

文章编号: 1001-0920(2004)02-0204-04

## 移动机器人最优路径的表示、对称性及算法

郭 戈

(兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃 兰州 730050)

**摘 要:** 针对由两个轮子独立驱动的移动机器人, 从最优速度模式的角度寻求最优路径, 利用极大值原理和 Hamilton 算子得出一种结构简单的最优路径表示形式, 并解决了其跟踪控制问题。通过对不同转弯模式下的最优路径进行分析和比较, 给出了基于路径长度和转动角度准则的最优路径实现算法, 并提出了最优路径的对称性及其跟踪控制算法。该方法大大降低了设计和计算的复杂性, 简单实用。

**关键词:** 移动机器人; 路径规划; 极大值原理; 最优路径; 对称性; 算法

**中图分类号:** TP24

**文献标识码:** A

## Optimal path for mobile robot: Representation, symmetry and algorithm

GUO Ge

(College of Electrics and Information Engineering, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou 730050, China. E-mail: guog@gsut.edu.cn)

**Abstract:** A simple structural representation of optimal path for mobile robots with two independently driven wheels is presented. An optimal path realization algorithm is derived according to a criterion based on length of path and scan angle of robot. Meanwhile the symmetry characteristics of the optimal path are analyzed in detail. Also a robot trajectory tracking control algorithm is obtained by the same optimization process. The algorithms are very useful to reduce the complexity largely both in design and computation.

**Key words:** mobile robot; path planning; maximum principle; optimal path; symmetry; algorithm

### 1 引 言

移动机器人路径规划领域的研究大都集中在带有方向操纵的移动机器人路径选择与控制方面, 并已取得了许多成果<sup>[1-3]</sup>。特别是在多机器人协作领域, 差分驱动移动机器人更灵活、快速和便于控制, 因而具有良好的应用前景。差分驱动移动机器人路径规划问题由 Dubins<sup>[4]</sup>和 Reeds<sup>[5]</sup>等人最早提出; Reister<sup>[6]</sup>用数学方法研究了加速度有界条件下的最优路径, 其计算过程非常复杂, 不便于实现; Balkcom<sup>[7]</sup>采用几何学原理讨论了速度有界、加速度和

转矩无界时的最优路径, 该方法较为直观, 但没有讨论路径的实现, 且只有部分结论在特定条件下成立。

本文针对差分驱动移动机器人, 利用极大值原理和 Hamilton 算子, 得到路径最短意义下的最优路径, 并据此建立了一种几何学最优路径结构。以此为基础, 通过分析和比较不同转弯模式下的最优路径, 给出了基于路径长度和转动角度准则的最优路径表示形式及实现算法, 并探讨了最优路径的对称性和跟踪控制算法。

收稿日期: 2002-11-04; 修回日期: 2003-04-02

基金项目: 国家科技攻关项目(2002BA901A 28); 甘肃省省长基金资助项目(GS015-A 52-012)。

作者简介: 郭戈(1972—), 男, 甘肃庄浪人, 博士, 从事移动机器人、系统与控制理论等研究。

## 2 问题描述

本文研究的机器人有两个不带方向操纵机构且独立控制的同轴车轮, 两轮的速度独立且有不同的边界。记机器人中心状态为  $s = (x, y, \theta)$ , 其中:  $x$  和  $y$  分别为横、纵坐标,  $\theta$  为机器人运动方向与横坐标轴的夹角。假设机器人工作环境为光滑水平环境, 设机器人起始状态为  $s_0 = (0, 0, 0)$ , 两个轮的半径为  $r$ , 轮间距为  $2c$ , 左右轮角速度分别为  $w_l$  和  $w_r$ , 中心线速度和角速度分别为  $v$  和  $w$ , 则机器人运动方程如下:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v \cos \theta \tau, y(t) = \int_0^t v \sin \theta \tau, \\ \theta(t) &= \int_0^t w d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$w = \frac{r}{2c}(w_r - w_l), v = \frac{r}{2}(w_r + w_l). \quad (2)$$

实质上, 最优路径问题是寻求满足路径最短条件的机器人左右轮速度模式及其跟踪控制算法。因此, 本文直接从最优速度模式的角度出发来解决最优路径问题。

## 3 最优路径

### 3.1 最优路径准则

首先将机器人运动方程改写为

$$\dot{s} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(w_r + w_l) \cos \theta / 2 \\ r(w_r + w_l) \sin \theta / 2 \\ r(w_r - w_l) / 2c \end{bmatrix}, \quad (3)$$

同时, 定义 Hamilton 算子

$$H(\mu, s) = \mu, s, \quad (4)$$

其中毗连向量

$$\mu = [\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t)]^T, \mu \in R^3. \quad (5)$$

根据极大值原理, 如果机器人速度模式为最优, 则它必然在任意时间  $t$  都能使上述 Hamilton 算子最小, 即有最小化方程

$$\begin{aligned} H(\mu, s) &= \min_{w \in [w_{\min}, w_{\max}]} H(\mu, s) = \lambda = 0, \\ w &= [w_l, w_r]^T, \end{aligned} \quad (6)$$

以及

$$\dot{\mu} = - \partial H / \partial s \quad (7)$$

由此条件可得

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= - \frac{\partial}{\partial s} \mu, w_l \mathcal{Y}_l + w_r \mathcal{Y}_r = \\ & \frac{r}{2}(w_r + w_l) [0 \ 0 \ \mu_1 \sin \theta - \mu_2 \cos \theta]^T. \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\mathcal{Y}_l$  和  $\mathcal{Y}_r$  分别为对应于左右轮的向量场, 即

$$\mathcal{Y}_l = \frac{r}{2} [\cos \theta, \sin \theta, -1/c]^T, \quad (9)$$

$$\mathcal{Y}_r = \frac{r}{2} [\cos \theta, \sin \theta, 1/c]^T. \quad (10)$$

根据上述毗连方程, 通过积分可得

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= c_1, \mu_2(t) = c_2, \\ \mu_3(t) &= c_1 y - c_2 x + c_3, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $c_1, c_2$  和  $c_3$  均为常数。若令

$$\delta(x, y) = c_1 y - c_2 x + c_3, \quad (12)$$

则

$$\mu = [c_1 \ c_2 \ \delta(x, y)]^T. \quad (13)$$

另外, 前面的最小化方程可写为

$$w_l \lambda + w_r \lambda = \min. \quad (14)$$

其中

$$\lambda = \mu, \mathcal{Y}_r =$$

$$[c_1 \ c_2 \ \delta(x, y)]^T \cdot \frac{r}{2} [\cos \theta, \sin \theta, 1/c]^T =$$

$$\frac{r}{2c} \delta(x - c \sin \theta, y + c \cos \theta),$$

$$\lambda = \mu, \mathcal{Y}_l =$$

$$[c_1, c_2, \delta(x, y)]^T \frac{r}{2} [\cos \theta, \sin \theta, -1/c]^T =$$

$$- \frac{r}{2c} \delta(x + c \sin \theta, y - c \cos \theta). \quad (16)$$

注意到机器人左右轮的坐标可以写为

$$\begin{cases} x_l = x - c \sin \theta \\ y_l = y + c \cos \theta \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} x_r = x + c \sin \theta \\ y_r = y - c \cos \theta \end{cases} \quad (18)$$

所以有如下关系:

$$\lambda = - \frac{r}{2c} \delta(x_r, y_r), \lambda = \frac{r}{2c} \delta(x_l, y_l). \quad (19)$$

由于方程  $\delta(x, y) = 0$  代表一条直线, 函数  $\delta(x, y)$  表示机器人与该直线间的距离,  $\delta(x, y) > 0$  和  $\delta(x, y) < 0$  分别表示机器人位于坐标平面中该直线的上侧和下侧。所以 Hamilton 算子最小化准则  $w_l \lambda + w_r \lambda = \min$  实际上是选择左右轮的速度, 保证机器人运动路径与某直线的距离最近。该直线即为文献[7]中已经提到但未确定其具体位置和方程的  $\eta$  直线。本文称机器人中心点对应的  $\eta$  直线为基本  $\eta$  直线, 左右轮也有各自的  $\eta$  直线, 它们分别位于基本  $\eta$  直线的两侧且与之平行。

按照上述准则, 为了以最快的速度 and 最短的路径完成所要求的运动, 机器人必须绕其中心旋转到基本  $\eta$  直线方向, 然后沿该直线运动, 到达目标位置后再旋转到与目标方向一致。为了保证时间最优

性, 可让机器人以最大速度运动(包括转弯和后退), 且中心点的线速度保持不变

### 3.2 最优路径的表示及其对称性

综上所述, 本文的最优路径由直线和弧线构成. 假设机器人起始点为坐标原点, 起始运动方向为  $x$  轴方向, 目标点位置为  $O(x_t, y_t)$ , 方向角为  $\theta$ (如图 1 所示). 用  $P(\alpha, l, \beta)$  作为机器人的路径结构参数向量, 其中  $\alpha$  和  $\beta$  分别表示两次旋转的角度, 规定逆时针方向为正方向;  $l$  表示直线路径, 规定前进方向为正方向. 下面分析最优路径的具体分布特点

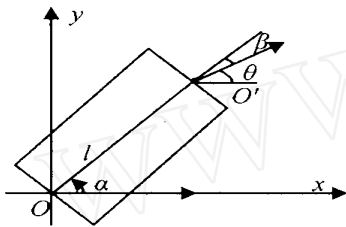


图1 机器人最优路径原理

图 2 为路径参数分布. 根据目标位置与起始位置相对关系的不同, 路径结构可分为如下几种情况,

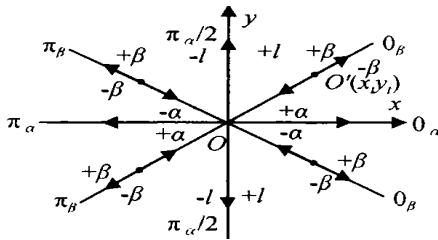


图2 路径参数分布

1)  $x_t > 0, y_t > 0$  情况

此时路径可表示为  $P(+\alpha, +l, \beta)$ , 即首先绕中心点逆时针方向旋转一个角度  $\alpha(\alpha > 0)$ ; 然后直线前进  $l(l > 0\text{m})$ ; 最后通过转动角度  $\beta$  达到目标方向.  $\beta$  角的大小和方向要根据目标方向而定, 如果目标方向指向  $\eta$  直线上侧, 则  $\beta < 0$ ; 若指向  $\eta$  直线的下侧, 则  $\beta > 0$ . 如果目标方向指向原点, 则  $\beta = \pi$ (或  $-\pi$ ); 如果目标方向远离原点, 则  $\beta = 0$ .

2)  $x_t < 0, y_t > 0$  情况

此时路径可表示为  $P(-\alpha, -l, \beta)$ , 即首先绕中心点顺时针方向旋转一个角度  $\alpha$ . 然后直线后退  $l\text{m}$ ; 最后通过转动角度  $\beta$  达到目标方向.  $\beta$  角的大小和方向要根据目标方向而定, 如果目标方向指向  $\eta$  直线的上侧, 则  $\beta > 0$ ; 反之  $\beta < 0$ . 如果目标方向指向原点,  $\beta = 0$ ; 如果目标方向远离原点,  $\beta = \pi$ (或  $-\pi$ ).

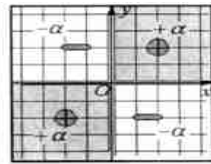
3)  $x_t > 0, y_t < 0$  情况

此时路径可表示为  $P(-\alpha, +l, \beta)$ ,  $\beta$  的确定与 1) 相同

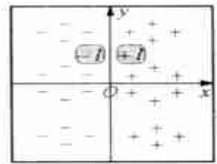
4)  $x_t < 0, y_t < 0$  情况

此时路径可表示为  $P(+\alpha, -l, \beta)$ ,  $\beta$  的确定与 2) 相同

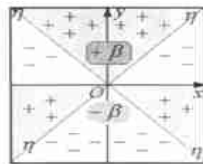
由图 2 可见, 不同的机器人目标状态所对应的最优路径都具有对称性, 且各路径参数具有独立的对称性. 具体来说, 参数  $\alpha$  的分布关于原点对称, 又分别关于  $x$  轴和  $y$  轴逆对称(即具有不同的方向), 称这种对称性为  $\alpha$  对称性(见图 3(a)). 参数  $l$  的分布关于  $x$  轴对称, 又分别关于  $y$  轴和原点逆对称, 称之为  $l$  对称性(见图 3(b)). 同样, 参数  $\beta$  的分布关于  $y$  轴对称, 又分别关于  $x$  轴和原点逆对称. 另外, 参数  $\beta$  还具有关于  $\eta$  直线逆对称. 称参数  $\beta$  具有的对称性为  $\beta$  对称性(见图 3(c)). 总体而言, 本文的最优路径表现出 8 种不同的对称性, 如图 3(d) 所示. 需要指出的是, 图 3 是以  $\alpha = \pm \pi/4$  为例讨论的, 当  $\alpha$  为其他值时, 路径的分布情况是类似的.



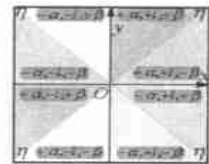
(a)  $\alpha$  对称性



(b)  $l$  对称性



(c)  $\beta$  对称性



(d) 最优路径的对称性

图3 最优路径的对称性

根据上述对路径结构和对称性的分析, 本文的最优路径共有 8 种不同表现形式. 但值得强调的是, 路径的表示是统一的, 且对任何目标状态, 不需要对路径形式做任何判断, 只需一次计算就可以确定出具体的路径(见 3.3 节). 另外, 只要知道某一目标状态对应的最优路径, 就可以推出其他 7 种与之具有某种对称性的目标状态所对应的最优路径.

文献[7]提出的机器人时间最优路径形式与本文的路径结构非常接近, 但其中给出的路径共分为 9 大类, 总数多达 40 种. 对于每一种初始和目标状态, 系统都必须建立多种结构不同的路径. 只有通过大量的分析和计算才能够确定最优路径, 难于实现.

而本文的路径只有一种统一形式, 不管机器人的起始条件和目标条件如何, 都采用同样的形式描述和计算路径参数 尤其需要指出的是, 本文的路径及其实现算法非常简单, 计算量小, 且只要完成路径的计算即完成了路径规划 所以, 本文的路径及其实现算法比其他类似的方法具有明显的优越性

### 3.3 最优路径及其跟踪控制算法

根据上述分析, 可得到如下最优路径算法:

Procedure OptiPath ( $P(\alpha, l, \beta)$ )

Read target position and direction ( $x_t, y_t, \theta$ )

$\alpha = \arctan(y_t/x_t)$

If  $x_t > 0, l = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$

Else  $l = -\sqrt{x_t^2 + y_t^2}$

If  $\alpha < \theta \quad \pi + \alpha, \beta = \theta - \alpha$

If  $\theta - \alpha \quad \beta = -(\alpha - \theta)$

If  $\pi + \alpha < \theta \quad 2\pi, \beta = -(2\pi + \alpha - \theta)$

Return ( $\alpha, l, \beta$ )

End OptiPath

关于最优路径的跟踪控制问题(亦即机器人运行轨道实现问题), 考虑到路径的时间最优性, 本文规定机器人以最大角速度  $w_{\max}$  完成转弯和直线运动, 同时满足最小化准则  $w_l \lambda + w_r \lambda = \min$  于是, 有如下最优路径跟踪控制算法:

Procedure OptDrive ( $w(w_l, w_r)$ )

$\beta$ Turn:

$\beta \beta \alpha \alpha$ , Goto  $\alpha$ Turn:

End  $\beta$ Turn:

$\alpha$ Turn:

If  $\alpha < 0, w_l = w_{\max}, w_r = -w_{\max}$

If  $\alpha > 0, w_l = -w_{\max}, w_r = w_{\max}$

If  $\alpha = 0$  Goto  $l$ -Straightline

End  $\alpha$ Turn

$l$ -Straightline:

If  $l > 0, w_l = w_r = w_{\max}$

If  $l < 0, w_l = w_r = -w_{\max}$

If  $l = 0, w_l = w_r = 0$

End  $l$ -Straightline

Return ( $w_l, w_r$ )

End OptDrive

图 4 给出了仿真实验的部分结果 仿真中, 机器人在多种不同环境下都可以准确计算并实现不同起始条件和目标条件下的最优路径 值得指出的一个特殊现象是, 由于虚拟传感器之间的串扰作用, 机器

人在最优路径的实现过程中出现过一次局部转圈现象, 见图 4(c), 但很快又回到最优路径并顺利完成任务

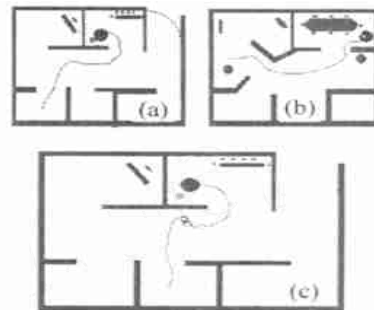


图 4 最优路径仿真实验结果

## 4 结 论

本文利用极大值原理和 Hamilton 算子得到了差动机器人的最优路径结构, 以此为基础给出了路径长度和转动角度意义下的最优路径实现算法 对最优路径的对称性问题进行了探讨, 同时提出一种最优路径跟踪控制算法 该方法解决了差动机器人路径规划中最优路径及轨迹跟踪控制问题, 具有较高的理论意义和实用价值 值得指出的是, 本文的最优路径和文献[7]中的路径类似, 实际上都只是极短路径, 虽然非常简单直观, 但不是严格意义上的最优路径, 因此还有待进一步研究

### 参考文献(References):

- [1] Dacre B, Simeon T. Free space representation for a mobile robot moving on a rough terrain [J]. *Int J Robotics Research*, 1993, 12(1): 37-43
- [2] Barraquand J, Latombe J C. Robot motion planning: A distributed representation approach [J]. *Int J Robotic Research*, 1991, 10(5): 502-511
- [3] Bisse E, Bentoumes M. Optimal path generation for a simulated autonomous mobile robot [J]. *Autonomous Robots*, 1995, 14(1): 1-18
- [4] Dubins L E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents [J]. *American J of Mathematics*, 1957, 79(2): 497-516
- [5] Reeds J A, Shepp L A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards [J]. *Pacific J of Mathematics*, 1990, 145(2): 367-393
- [6] Reister D B, Pin F G. Time-optimal trajectories for mobile robots with two independently driven wheels [J]. *Int J Robotics Research*, 1994, 13(1): 38-54
- [7] Balkcom D J, Mason M T. Time optimal trajectories for bounded velocity differential drive robots [J]. *Int J Robotics Research*, 2001, 20(4): 402-409