第19卷第2期
Vol 19 No. 2

控 制 与 决 策
Control and Decision

2004年2月
Feb. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)02-0128-06

微分对策理论及其应用研究的新进展

年晓红[1,2], 黄 琳[1]

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871; 2. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘 要: 微分对策理论是控制论和对策论的重要分支,在军事对策和经济学研究领域具有非常广泛而重要的应用. 对此简述了半个世纪以来微分对策理论和应用发展的历史,介绍了近年来微分对策理论发展的最新研究成果,并对微分对策理论发展的几个热点问题作了简要评述.

关键词: 微分对策; Riccati方程; Hamilton-Jacobi方程; Nash均衡点

中图分类号: TP13; TP273 **文献标识码**: A

New development on differential game theory and its application

NIAN Xiao-hong[1,2], *HUANG Lin*[1]

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China; 2. College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410075, China. Correspondent: NIAN Xiao-hong, E-mail: xhnian@mech.pku.edu.cn)

Abstract: Theory of differential games is an important subject of control and game theory, and has an important and wide application in domain of strategics and economics. The development on theory and application of differential games over the last half century is reviewed. Some new research results on differential games are stated briefly as well as some remarks on the hotspot relevant to its development are presented.

Key words: differential games; Riccati equation; Hamilton-Jacobi equation; Nash equilibrium

1 微分对策理论的发展概述

自20世纪50年代初以来,由于制导系统拦截飞行器的引入、人造卫星的发射和航天中有关机动追击问题的需要,美国著名的Rand公司在空军资助下,以美国数学家Issacs博士为首的组织开展了对抗双方都能自由决策行动的理论追逃问题研究. 他们把现代控制理论中的一些概念、原理与方法引入对策论中,取得了突破性的成果,撰写了4篇研究报告[1],形成了微分对策的最初研究成果.

1965年, Issacs[2]整理出版了《微分对策》一书,这是世界上第一部微分对策的专著. 该书的出版标志着微分对策理论的诞生. 此后,由于军事方面的原因,微分对策的研究引起了世界各国的普遍关注,特别是美国和前苏联. 美苏出于军备竞赛的需要,对空战、核导弹与人造卫星拦截、电子战等方面提出了各种类型的微分对策模型,使得军事微分对策得以迅速发展. 1971年,美国科学家Friedman[3]采用了两个近似离散对策序列精确定义了微分对策,建立了微分对策值与鞍点存在性理论,从而奠定了微分对策理论的数学基础.

自《微分对策》出版以来,微分对策理论与应用有了很大发展. 除了定量微分对策和定性微分对策

收稿日期: 2002-09-16; **修回日期**: 2002-10-28.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272001); 湖南省自然科学基金重点项目(00JJY1009).

作者简介: 年晓红(1965—),男,甘肃武山人,教授,博士生,从事鲁棒控制,微分对策理论及应用研究; 黄琳(1935—),男,江苏扬州人,教授,博士生导师,中科院院士,从事稳定性理论及应用,鲁棒控制和复杂系统控制理论等研究.

不断完善外, 随机微分对策、多人合作微分对策、非合作微分对策和主从微分对策等方面的研究也取得了很大进展 除了 Issacs, Nash, Friedman[4] 外, Krasovskii[5], Leitmannt[6] 和Petrosjan[7] 等均对微分对策理论的发展作出了杰出的贡献

美国著名数学家Nash 最先将微分对策理论引入经济学研究领域, 并由于他的出色工作而获得了诺贝尔经济学奖 近年来, 经济学领域中对微分对策的研究十分活跃 周边经济和微经济等方面的许多课题都可用微分对策的理论来研究

我国对微分对策的研究起步较晚, 研究人员也不多 以张嗣瀛院士为代表的研究群体用现代控制理论的思想和方法对微分对策作过系统的研究, 提出了双边控制的"定量极值原理"和"定性极值原理"[8] 李登峰在文献[9]中系统地介绍了微分对策的数学概念、理论、方法和应用

2　微分对策理论研究的一些进展

2 1　线性二次微分对策

自Nash[10] 提出线性系统微分对策的二次最优性能指标以来, 线性二次微分对策的均衡点便以Nash 命名, 而线性二次微分对策也称为Nash 微分对策 从20 世纪70 年代开始, 时域空间上的线性二次微分对策问题的研究取得了长足进展, 大量有价值的学术论文[10~39] 不断发表 Starr 和Ho[11, 12] 研究了如下闭环非零和线性微分对策:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t), \\ x(0) = x_0, \\ x \in R^n, u_1 \in R^{r_1}, u_2 \in R^{r_2} \end{cases} \tag{1}$$

在二次支付函数

$$J_1(u_1, u_2) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K_{1f}x(t_f) + \frac{1}{2}\int^{t_f}[x^TQ_1x + u_1^TR_{11}u_1 + u_2^TR_{12}u_2]\mathrm{d}t, \tag{2}$$

$$J_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2}x^T(t_f)K_{2f}x(t_f) + \frac{1}{2}\int^{t_f}[x^TQ_2x + u_1^TR_{21}u_1 + u_2^TR_{22}u_2]\mathrm{d}t \tag{3}$$

下的Nash 均衡点和最优解的存在问题 一般地, 有限区间上微分对策的最优解

$$u_1^*(t) = -R_{11}^{-1}B_1^TK_1(t)x(t),$$
$$u_2^*(t) = -R_{22}^{-1}B_2^TK_2(t)x(t)$$

的存在问题可化为如下Riccati 微分方程组:

$$\dot{K}_1 = -A^TK_1 - K_1A - Q_1 + K_1S_1K_1 + K_1S_2K_2 + K_2S_2K_1 - K_2S_{02}K_2, \tag{4}$$

$$\dot{K}_2 = -A^TK_2 - K_2A - Q_2 + K_2S_2K_2 + K_2S_1K_1 + K_1S_1K_2 - K_1S_{01}K_1, \tag{5}$$

$$K_i(t_f) = K_{if}, i = 1, 2 \tag{6}$$

解的存在性问题 其中: $S_i = B_iR_{ii}^{-1}B_i^T, i = 1, 2, S_{01} = B_1R_{11}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}B_1^T, S_{02} = B_2R_{22}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}B_2^T$.

Cruz 和Chen[14], Ozguner 和Perkins[15] 分别对闭环线性二次微分对策的Nash 对策的存在性作了进一步研究, Papavassilopoulos 等[16~18] 研究了闭环线性二次微分对策的Nash 均衡点和代数Riccati 方程组的存在性、唯一性问题 Weeren[19] 研究了无穷区间上Nash 均衡点的渐近性质

Simaan[20], Abou-Kandil 等[21, 22] 研究了开环线性二次微分对策的Nash 均衡点和Nash 最优解的存在问题, 与闭环系统的情形一样, 将有限区间上线性二次微分对策的最优解归结为求解Riccati 方程组(4, 5) 的解 由于Riccati 方程组(4, 5) 在线性二次微分对策的研究中具有决定意义, 许多学者研究了Riccati 方程组的解及存在性问题 Freiling 等[23] 研究了Riccati 方程组的解及存在性条件 对于有限区间上的线性二次微分对策的研究, 值得一提的是近年来Engwerda 等[24~26] 所做的一系列出色工作

假定二次线性Nash 微分对策的最优解为

$$u_1^*(t) = -R_{11}^{-1}B_1^T\Psi_1(t),$$
$$u_2^*(t) = -R_{22}^{-1}B_2^T\Psi_2(t),$$

则 $\Psi_1(t)$ 和 $\Psi_2(t)$ 应满足如下微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{bmatrix} x(\tau) \\ \Psi_1(\tau) \\ \Psi_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & S_1 & S_2 \\ Q_1 & A^T & 0 \\ Q_2 & 0 & A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(\tau) \\ \Psi_1(\tau) \\ \Psi_2(\tau) \end{bmatrix} \triangleq M\begin{bmatrix} x(\tau) \\ \Psi_1(\tau) \\ \Psi_2(\tau) \end{bmatrix} \tag{7}$$

以及边值条件

$$\Psi_1(t_f) = K_{1f}x(t_f), \Psi_2(t_f) = K_{2f}x(t_f).$$

记

$$\exp(Mt_f) = \begin{bmatrix} W_{11}(t_f) & W_{12}(t_f) & W_{13}(t_f) \\ W_{21}(t_f) & W_{21}(t_f) & W_{21}(t_f) \\ W_{31}(t_f) & W_{31}(t_f) & W_{31}(t_f) \end{bmatrix},$$

定义

$$H(t_f) = W_{11}(t_f) + W_{12}(t_f)K_{1f} + W_{13}(t_f)K_{2f},$$

则有如下结论:

定理 1[24]　二人线性二次微分对策存在Nash

平衡点的充分必要条件为 $H(t_f)$ 可逆

Engwerda 等[23~26] 不仅给出了有限时间区间上二人线性二次微分对策存在 Nash 平衡点的充分必要条件, 同时还给出例子说明了如下 Riccati 微分方程组:

$$\dot{K}_1 = -A^{T}K_1 - K_1A - Q_1 + K_1S_1K_1 + K_1S_2K_2,\ K_1(t_f) = K_{1f}, \tag{8}$$

$$\dot{K}_2 = -A^{T}K_2 - K_2A - Q_2 + K_2S_2K_2 + K_2S_1K_1,\ K_1(t_f) = K_{2f} \tag{9}$$

的解与 Nash 平衡点之间的关系

对于无限时间区间上的二人线性二次微分对策, 由于代数 Riccati 方程组本身的不对称性, 具有一定难度, 但近年来仍有不少讨论, 文献[23~26] 中已包含了这些方面的研究成果 Weeren 等[26] 及 Mageirou[27] 讨论了无限时间区间上二人线性二次微分对策解的渐近性质, 但这些结论均是在简化二次性能指标函数的基础上建立的, 具有一定局限性 另外, Engwerda[25] 和Weeren 等[26] 对一维标量系统的二人线性二次微分对策问题作了较为深入的讨论, 得到了一些很好的结论

到目前为止, 对于多人线性二次微分对策的研究还不多见, 早期研究可参阅 Varailya[28], Vidyasagar[29] 等的工作 另外, Xu 和Mizukami[30,31] 还讨论了一类具有奇异值的广义二人线性二次微分对策的 Nash 均衡点和 Nash 最优解问题

2 2 非线性微分对策

传统的军事对抗模型大多是非线性微分对策模型, 如追逃问题、拦截问题、合作问题等 研究非线性微分对策的方法除定量方法外, 还有定性方法 定量方法以求解平衡点、平衡点所对应的最优控制策略以及相应的支付值为目的; 而定性方法则以对抗中某种预期结果能否实现为研究目的, 分析所谓的界栅(Barrier) 存在性和位置, 以期在对抗中处于有利地位 定量微分对策所用的方法为双方极值原理和变分方法, 将求解微分对策最优控制策略问题转化为求一组 Hamilton-Jacobi 方程解的问题 然而后者求解很困难, 没有一般方法, 大量的研究工作集中在 Hamilton-Jacobi 方程组的数值算法方面[9]. 由于高维系统解的空间结构较为复杂, 定性微分对策方法一般只适用于低维系统

非线性微分对策的研究已经取得了许多重要成果, 这些成果大多与军事有关 美国学者 Issacs[1,2], Friedman[4], Leitmannt[6,32~34] 和前苏联学者 Krasovskii[5,37] 以及 Petrosjan[7] 等均对非线性微分对策理论的发展做出了重要贡献 Leitmannt[32~34] 等以空战为研究对象, 对飞机的追击、躲避等问题进行了研究, 发展了军事微分对策理论 Berkovitz[35] 研究了具有固定逗留期的非线性微分对策鞍点的存在性和微分对策的值; 而在文献[36] 中则研究了一类更具一般性的追逃问题 Krasovskii 和Lukyanov[37] 研究了一类泛函微分对策问题 Ivanov[38] 针对椭球面上的微分对策模型, 研究了对策的成本支出问题 Lukoyanov[39] 研究了一类具有遗传信息的非线性对抗泛函微分对策模型, 证明了微分对策的鞍点值对应一类 Hamilton-Jacobi 方程的最大解 最近, Yong[40] 给出了具有固定逗留期的微分对策的值与 Hamilton-Jacobi 方程的依赖关系 Broek[41] 研究了一类状态反馈多人微分对策模型的 Nash 均衡点及其微分对策的解

由于非线性微分对策的理论研究非常困难, 这方面的研究进展比较缓慢 基于解决实际问题的需要, 微分对策解的数值算法和学习算法等方面的研究将成为非线性微分对策研究的热点方向

2 3 微分对策理论在 H_∞ 控制中的应用

从20世纪90年代开始, 微分对策理论在 H_∞ 控制中得到广泛的应用, 发表了大量学术论文[42~52]. 这些论文通过选择不同的性能指标函数, 推导出许多不同的结论, 但其思想是一致的, 即: 将干扰当成零和微分对策中的一方, 应用最大最小极值原理, 选择控制策略使得控制成本最小 Basar 和Bernard[42] 对这一思想作了系统的论述 Pan[43,44] 用微分对策理论研究了如下具有"快"、"慢"奇异扰动系统的 H_∞ 控制问题

$$\begin{cases} \mathring{x}_1 = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + B_1(t)u + D_1(t)w, \\ \epsilon\mathring{x}_2 = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2 + B_2(t)u + D_2(t)w, \\ y = C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2 + E(t)u. \end{cases} \tag{10}$$

Yung 和Wang[45] 研究了非线性系统

$$\begin{cases} \mathring{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u, \\ z = h_1(x) + k_{11}(x)u, \\ y = h_2(x) + k_{21}(x)w \end{cases} \tag{11}$$

的 H_∞ 控制问题; Didinsky 和Basar[46] 研究了更为一般的非线性系统

$$\begin{cases} \mathring{x} = f(t,x,u,w), \\ y = h(t,x) + v \end{cases} \tag{12}$$

的 H_∞ 控制问题(其中: w 为输入干扰, v 为输出干扰); Lin 和 Byrnes[47] 应用微分对策理论研究了一类离散非线性系统的 H_∞ 控制问题. 这方面的详细报道可见 James[48] 的综述报告.

最近, Savkin[49], Amato 等[50] 还用微分对策的最大最小极值方法研究了不确定系统的鲁棒 H_∞ 控制; Yoneyama 和 Speyer[51] 研究了一类具有参数不确定性的自适应 H_∞ 控制问题; Amato 和 Pironti[52] 则研究了不确定时滞系统的 H_∞ 控制问题.

3　微分对策研究的几个热点问题

3.1　军事领域中的微分对策

微分对策理论起源于军事问题, 由于国防和军事目的的需要, 军事领域中的微分对策研究一直是微分对策理论发展的动力和热点. 特别在当今世界, 高科技手段在军事中的广泛应用, 使得军事领域中的微分对策问题研究显得尤为重要.

基于安全保密的原因, 军事领域中的微分对策研究的最新资料很难在公开发表的文献[53, 54] 中找到, 但可以想象, 该领域中的微分对策研究将与电子信息技术紧密结合, 以微分对策的数值算法研究为重点方向. 一些较为实用的控制方法, 如自适应控制、学习控制等将在这类微分对策的研究中发挥重要作用. 由于科学技术在现代战争中的应用, 多目标多任务的协同作战是现代战争的一个重要特征, 因此, 多人微分对策的研究也将成为军事领域中的微分对策研究的重要课题.

3.2　经济领域中的微分对策

近年来, 经济领域中的微分对策研究非常活跃, 许多宏观经济中的多边竞争、合作问题均可用微分对策的理论和方法解决, 为决策者提供可靠的决策方案. 同时, 经济领域中的微分对策的研究也丰富和发展了微分对策理论.

Engwerda 等[23~26], Fershtman 和 Kamien[55], Levine 和 Brociner[56] 在微分对策方面的大量研究工作均基于经济领域中的实际问题, 他们在应用微分对策的思想和方法解决经济问题方面取得了一系列重要成果, 为微分对策基础理论的发展做出了重要贡献.

由于现代社会信息技术的发展, 经济领域中的合作、竞争将更加激烈, 涉及多个方面, 因此, 多人微分对策的研究必将成为经济领域中微分对策研究的主要课题.

3.3　基于模型不确定性的微分对策

由于微分对策模型的复杂性, 系统不可避免地具有某些不确定性, 如模糊性、随机不确定性、系统参数不确定性以及外部干扰因素等. 近年来, 随机微分对策的研究已取得很多重要成果[57~59], 模糊系统的微分对策也有学者开始研究[60], 但这方面的结果还不多见. 由于随机微分对策模型的广泛存在性和模糊控制方法的可操作性, 随机微分对策和模糊微分对策的研究将成为微分对策理论研究的热点方向.

对于参数不确定性系统的微分对策, 由于决定微分对策解的 Riccati 方程组的不对称性, 使得这方面的研究十分困难, 目前还未见到有关文献发表. 近年来, Savkin[49], Amato 等[50] 以及 Yoneyama 等[51] 用微分对策方法研究参数不确定系统 H_∞ 控制问题, 但因这些方法只需解一个 Riccati 方程, 所以对微分对策的研究来说不具有广泛性. 因此在近期内, 不确定系统的微分对策研究也将成为微分对策理论研究的热点方向之一.

4　结　语

历经半个多世纪, 微分对策理论已发展成为介于控制理论和对策论之间的一门相对独立的交叉学科. 由于微分对策理论与军事和经济领域的实际问题密切相关, 研究微分对策理论对于国防建设和经济决策具有十分重要的意义. 可以预见, 微分对策的研究将越来越受到国内学者的广泛重视.

参考文献(References):

[1] Issacs R. Differential games[R]. Research Memoranda RM-1391, RM-1399, RM-1411, RM-1468, Rand Corporation, 1956.

[2] Issacs R. *Differential Games*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1965.

[3] Friedman A. *Differential Games*[M]. New York: John Wiley, 1971.

[4] Friedman A. *Differential Games*[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1974.

[5] Krasovskii N N, Subbotin A I. *Positional Differential Games*[M]. Moscom, 1974.

[6] Leitmann G. *Multicriteria Decision Making and Differential Games*[M]. New York & London: Plenum Press, 1976.

[7] Petrosjan L A. *Differential Games of Pursuit*[M]. Singapore: World Scientific Press, 1993.

[8] 张嗣瀛. 微分对策[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[9] 李登峰. 微分对策及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

[10] Nash J. Non-cooperative games[J]. *Annals of Mathe-*

matics, 1951, 54(3): 286-295.

[11] Starr A W, Ho Y C. Nonzero-sum differential games[J]. J Optim Theory Appl, 1969, 3(3): 184-206.

[12] Starr A W, Ho Y C. Further properties of nonzero-sum differential games[J]. J Optim. Theory Appl, 1969, 3(3): 207-219.

[13] Lukes D L. Equilibrium feedback control in linear games with quadratic cost[J]. SIAM J Contr Optim, 1971, 9(2): 234-252.

[14] Cruz Jr J B, Chen C I. Series Nash solution of two person nonzero-sum linear-quadratic games[J]. J Optim Theory Appl, 1971, 7(4): 240-257.

[15] Ozguner U, Perkins W R. A series solution to the Nash strategy for large-scale interconnected systems[J]. Automatioca, 1977, 13(2): 313-315.

[16] Papavassilopoulos G P, Cruz Jr J B. On the uniqueness of Nash strategies for a class of analytic differential games[J]. J Optim Theory Appl, 1979, 27(2): 309-314.

[17] Papavassilopoulos G P, Medanic J V, Cruz Jr J B. On the existence of Nash strategies and solutions to coupled Riccati equations in linear quadratic games[J]. J Optim Theory Appl, 1979, 28(1): 49-76.

[18] Papavassilopoulos G P, Olsedr G J. On the linear-quadratic, closed-loop no-memory Nash games[J]. J Optim Theory Appl, 1984, 42(4): 551-560.

[19] Weeren A J T M, Schumacher J M, Engwerda J C. Asymptotic analysis of linear feedback Nash equilibrium in nonzero-sum linear-quadratic differential games[J]. J Optim Theory Appl, 1999, 101(3): 693-722.

[20] Simaan M, Cruz Jr J B. On the solutions of open-loop Nash-Riccati equations in linear-quadratic differential games[J]. Int J Control, 1973, 18(1): 57-63.

[21] Abou-Kandil H, Bertrand P. Analytic for a class of linear-quadratic open-loop Nash games[J]. Int J Control, 1986, 43(3): 997-1002.

[22] Abou-Kandil H, Freiling G, Jank G. Necessary conditions for constant solutions of coupled Riccati equations in Nash games[J]. Systems & Control Letters, 1993, 21(4): 295-306.

[23] Freiling G, Jank G, Abou-Kandil H. On global existence of solutions to coupled matrix Riccati equations in closed-loop Nash games[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(2): 264-269.

[24] Engwerda J C. On the open-loop Nash equilibrium in LQ-games[J]. J Economic Dynamics and Control, 1998, 22(5): 729-762.

[25] Engwerda J C. Computational aspects of the open-loop Nash equilibrium in linear quadratic games[J]. J Economic Dynamics and Control, 1998, 22(8-9): 1487-1506.

[26] Engwerda J C. Feedback Nash equilibrium in the scalar infinite horizon LQ-games[J]. Automatica, 2000, 36(1): 135-139.

[27] Mageirou E F. Values and strategies for infinite-time linear-quadratic games[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1976, 21(4): 547-550.

[28] Varailya P. N-person nonzero-sum differential games with linear dynamics[J]. SIAM J Control, 1970, 8(4): 441-449.

[29] Vidyasagar M. A new approach to N-person, nonzero-sum, linear differential games[J]. J Optim Theory Appl, 1976, 18(1): 171-175.

[30] Xu H, Mizukami K. Linear-quadratic zero-sum differential games for generalized state space systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(1): 143-147.

[31] Xu H, Mizukami K. New sufficient conditions for linear feedback closed-loop Stackelberg strategy of descriptor[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(5): 1097-1101.

[32] Leitmann G, Showronski J. Avoidance control[J]. J Optim Theory Appl, 1977, 23(4): 581-591.

[33] Getz W, Leitmann G. Qualitative differential games with two targets[J]. J Math Anal Appl, 1979, 68(3): 421-430.

[34] Leitmann G. Guaranteed avoidance strategies[J]. J Optim Theory Appl, 1980, 32(4): 569-576.

[35] Berkovitz L D. The existence of value and saddle point in games of fixed duration[J]. SIAM J Control, 1985, 23(2): 172-196.

[36] Berkovitz L D. Differential games of generalized pursuit and evasion[J]. SIAM J Control, 1986, 24(3): 361-372.

[37] Krasovskii A N, Lukyanov N Yu. Problem of conflict control of functional systems of high dimensionality[J]. Prikl Mat Mekh, 1996, 60: 885-900.

[38] Ivanov G Ye. Guaranteed control in differential games with ellipsoidal payoff[J]. J Math Anal Appl, 1998, 62(4): 555-563.

[39] Lukoyanov N Yu. A Hamilton-Jacobi type equation in control problems with hereditary information[J]. J Math Anal Appl, 2000, 64(2): 243-253.

[40] Yong J. On the Isaacs equation of differential games of fixed duration[J]. J Optim Theory Appl, 1986, 50(2):

359-364.

[41] Van den Broek W A. Moving horizon control in dynamic games[J]. J Economic & Control, 2002, 26 (6): 937-961.

[42] Basar T, Bernard P. H∞-Optimal Control and Related Minimax Design Problems [M]. Boston, Massachusetts: Birkhauser, 1991.

[43] Pan Z G, Baser T. H∞-optimal control for singularly perturbed systems—Part Ⅰ: Perfect state measurements[J]. Automatica, 1993, 29(2): 401-423.

[44] Pan Z G, Baser T. H∞-optimal control for singularly perturbed systems—Part Ⅱ: Imperfect state measurements[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39 (2): 280-299.

[45] Yung C F, Wang H S. H∞ controller reduction for nonlinear systems [J]. Automatica, 2001, 37 (11): 1797-1802.

[46] Didinsky G, Basar T. Structural properties of minimax controllers for a class of differential games arising in nonlinear H∞ control[J]. Systems & Control Letters, 1993, 21(5): 433-441.

[47] Lin W, Byrnes C I. H∞-control of discrete-time nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(4): 494-510.

[48] James M R. Recent developments in nonlinear H∞ control[J]. Annual Reviews in Control, 1997, 21(1): 43-54.

[49] Savkin A V, Evans R J, Skafidas E. The problem of optimal robust sensor scheduling[J]. Systems & Control Letters, 2001, (2): 149-157.

[50] Amato F, Mattei M, Pironti A. Guaranteeing cost strategies for linear quadratic differential games under uncertain dynamics[J]. Automatica, 2002, 38(3): 507-515.

[51] Yoneyama J, Speyer J L, Dillon C H. Robust adaptive control for linear systems with unknown parameters [J]. Automatica, 1997, 33(10): 1909-1916.

[52] Amato F, Pironti A. H∞ optimal terminal state control for linear systems with lumped and distributed time-delays[J]. Automatica, 1999, 35(9): 1619-1624.

[53] Ibragimov G I. A game of optimal pursuit of one object by several[J]. J Application Mathematics and Mechanics, 1998, 62, (2): 187-192.

[54] Lee N-M. On determining optimal strategies in pursuit games in the plane[J]. Theoretical Computer Science, 1998, 197(1-2): 203-234.

[55] Fershtman C, Kamien I. Dynamic duopolistic competition with sticky prices[J]. Econometrica, 1987, 55(4): 1151-1164.

[56] Levine P, Brociner A. Fiscal policy coordination and EMU: A dynamic game approach [J]. J Economic Dynamics Control, 1994, 18(4): 699-729.

[57] Wonham W. On a matrix Riccati equation of stochastic control[J]. SIAM J Control, 1968, 6(4): 681-697.

[58] Ngo V L, S Koji S. Some results on the Markov equilibrium of a class of homogeneous differential games [J]. J Economic Behavior Organization, 1998, 33 (3-4): 557-566.

[59] Hamadène S. Backward-forward SDE's and stochastic differential games[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1998, 77(1): 1-15.

[60] Yoshida Y. A zero-sum stopping game in a continuous-time dynamic fuzzy system[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2001, 34, (5-6): 603-614.

(上接第 127 页)

[39] 邓琛, 张琴舜, 翁羿浩. 现代控制理论在假肢技术中的应用[J]. 上海交通大学学报, 1996, 30(8): 96-99.
(Deng Chen, Zhang Qinshun, Weng Yihao. Application of modern control theory to prosthetics[J]. J of Shanghai Jiaotong University, 1996, 30(8): 96-99.)

[40] 王人成, 金德闻. 步态分析在假肢设计中的应用[J]. 中国临床康复, 2002, 6(20): 3000-3019.
(Wang Ren-cheng, Jin De-wen. The application of gait analysis on the design of prosthesis[J]. Chinese J of Clinical Rehabilitaion, 2002, 6(20): 3000-3019.)

[41] 张瑞红, 金德闻. 不同路况下正常步态特征研究[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2000, 40(8): 77-80.
(Zhang Ruihong, Jin Dewen. Normal gait patterns on different terrain[J]. J of Tsinghua University, 2000, 40(8): 77-80.)