

文章编号: 1001-0920(2004)02-0230-05

## 非线性时滞系统次优控制的逐次逼近法

吕鹏飞, 唐功友, 贾晓波, 陶冶  
(中国海洋大学 计算机系, 山东 青岛 266071)

**摘要:** 对状态变量含有时滞的非线性系统的次优控制问题进行了研究, 提出了一种次优控制的逐次逼近设计方法. 针对由最优控制理论导出的既含有时滞项又含有超前项的非线性两点边值问题, 构造了其解序列一致收敛于原问题最优解的非齐次线性两点边值问题序列. 从而将两点边值问题解序列的有限次迭代结果作为系统的次优控制律. 仿真结果表明了所提出方法的有效性.

**关键词:** 非线性系统; 时滞系统; 最优控制; 次优控制; 逐次逼近法

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## Successive approximation approach of suboptimal control for nonlinear time-delay systems

LV Peng-fei, TANG Gong-you, JIA Xiao-bo, TAO Ye

(Department of Computer Science, Ocean University of China, Qingdao 266071, China. Correspondent: TANG Gong-you, E-mail: gtang@mail.ouqd.edu.cn)

**Abstract:** The suboptimal control for nonlinear systems with time-delay in state variables is considered, and a successive approximation approach is proposed. For the nonlinear two-point boundary value problem with both time-delay terms and time-advanced terms driven by the optimal control theory, a sequence of nonhomogeneous linear two-point boundary value problems are constructed, the solution sequence of which uniformly converges to the optimal solution of the original problem. Some finite iterative result of the two-point boundary value problem sequence is taken as a suboptimal control law of the system. The simulation results show the effectiveness of the presented algorithm.

**Key words:** nonlinear systems; time-delay systems; optimal control; suboptimal control; successive approximation approach

### 1 引言

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分. 目前, 线性定常系统最优控制的综合理论和方法已非常成熟, 因此, 对大量存在于实际系统中的非线性时滞系统的分析与综合一直是研究的热点<sup>[1-3]</sup>. 非线性时滞系统的二次型性能指标的最优控制问题, 往往导致求解一个既含有时滞项又含有超前项的非线性两点边值问题. 对该问题无论是求其精度

解还是数值解都非常困难. 几十年来, 在所取得的研究成果中大多是一些特殊情况下的特定结果<sup>[4-6]</sup>, 或只给出了一些描述性的结果<sup>[7-9]</sup>. 因此, 非线性时滞系统的优化问题仍需要进行深入研究.

本文的目的是针对状态变量含有时滞的非线性系统次优控制问题, 提出一种次优控制律的逐次逼近设计方法. 首先根据状态变量含有时滞的非线性系统的模型构造一个含已知非线性和时滞激励的线

收稿日期: 2002-10-28; 修回日期: 2003-01-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60074001); 山东省自然科学基金资助项目(Y2000G02).

作者简介: 吕鹏飞(1978—), 男, 山东青岛人, 硕士生, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究; 唐功友(1953—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究.

性迭代系统, 并证明该迭代系统的解序列一致收敛于原非线性时滞系统的解 再利用常微分方程的逐次逼近法, 将迭代系统的最优控制问题化为非齐次线性两点边值问题族 当第  $N$  次迭代误差小于预先给定的误差界限  $\epsilon$  时, 利用最优控制的第  $N$  次逼近得到的结果作为系统的次优控制律 仿真实例表明, 该方法对非线性时滞系统次优控制器的设计是有效的

## 2 问题的描述

考虑用下列泛函微分方程描述的非线性时滞定常控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + A_1 x(t - \tau) + B u(t) + f(x), & t > 0; \\ x(t) = \varphi(t), & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x \in R^n, u \in R^r$  和  $f: U \subset R^n \rightarrow R^n$  分别为系统的状态向量、控制向量和非线性函数向量;  $\varphi(t) \in R^n$  为连续的初始函数向量;  $A, A_1$  和  $B$  为适当维数的矩阵;  $\tau > 0$  为时滞项 假设  $f$  满足条件

$$\begin{cases} f(x) = \alpha x, \quad \forall x \in U; \\ f(v) - f(w) = \beta (v - w), \quad \forall v, w \in U. \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  为正常数, 并假设  $\{A + A_1, B\}$  是完全能控的

问题是要寻找  $u^*(t), t > 0$ , 使得该系统的性能指标

$$J = \frac{1}{2} [x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt] \quad (3)$$

取得极小值 其中:  $t_f$  为终态时间; 矩阵  $Q, Q_f$  和  $R$  满足通常的状态调节器条件

由系统最优化的充要条件可知, 求解最优控制问题(1)和(3), 导致求解下列两点边值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + A_1 x(t - \tau) + f(x(t)) - B R^{-1} B^T \lambda(t), & 0 < t \leq t_f; \\ -\dot{\lambda}(t) = \begin{cases} Q x(t) + A^T \lambda(t) + f_x \lambda(t) + A^T \lambda(t + \tau), & 0 \leq t \leq t_f - \tau \\ Q x(t) + A^T \lambda(t) + f_x \lambda(t), & t_f - \tau \leq t \leq t_f. \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} \lambda(t_f) = Q_f x(t_f), \\ x(t) = \varphi(t), & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

最优控制律由

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (6)$$

确定 方程(4)和(5)构成了一个含有时滞项、超前项、非线性项及非线性项的导数项的两点边值问题 通常求该问题的精确解是非常困难的<sup>[5]</sup>

## 3 预备引理

考虑自治非线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + A_1 x(t - \tau) + f(x), & 0 < t \leq t_f; \\ x(t) = \varphi(t), & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $x, f$  和  $\varphi$  由式(1)定义;  $A_\alpha$  和  $A_\beta$  为适当维数的矩阵 定义向量函数序列  $\{x_k(t)\}$  为

$$\begin{cases} x_0(t) = \Phi(t) \varphi(0), & 0 < t \leq t_f; \\ x_k(t) = \begin{cases} \Phi(t) \varphi(0) + \int_0^t \Phi(t-r) [A_\beta x_{k-1}(r - \tau) + f(x_{k-1}(r))] dr, & 0 < t \leq t_f; \\ \varphi(t), & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $\Phi(t)$  为对应于  $A_\alpha$  的状态转移矩阵,  $k = 1, 2, \dots$

在研究非线性时滞系统的次优控制方法时, 要用到以下引理:

**引理 1** 由式(8)描述的向量函数序列  $\{x_k(t)\}$  一致收敛于系统(7)的解

**证明** 将  $\{x_k(t)\}$  作为  $C^N[-\tau, t_f]$  的一个序列, 由式(8)得

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_0(t) &= \int_0^t \Phi(t-r) [A_\beta x_0(r - \tau) + f(x_0(r))] dr, \\ & \quad 0 < t \leq t_f. \end{aligned} \quad (9)$$

令  $M = \sup_{t,r \in [0,t_f]} \Phi(t-r)$  及  $L = \sup_{t \in [-\tau,0]} \varphi(t)$ ,  $Y = A_\beta$ . 注意到  $\Phi(0) = 1$ , 所以  $M \geq 1$ . 由式(9)得

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_0(t) &= M \int_0^t Y x_0(r - \tau) + \alpha x_0(r) dr \\ &= M \int_0^t Y \varphi(r - \tau) dr + M \int_\tau^t Y \Phi(r - \tau) \varphi(0) dr + M \int_0^\tau \alpha \Phi(r) \varphi(0) dr \\ &= M [Y L \tau + M L (t - \tau) + \alpha M L t] \\ &= M^2 (\alpha + Y) L t, \quad 0 \leq t \leq t_f. \end{aligned} \quad (10)$$

又由式(8)得

$$\begin{aligned} x_2(t) - x_1(t) &= M \int_0^t x_1(r - \tau) - x_0(r - \tau) dr + \end{aligned}$$

$$\beta M \int_0^t x_1(r) - x_0(r) dr$$

$$\frac{1}{2!} (\alpha + \gamma) (\gamma + \beta) LM^3 t^2, 0 \leq t \leq t_f. \quad (11)$$

同理可得

$$x_k(t) - x_{k-1}(t)$$

$$(\alpha + \gamma) (\gamma + \beta)^{k-1} LM^{k+1} \frac{t^k}{k!},$$

$$0 \leq t \leq t_f, k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

由三角不等式知,对任意的  $j$ , 有

$$x_{k+j}(t) - x_k(t)$$

$$\sum_{i=k+1}^{k+j} (\alpha + \gamma) (\gamma + \beta)^{i-1} LM^{i+1} \frac{t^i}{i!}$$

$$\frac{(\alpha + \gamma) (\gamma + \beta)^k LM^{k+2} t^{k+1}}{(k+1)!} \exp[(\gamma + \beta)M t],$$

$$0 \leq t \leq t_f, k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

所以  $\{x_k(t)\}$  是  $C^N[0, t_f]$  中的 Cauchy 序列, 即该序列是一致收敛的. 因为  $j$  是任意的, 所以这个序列的极限为系统(7) 的解

#### 4 主要结果

构造下列两点边值问题族

$$\begin{cases} \lambda_0(t) = f(x_0(t)) = x_0(t) = 0; \\ x_k(t) = Ax_k(t) + A_1x_{k-1}(t - \tau) + \\ f(x_{k-1}(t)) + B u_k(t), 0 < t \leq t_f; \\ \dot{\lambda}_k(t) = \begin{cases} Qx_k(t) + A^T \lambda_k(t) + (f_x)_{k-1} \lambda_k(t) + \\ A_1^T \lambda_{k-1}(t + \tau), 0 \leq t \leq t_f - \tau \\ Qx_k(t) + A^T \lambda_k(t) + (f_x)_{k-1} \lambda_k(t), \\ t_f - \tau < t \leq t_f; \end{cases} \\ k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (14)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} \lambda_k(t_f) = Q_f x(t_f), \\ x_k(t) = \mathcal{Q}(t), \\ -\tau \leq t \leq 0, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (15)$$

并构造相应的控制序列

$$u_k(t) = -R^{-1}B^T \lambda_k(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

设对第  $k$  次优化问题, 最优状态轨线为  $x_k(t)$ , 最优控制为  $u_k(t)$ . 给出下列定理:

**定理 1** 满足两点边值问题族(14) 和(15) 的最优序列  $\{x_k(t)\}$  和  $\{u_k(t)\}$  分别一致收敛于由式(1) 和(3) 给出的优化问题的最优状态轨线  $x^*(t)$  和最优控制律  $u^*(t)$ .

证明 设

$$\lambda_k(t) = P(t)x_k(t) + g_k(t),$$

$$t \in [0, t_f], k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

其中:  $P(t)$  为待定的  $n \times n$  正定矩阵,  $g_k(t)$  为  $n$  维共态向量. 对式(17) 两边求导数, 并将式(14) 的第 2 式代入可得

$$\dot{\lambda}_k(t) =$$

$$[P(t) + P(t)A - P(t)SP(t)]x_k(t) -$$

$$P(t)Sg_k(t) + P(t)(A_1x_{k-1}(t - \tau) +$$

$$f(x_{k-1}(t)) + g_k(t), \quad (18)$$

其中  $S = BR^{-1}B^T$ . 将式(18) 与(14) 的第 3 式相比较, 并注意到式(15) 和(17), 得到 Riccati 矩阵微分方程

$$\begin{cases} -\dot{P}(t) = P(t)A + A^T P(t) - \\ P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q, \\ P(t_f) = Q_f, \end{cases} \quad (19)$$

及共态方程

$$g_k(t) = \begin{cases} -[A - SP(t)]^T g_k(t) - \\ P(t)[A_1x_{k-1}(t - \tau) + \\ f(x_{k-1}(t))] - (f_x)_{k-1} \lambda_{k-1}(t) - \\ A_1 \lambda_{k-1}(t + \tau), 0 \leq t \leq t_f - \tau \\ -[A - SP(t)]^T g_k(t) - \\ P(t)[A_1x_{k-1}(t - \tau) + \\ f(x_{k-1}(t))] - (f_x)_{k-1} \lambda_{k-1}, \\ t_f - \tau < t \leq t_f; \\ g_k(t_f) = 0, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (20)$$

由式(19) 可求出唯一的正定矩阵  $P(t)$ . 注意到在式(20) 中,  $P(t), f(x_{k-1}(t)), (f_x)_{k-1}, x_{k-1}(t - \tau)$  和  $\lambda_{k-1}(t + \tau)$  为已知函数, 所以方程(20) 是一个非齐次线性向量微分方程. 通过反向积分可解出  $g_k(t)$ . 将式(17) 代入式(16) 得到第  $k$  次逼近的最优控制

$$u_k(t) = -R^{-1}B^T [P(t)x_k(t) + g_k(t)] \quad (21)$$

将式(17) 代入式(14) 的第 2 式并注意到式(15), 可得第  $k$  次逼近的最优闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = [A - SP(t)]x_k(t) - Sg_k(t) + \\ A_1x_{k-1}(t - \tau) + f(x_{k-1}(t)), \\ 0 < t < t_f; \\ x_k(t) = \mathcal{Q}(t), -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

由引理 1 可知, 式(20) 和(22) 的解序列  $\{g_k(t)\}$  和  $\{x_k(t)\}$  是一致收敛的, 而式(21) 的解序列  $\{u_k(t)\}$  是与  $\{x_k(t)\}$  和  $\{g_k(t)\}$  相关的, 所以也是一致收敛的. 记  $g(t)$  和  $u^*(t)$  分别是序列  $\{g_k(t)\}$  和  $\{u_k(t)\}$  的极限, 所以序列  $\{x_k(t)\}$  的极限  $x(t)$  是最

优控制问题(1) 和(3) 的最优状态轨线 由此得到最优控制律为

$$u^*(t) = - R^{-1} B^T [P(t)x(t) + g(t)] \quad (23)$$

在实际中, 无法求得当  $k$  时该问题的解, 因此可取  $k = N$ , 即将第  $N$  次的结果近似为该问题的解, 从而得到次优控制结果 次优控制律的具体推导过程如下:

由式(21) 得

$$u^*(t) = - R^{-1} B^T \lim_k [P(t)x_k(t) + g_k(t)] = - R^{-1} B^T [P x(t) + \lim_k g_k(t)], \quad (24)$$

在式(24) 的第 2 项中, 用  $N$  代替  $k$  可得次优控制律

$$u_s(t) = - R^{-1} B^T [P(t)x(t) + g_N(t)] \quad (25)$$

注意到在式(25) 第 1 项中的  $x(t)$  是  $k$  时的精确解, 只是第 2 项  $g_N(t)$  用第  $N$  次逼近的结果代替  $g(t)$ , 因此该次优控制律  $u_s(t)$  比  $u_N(t)$  更接近于最优控制

现得到该逐次逼近法的计算过程如下:

Step 1: 由方程(19) 求得  $P(t)$ , 给定正常数  $\epsilon$ , 令  $x_0(t) = g_0(t) = 0, J_0 = 0$ , 并令  $k = 1$ ;

Step 2: 由式(20) 计算  $g_k(t)$ ;

Step 3: 令  $N = k$ , 由式(25) 计算  $u_s(t)$ ;

Step 4: 由式(3) 计算  $J_N$ ;

Step 5: 若  $\frac{J_N - J_{N-1}}{J_N} < \epsilon$ , 则输出  $u_s(t)$ , 结束;

Step 6: 由式(22) 计算  $x_k(t)$ , 令  $k = k + 1$ , 转 Step 2

注 1 定理 1 的结果也适用于  $t_f$  的情形, 此时, 系统优化性能指标变为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (26)$$

Riccati 矩阵微分方程(19) 变为

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (27)$$

共态方程(20) 变为

$$\begin{cases} \dot{g}_k(t) = - [A - SP(t)]^T g_k(t) - P(t) [A_1 x_{k-1}(t - \tau) + f(x_{k-1}(t))] - (f_x)_{k-1} \lambda_{k-1}(t) - A_1 \lambda_{k-1}(t + \tau), 0 \leq t \leq t_f; \\ g_k(\cdot) = 0, k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (28)$$

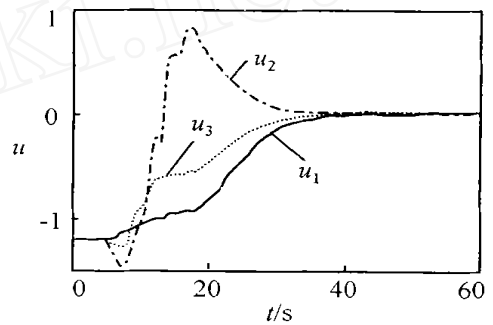
### 5 仿真示例

考虑非线性时滞系统

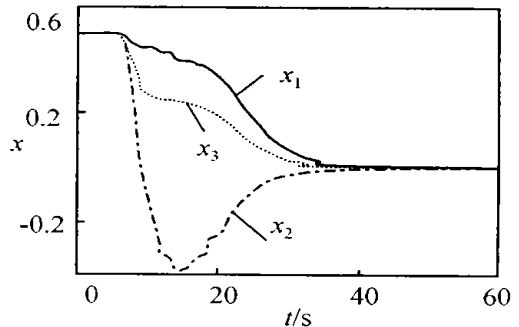
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + x(t-1) + 0.5x^2 + u(t), t > 0; \\ x(t) = 0.5, -1 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

性能指标为  $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2 + u^2) dt$

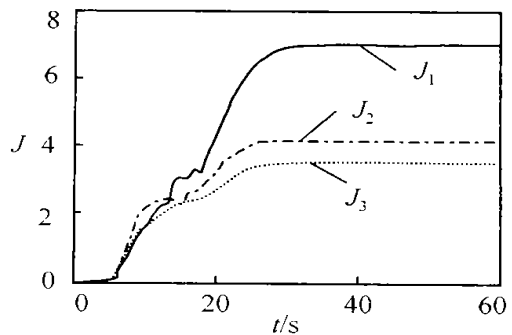
由题意知  $A = A_1 = B = Q = R = 1, \mathcal{Q}(t) = 0.5, f(x) = 0.5x^2$ . 由 Riccati 方程(27) 得  $P^2 - 2P - 1 = 0$  从而解得  $P = 1 + \sqrt{2}$ . 根据逐次逼近法, 当  $k = 1$  时, 将  $P$  值及初始条件代入式(28) 得  $g_1(t) = \sqrt{2} g_1(t)$ . 由条件  $g_1(\cdot) = 0$  得  $g_1(t) = 0$  代入式(25) 得  $u_1(t) = - (1 + \sqrt{2})x(t), t \geq 0$ . 同理, 可解得  $g_2(t), u_2(t), g_3(t), u_3(t), \dots$  当  $k = 1, 2, 3$  时,  $u(t), x(t)$  和  $J(t)$  的仿真结果如图 1 所示



(a)  $u(t)$  的仿真结果



(b)  $x(t)$  的仿真结果



(c)  $J(t)$  的仿真结果

图 1  $k = 1, 2, 3$  时, 系统的仿真曲线

比较  $k = 1, 2, 3$  时的性能指标:  $J_1 = 6.936, J_2 = 4.146, J_3 = 3.475$ , 显然  $J_1 > J_2 > J_3$  取  $\epsilon = 0.2$ , 有  $\left| \frac{J_3 - J_2}{J_2} \right| = 0.193 < \epsilon$ , 即可停止迭代

## 6 结 论

本文针对状态变量含有时滞的非线性系统次优控制问题, 提出了一种逐次逼近设计方法. 根据非线性时滞系统的模型构造一个含已知激励的迭代系统序列, 并证明该迭代系统的解序列一致收敛于原非线性时滞系统的解. 利用常微分方程的逐次逼近法, 将迭代系统的最优控制问题化为非齐次线性两点边值问题族, 从而解决了一类状态变量含有时滞的非线性系统次优控制问题. 仿真实例表明, 该方法对非线性时滞系统次优控制器的设计是有效的. 本文的结果可以方便地应用于时变系统的次优控制设计中.

## 参考文献(References):

- [1] Toshiaki O. Watanabe A. Input/output linearization of nonlinear-system with time delays in state variables [J]. *Int J System Science*, 1998, 29(6): 573-598
- [2] Hirasawa K, Ohbayashi M, Sakai S, et al. Learning Petri network and its application to nonlinear system control[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1998, 28(6): 781-789
- [3] Wong S K P, Seborg D E. Control strategy for single-input single-output non-linear systems with time delays [J]. *Int J Control*, 1988, 48(6): 2303-2327.
- [4] Tang G-Y, Fu P-L. A suboptimal control approach of linear time-delay [A]. *Proc of 14th World Congress of IFA C* [C]. Beijing, 1999. 99-104
- [5] 王芳, 唐功友. 具有小时滞的线性系统次优控制的无滞后转换法[J]. *青岛海洋大学学报*, 2001, 30(2), 281-286 (Wang F, Tang G-Y. Non-delay transformation approach of suboptimal control for the linear systems with small time-delay [J]. *J of Ocean University of Qingdao*, 2001, 30(2), 281-286)
- [6] 刘永清, 唐功友. 大型动力系统的理论与应用: 滞后、稳定与控制[M]. 武汉: 华南理工大学出版社, 1992
- [7] Lee R C H, Yung S P. Optimality conditions and duality for a non-linear time-delay control problem [J]. *Optimal Control Applications and Method*, 1997, 18(5): 327-340
- [8] Becerra VM, Roberts PD. Dynamic integrated system optimization and parameter estimation for discrete time optimal control of nonlinear systems[J]. *Int J of Control*, 1996, 63(2): 257-281
- [9] Stojanovic S. Optimal damping control and nonlinear elliptic systems[J]. *SIAM J on Control and Optimization*, 1991, 29(3): 594-608

## 中国自动化学会第19届青年学术年会(YAC2004)征文通知

中国自动化学会第19届青年学术年会(YAC2004)将于2004年8月16-19日在山东济南召开. 本次会议由中国自动化学会、中国自动化学会青年工作委员会主办, 山东大学控制科学与工程学院承办. 会议设人优秀论文奖和优秀应用论文奖.

### 一、征文范围

1. 广义系统、大系统、非线性系统、混沌系统、系统稳定与镇定; 2. 自适应、预测、变结构控制、 $H_\infty$ 控制、优化和鲁棒控制; 3. 智能控制、模糊控制、人工智能与专家系统; 4. 系统建模、辨识和估计; 5. 规划、管理与自制、容错控制和故障诊断系统; 6. 神经网络及应用; 7. 机器人与机器人控制; 8. 离散事件动态系统、调度、决策系统; 9. 混合动力学系统及控制; 10. 计算机视觉、图像处理与模式识别; 11. 自动化仪表与过程控制; 12. 电力系统及其自动化; 13. 电机驱动及运动控制; 14. 传感器与检测技术; 15. 软件工程、并行处理; 16. 计算机集成制造系统; 17. 计算机软硬件技术及其应用; 18. 系统工程理论、方法及应用; 19. 自动化指挥系统; 20. 数据融合与软测量; 21. 单片机控制及其应用技术; 22. 企业改革发展策略及管理决策; 23. 工业过程与生产管理; 24. 其他.

### 二、征文要求

1. 被录用论文将由山东大学出版社出版《自动化理论及应用》(卷11), 论文应具有学术或实用价值, 未在国内外学术其刊或会议发表过; 2. 论文第一作者的年龄一般不超过40岁; 3. 来稿中英文皆可, 请用Word或LaTeX编排, A4纸打印, 一式三份并附软盘(也可通过Email传送); 4. 格式参考自动化学报; 5. 投稿时请注明文章所属的方向标号(见本征文范围); 6. 请说明联系作者的详细通讯地址、电话和电子邮件信箱, 并注明是否参加优秀论文评选; 7. 因版权等引起的纠纷, 作者自负.

### 三、重要日期

论文截止日期: 2004年4月10日; 录用/不录用通知日期: 2004年4月31日.

### 四、投稿地址

山东济南 山东大学控制科学与工程学院  
YAC2004组委会收, 邮政编码: 250061; 联系人: 王玉振 刘允刚; 联系电话: 0531-8392625; 0531-8392515; 0531-8392535; 传真: 0531-8392205; Email: yzw\_ang@tsinghua.edu.cn(王玉振); lygfr@263.net(刘允刚)