

文章编号: 1001-0920(2004)02-0208-04

## 多传感器标量加权最优信息融合稳态 Kalman 滤波器

孙书利<sup>1,2</sup>, 崔平远<sup>1</sup>

(1 哈尔滨工业大学 深空探测基础研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2 黑龙江大学 自动化系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 提出一种新的标量加权多传感器线性最小方差意义下的最优信息融合准则。该准则考虑了局部估计误差之间的相关性, 只需计算加权标量系数, 避免了加权矩阵的计算, 明显减小了计算量, 便于实时应用。运用稳态 Kalman 滤波理论, 基于该融合准则, 给出了多传感器最优信息融合稳态 Kalman 滤波器。在所有局部滤波器达到稳态时, 只需一次融合便可获得信息融合稳态滤波器, 算法简单。仿真例子验证了其有效性。

**关键词:** 多传感器; 最优信息融合准则; 稳态 Kalman 滤波器; 误差协方差阵

**中图分类号:** O211.64 **文献标识码:** A

## Multi-sensor optimal information fusion steady-state Kalman filter weighted by scalars

SUN Shu-li<sup>1,2</sup>, CUI Ping-yuan<sup>1</sup>

(1. Deep Space Exploration Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 2 Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080, China. Correspondent: SUN Shu-li, E-mail: Sunsl@hljtu.edu.cn)

**Abstract:** A new multi-sensor optimal information fusion criterion weighted by scalars is presented in the linear minimum variance sense. The criterion considers the correlation among local estimate errors, and only computing the weighted scalar coefficients is needed. Therefore the computational burden can obviously be reduced, and it is convenient to apply in real time. Using steady-state Kalman filtering theory, a multi-sensor optimal information fusion steady-state Kalman filter is given based on this fusion criterion. The information fusion steady-state filter can be obtained only by one time fusing after all local filters enter steady states. Simulation example shows the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** multi-sensor; optimal information fusion criterion; steady-state Kalman filter; error covariance matrix

### 1 引言

信息融合 Kalman 滤波理论在机动目标的组合导航中具有广泛应用。文献[1]提出了著名的联邦 Kalman 滤波器, 但要求计算加权矩阵, 不便于实时应用; [2]对两传感器状态估计误差相关的情形给出一种最优融合估计算法, 也要求计算加权矩阵; [3]提出一种标量加权的 Kalman 滤波

器, 但假设了局部状态估计误差不相关, 这不符合一般情形。本文则提出一种新的按估计误差方差加权的最优信息融合准则。它考虑了局部估计误差的相关性, 采用标量加权, 避免了加权矩阵的计算, 便于实时应用, 并可获得标量加权下的线性最小方差最优信息融合滤波器。

收稿日期: 2002-12-05; 修回日期: 2003-01-20

基金项目: 国防基础科研资助项目

作者简介: 孙书利(1971—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 博士生, 从事 Kalman 滤波、信息融合等研究; 崔平远(1961—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 博士生导师, 从事深空探测、机器人控制、智能控制等研究。

### 2 问题的提出

考虑多传感器离散随机系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \tag{1}$$

$$y_i(t) = H_i x(t) + v_i(t), i = 1, 2, \dots, l, \tag{2}$$

其中: 状态  $x(t) \in R^n$ , 观测  $y_i(t) \in R^{m_i}$ , 白噪声  $w(t) \in R^r$ ,  $v_i(t) \in R^{m_i}$ ,  $\Phi, \Gamma, H_i$  为适当维数的常阵

假设 1  $w(t)$  和  $v_i(t)$  是零均值、方差阵各为  $Q$  和  $R_i$  的独立白噪声,  $i = 1, 2, \dots, l$

假设 2 初始观测时刻  $t_0 = -1$

假设 3 每个子系统是完全可观、完全可控的, 或系统是稳定的(即  $\Phi$  为稳定阵).

问题是: 基于观测  $(y_i(t), y_i(t-1), \dots), i = 1, 2, \dots, l$ , 求信息融合稳态 Kalman 滤波器  $\hat{x}_o(t|t)$ , 使其满足:

1) 无偏性, 即  $E\hat{x}_o(t|t) = E x(t)$ , 其中“E”表示数学期望;

2) 极小化融合估计误差方差阵的迹, 即  $\text{tr} P_o = \min \{\text{tr} P\}$ , 其中“tr”表示矩阵的迹

3) 最优信息融合稳态 Kalman 滤波器

首先给出 2 个引理:

引理 1<sup>[4]</sup> 在假设 1~ 假设 3 下, 系统(1), (2) 的第  $i$  个传感器子系统有局部稳态最优 Kalman 滤波器

$$\hat{x}_i(t|t) = (I_n - K_i H_i) \Phi \hat{x}_i(t-1|t-1) + K_i y_i(t), \tag{3}$$

$$K_i = \Sigma_i H_i^T [H_i \Sigma_i H_i^T + R_i]^{-1}, \tag{4}$$

$$P_i = [I_n - K_i H_i] \Sigma_i \tag{5}$$

其中:  $K_i$  为第  $i$  个传感器子系统的稳态滤波增益阵,  $i = 1, 2, \dots, l$ ;  $P_i$  和  $\Sigma_i$  分别为滤波和预报误差方差阵, 且  $\Sigma_i$  是如下 Riccati 方程的唯一正定解:

$$\Sigma_i = \Phi [ \Sigma_i - \Sigma_i H_i^T (H_i \Sigma_i H_i^T + R_i)^{-1} H_i \Sigma_i ] \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T. \tag{6}$$

引理 2<sup>[5]</sup> 在假设 1~ 假设 3 下, 系统(1), (2) 的第  $i$  个与第  $j$  个传感器子系统之间有局部稳态 Kalman 滤波误差协方差阵

$$P_{ij} = [I_n - K_i H_i] [ \Phi P_{ij} \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T ] [I_n - K_j H_j]^T. \tag{7}$$

其中  $P_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, l; i \neq j)$  为传感器  $i$  与传感器  $j$  的稳态滤波误差协方差阵, 初值可任意选取

定理 1 设  $x_i (i = 1, 2, \dots, l)$  为对  $n$  维随机向量  $x$  的  $l$  个无偏估计, 记估计误差为  $\tilde{x}_i = x - x_i$ , 且当  $i \neq j$  时,  $\tilde{x}_i$  与  $\tilde{x}_j$  相关, 误差方差和协方差阵分别为  $P_{ii}$  和  $P_{ij}$ . 引入合成的无偏估计

$$\hat{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l, \tag{8}$$

其中  $\alpha$  为标量, 记误差  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  的方差阵为  $P$ , 则极小化  $J = \text{tr} P$  的最优(线性最小方差)融合估计为

$$\hat{x}_o = \bar{\alpha}_1 x_1 + \bar{\alpha}_2 x_2 + \dots + \bar{\alpha}_l x_l \tag{9}$$

其中最优化系数  $\bar{\alpha} (i = 1, 2, \dots, l)$  由下式计算:

$$\bar{\alpha} = \frac{A^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{1}}, \tag{10}$$

这里  $A = (\text{tr} P_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, l$ , 向量  $\bar{\alpha} = [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_l]^T, \mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$ . 相应的最优信息融合估计误差方差阵为

$$P_o = \sum_{i,j=1}^l \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j P_{ij}, \tag{11}$$

且有关系  $\text{tr} P_o = \sum_{i=1}^l \text{tr} P_{ii}, i = 1, 2, \dots, l$

证明 由无偏性的假设有  $E x_i = E x, E \tilde{x}_i = E x - E x_i = 0$ , 对式(8) 两边同时取数学期望有

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l = 1. \tag{12}$$

由(8) 和(12) 有融合估计误差

$$\tilde{x} = x - \hat{x} = \sum_{i=1}^l \alpha_i (x - x_i) = \sum_{i=1}^l \alpha_i \tilde{x}_i, \tag{13}$$

于是融合估计的误差方差阵为

$$P = E(\tilde{x} \tilde{x}^T) = \sum_{i,j=1}^l \alpha_i \alpha_j P_{ij}, \tag{14}$$

从而性能指标  $J = \text{tr} P$  化为

$$J = \sum_{i,j=1}^l \alpha_i \alpha_j \text{tr} P_{ij}. \tag{15}$$

至此, 问题归结为在约束条件(12) 下求系数  $\bar{\alpha} (i = 1, 2, \dots, l)$ , 极小化性能指标(15). 应用 Lagrange 乘子法, 引入辅助函数

$$F = J + \lambda (\sum_{i=1}^l \alpha_i - 1). \tag{16}$$

令  $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha_i = \bar{\alpha}_i} = 0, i = 1, 2, \dots, l$ , 得

$$\sum_{j=1}^l \text{tr} P_{ij} \bar{\alpha}_j + \frac{1}{2} \lambda = 0, \tag{17}$$

令  $\mu = \frac{1}{2} \lambda$ , 结合(17) 与(12), 则有矩阵方程

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中:  $A, \bar{\alpha}, \mathbf{1}$  如前面定义,  $\mathbf{0}$  为适当维数的零列向量. 在各子系统不完全相同时, 通常  $A$  为正定阵, 且  $\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{1} > 0$ , 则由矩阵求逆公式<sup>[6]</sup> 有

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{1}} \begin{bmatrix} -A^{-1} \mathbf{1} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

由(19) 引出(10), 代入(14) 有最优信息融合估计误

差方差阵为(11). 在(14)中令  $\alpha = 1, \alpha_j = 0, j = 1, 2, \dots, l, i \neq j$ , 则可获得  $\text{tr}P_o = \text{tr}P_{ii}$

**推论 1** 当估计误差  $\tilde{x}_i$  与  $\tilde{x}_j (i \neq j)$  不相关时, 则最优融合估计为(9), 其中最优融合系数为

$$\bar{\alpha}_i = \rho / \text{tr}P_{ii}, i = 1, 2, \dots, l, \quad (20)$$

且  $\rho$  满足

$$\rho = \left( \frac{1}{\text{tr}P_{11}} + \frac{1}{\text{tr}P_{22}} + \dots + \frac{1}{\text{tr}P_{ll}} \right)^{-1} \quad (21)$$

相应的最小融合方差阵为

$$P_o = \left( \frac{\rho}{\text{tr}P_{11}} \right)^2 P_{11} + \left( \frac{\rho}{\text{tr}P_{22}} \right)^2 P_{22} + \dots + \left( \frac{\rho}{\text{tr}P_{ll}} \right)^2 P_{ll} \quad (22)$$

证明略

**注 1** 推论 1 恰是文献[3]中的结果

下面给出标量加权最优信息融合稳态 Kalman 滤波器的计算步骤:

- 1) 当每个局部子系统达到稳态时, 由式(3) ~ (6) 计算每个局部子系统的稳态 Kalman 滤波器  $\hat{x}_i(t|t)$  和滤波误差方差  $P_i$  (即  $P_{ii}$ ),  $i = 1, 2, \dots, l$ ;
- 2) 由式(7) 计算每两个局部子系统之间的稳态协方差阵  $P_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, l; i \neq j$ ;
- 3) 由(10) 和(11) 计算最优标量加权系数  $\bar{\alpha}_i (i = 1, 2, \dots, l)$  和最小融合方差  $P_o$ , 再由(9) 计算标量

加权最优融合稳态滤波器  $\hat{x}_o(t|t)$ .

**注 2** 上述求取标量加权下最优信息融合稳态 Kalman 滤波器的计算步骤, 由于避免了加权矩阵的计算, 从而减小了计算量. 当所有局部滤波器达到稳态时, 融合滤波器只需一次融合便可获得, 避免了每时刻计算加权系数, 使计算负担明显减小, 因而极具工程应用价值

#### 4 仿真例子

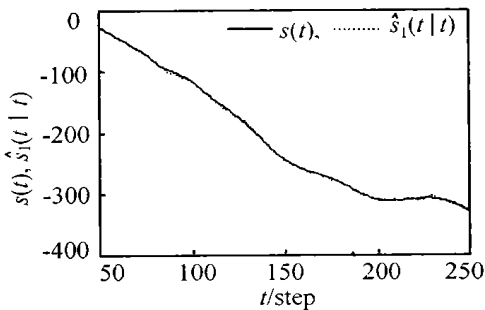
考虑具有 3 个传感器的跟踪系统

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} w(t), \quad (23)$$

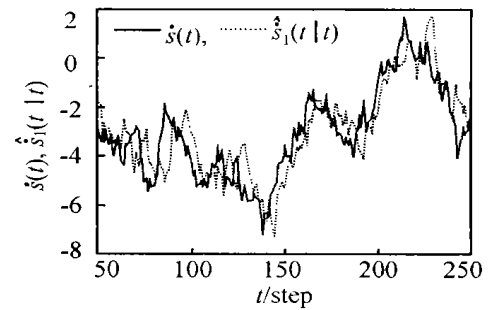
$$y_i(t) = H_i x(t) + v_i(t), i = 1, 2, 3 \quad (24)$$

其中:  $T$  为采样周期, 状态  $x(t) = [s(t) \quad \dot{s}(t)]^T$ ,  $s(t)$  和  $\dot{s}(t)$  分别为目标的位置和速度;  $y_1(t), y_2(t)$  和  $y_3(t)$  分别是 3 个传感器的观测信号, 观测矩阵  $H_1 = H_2 = H_3 = [1 \quad 0]$ ;  $v_i(t) (i = 1, 2, 3)$  分别是 3 个传感器的观测噪声, 假设  $w(t)$  和  $v_i(t)$  是零均值, 方差阵各为  $\sigma_w^2$  和  $\sigma_{v_i}^2$  的独立高斯白噪声. 求局部稳态最优 Kalman 滤波器  $\hat{x}_i(t|t) (i = 1, 2, 3)$  和标量加权最优信息融合稳态 Kalman 滤波器  $\hat{x}_o(t|t)$ .

仿真中取  $T = 0.5, \sigma_w^2 = 1, \sigma_{v_1}^2 = 10, \sigma_{v_2}^2 = 30$ ,

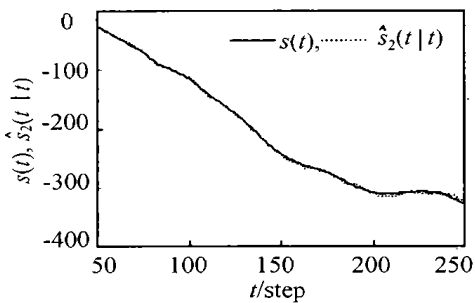


(a) 位置  $s(t)$  与 Kalman 滤波器  $\hat{s}_1(t|t)$

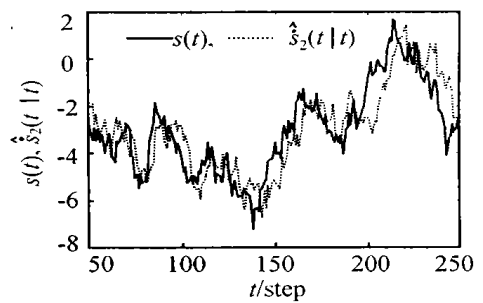


(b) 速度  $\dot{s}(t)$  与 Kalman 滤波器  $\dot{\hat{s}}_1(t|t)$

图 1 单传感器 1 的稳态最优 Kalman 滤波器

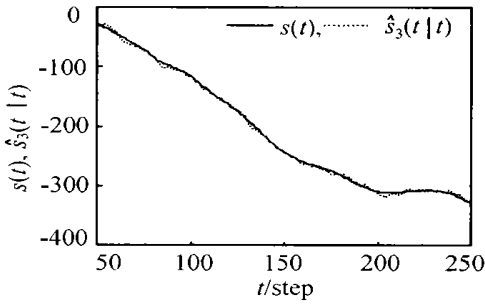


(a) 位置  $s(t)$  与 Kalman 滤波器  $\hat{s}_2(t|t)$

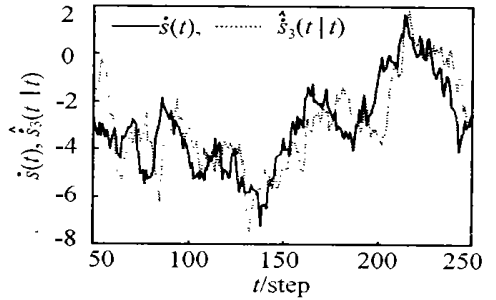


(b) 速度  $\dot{s}(t)$  与 Kalman 滤波器  $\dot{\hat{s}}_2(t|t)$

图 2 单传感器 2 的稳态最优 Kalman 滤波器

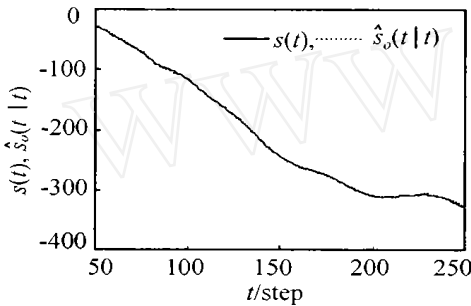


(a) 位置  $s(t)$  与 Kalman 滤波器  $\hat{s}_3(t|t)$

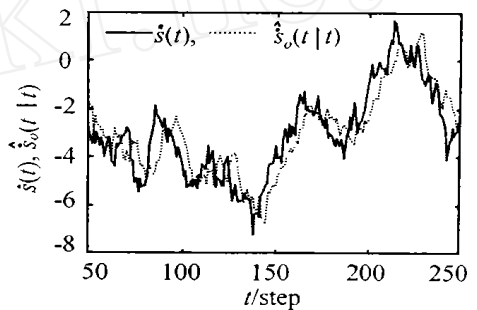


(b) 速度  $\dot{s}(t)$  与 Kalman 滤波器  $\hat{\dot{s}}_3(t|t)$

图 3 单传感器 3 的稳态最优 Kalman 滤波器



(a) 位置  $s(t)$  与 Kalman 滤波器  $\hat{s}_o(t|t)$



(b) 速度  $\dot{s}(t)$  与 Kalman 滤波器  $\hat{\dot{s}}_o(t|t)$

图 4 最优信息融合稳态 Kalman 滤波器

$\sigma_{v_3}^2 = 50, x(0) = [0, 0]^T$ , 取 250 个采样数据 由 (23) 和 (24) 可构成 3 个传感器子系统 1~ 3, 容易验证各子系统是完全可观可控的. 对单传感器系统 1~ 3 可分别求得局部稳态最优 Kalman 滤波器  $\hat{x}_i(t|t), i = 1, 2, 3$ , 每个单传感器到 50 步之后都进入了稳态, 仿真结果如图 1~ 图 3 所示, 其中实线为真值, 虚线为估值. 另外, 还可求得各传感器子系统的稳态滤波误差方差阵的迹分别为  $\text{tr}P_1 = 4.4152, \text{tr}P_2 = 9.3511, \text{tr}P_3 = 13.4267$ .

应用本文算法求得最优信息融合稳态 Kalman 滤波器  $\hat{x}_o(t|t)$ , 如图 4 所示, 由图可看出, 最优融合稳态滤波器  $\hat{x}_o(t|t)$  的精度高于各局部稳态最优滤波器  $\hat{x}_i(t|t), i = 1, 2, 3$ , 且融合滤波误差方差阵的迹为  $\text{tr}P_o = 3.6456$ , 满足  $\text{tr}P_o < \text{tr}P_i, i = 1, 2, 3$ . 虽然单传感器子系统 3 的精度较差, 但融合估计仍具有较高精度, 说明融合算法具有有效性. 求得的最优融合系数为  $\bar{\alpha}_1 = 0.6784, \bar{\alpha}_2 = 0.2099, \bar{\alpha}_3 = 0.1116$ , 由前面求得的局部滤波误差方差阵的迹可知, 所得最优融合系数是合理的.

### 5 结 论

针对多传感器观测同一状态的系统, 本文提出一种新的标量加权线性最小方差意义下的最优信息

融合准则, 可处理局部子系统估计误差相关时的标量加权最优信息融合估计问题. 基于该信息融合准则, 给出了标量加权最优信息融合稳态 Kalman 滤波器, 在各单传感器子系统达到稳态时, 只通过一次融合便可求得加权系数, 从而避免了每时刻计算加权系数, 减小了计算负担.

### 参考文献 (References):

- [1] Carlson N A. Federated square root filter for decentralized parallel processes [J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 1990, 26(3): 517-525.
- [2] 申功勋, 孙建峰. 信息融合理论在惯性/天文/GPS 组合导航系统中的应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1998: 22-26.
- [3] 邓自立, 祁荣宾. 多传感器信息融合次优稳态 Kalman 滤波器 [J]. *中国学术期刊文摘*, 2000, 6(2): 183-184. (Deng Z L, Qi R B. Multi-sensor information fusion suboptimal steady-state Kalman filter [J]. *Chinese Science Abstracts*, 2000, 6(2): 183-184.)
- [4] 邓自立. 最优滤波理论及其在应用——现代时间序列分析方法 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000.
- [5] Bar-Shalom Y. On the track-to-track correlation problem [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(2): 571-572.
- [6] 徐宁寿. 随机信号估计与系统控制 [M]. 北京: 北京工业大学出版社, 2001.