operatorname{diag}[1/\alpha^m \beta^m, \dots, 1/\alpha^m \beta^m] = \operatorname{diag}[1/2, 1/8]$ 通过计算有 $\bar{P}A^M T = 1.551 < 1/\sigma^M = 1/0.5 = 2$ 因此, 由推论 1 可知, 系统(1)的平衡点 $x = 0$ 对于任意的有界时滞 τ 均为渐近稳定的

在仿真过程中, 取初始函数为一常值函数 $x_0 = [0.8, -0.6]^T$, 并分别取 $\tau = 0.3$ 和 $\tau = 1$, 仿真曲线如图 2 所示

由仿真结果可以看出, 状态曲线明显收敛于系统的平衡点 $x = 0$, 而与时滞 τ 的选择无关

5 结 语

本文放宽了反馈型神经网络中互连矩阵 T 必须为对称的要求, 对一类具有不对称互连结构的广义时滞神经网络的动态行为进行了分析, 得到了该类网络的平衡点 $x = 0$ 对于任意有界时滞 τ 均为渐近稳定的充分条件, 并给出了该定理的一个推论 本文结果对于时滞反馈型神经网络的分析和设计具有很强的实用价值 下一步, 将对能否得出该类网络的平衡点与时滞 τ 相关的渐近稳定的充分条件, 以及具有变时滞的该类网络平衡点的渐近稳定性作进一步的探讨

参考文献(References):

- [1] Xu ZB, Hu GQ, Kwong C P. Some efficient strategies for improving the eigenstructure method in synthesis of feedback neural networks[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1996, 7(1): 233-245
- [2] 李晓东, 梁晓波. 一类反馈神经网络对非线性连续系统

近似能力的证明[J]. *电子学报*, 2001, 29(1): 103-105
(Li XD, Liang XB. Proof of the approximation ability of recurrent neural networks to nonlinear continuous-time system[J]. *Electronics J*, 2001, 29(1): 103-105.)

- [3] Liu D, Lu Z. A new synthesis approach for feedback neural networks based on the perceptron training algorithm[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1997, 8(6): 1468-1482
- [4] 王凌, 郑大钟. 几类动态反馈神经网络的稳定性分析[J]. *计算技术与自动化*, 2002, 21(1): 1-6
(Wang L, Zheng D Z. Stability analysis for several classes of dynamical feedback neural networks[J]. *Computing Technology and Automation*, 2002, 21(1): 1-6.)
- [5] Arino S. Stability analysis of delayed neural networks[J]. *IEEE Trans on Circuits System*, 2000, 47(7): 1089-1092
- [6] Ye H, Michel A N, Wang K. Robust stability of nonlinear time-delay systems with applications to neural networks[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems — I: Fundamental Theory and Applications*, 1996, 43(7): 532-543
- [7] 陈亚军, 徐晓鸣, 杨煜普. 一类时滞反馈神经网络的稳定性及吸引域的估计[J]. *计算机学报*, 1998, 21(4): 376-380
(Chen Y J, Xun X M, Yang Y P. Stability of a class of feedback neural networks with time-delay and the estimation of domain of attraction[J]. *J of Computers*, 1998, 21(4): 376-380.)
- [8] Cohen M, Grossberg S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1983, 13(5): 815-826
- [9] Michel A N, Wang K, Hu B. *Qualitative Theory of Dynamical Systems — The Role of Stability Preserving Mappings* [M]. Second Edition. New York: Marcel Dekker, 2001.

稿 约 声 明

本刊已入编《中国学术期刊网》(光盘版)、《万方数据——数字化期刊群》重庆维普咨询公司《中文科技期刊数据库》和(中国·台湾)华艺数位艺术股份有限公司《中文电子期刊服务》其作者文章著作权使用费与本刊稿费一次性付清 凡不同意入编的稿件, 请作者在投稿时声明