第19卷 第3期 控 制 与 决 策 2004年3月
Vol 19 No. 3 Control and Decision Mar. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)03-0327-04

# 线性不确定系统多目标鲁棒保代价控制

王德进
(黑龙江大学 电子工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘 要**: 针对一类线性范数有界不确定系统, 讨论其多目标鲁棒保代价控制问题. 所设计的状态反馈控制器对所有容许的不确定性, 保证闭环系统的稳定性, 并在非劣(Pareto 最优)的意义下, 优化多目标代价函数的上界. 通过加权因子的选择来解决不同目标之间的竞争问题. 采用线性矩阵不等式方法, 将问题转化为一个线性凸优化算法. 数值仿真算例说明了所提出方法的可解性和有效性.

**关键词**: 多目标控制; 不确定系统; 保代价控制; 鲁棒控制; 线性矩阵不等式
**中图分类号**: TP273 **文献标识码**: A

# Multi-objective robust guaranteed cost control of linear uncertain systems

*WANG De-jin*
(Institute of Electronic Engineering, Heilongjiang University, Haerbin 150080, China. E-mail: wdejin56@yahoo.com)

**Abstract**: A multi-objective robust guaranteed cost controller is designed for a class of linear norm-bounded uncertain systems. The designed state feedback controller guarantees the stability of the closed-loop system, and in noninferior (equivalently Pareto optimal) sense, optimizes the upper bound of multi-objective cost function for all admissible uncertainties. By selecting a vector-valued weighting parameter appropriately, the confliction among competing objectives is settled. The problem is reduced to a linear convex optimization algorithm via LMI approach. Numerical simulation example shows the feasibility and effectiveness of the method.

**Key words**: multi-objective control; uncertain system; guaranteed cost control; robust control; LMI

## 1 引 言

自Chang等[1]于1972年提出不确定系统的保代价(Guaranteed cost)控制问题以来, 不确定系统以及不确定时滞系统的保代价控制便受到人们的广泛关注, 并取得了诸多成果[1~6]. 另一方面, 控制系统的多目标设计一直是人们致力解决的课题[7,8]. 多目标设计的核心是处理不同目标之间的竞争问题, 给出一种折衷的解决方法.

本文针对一类连续时间线性范数有界不确定系统, 提出并求解其多目标鲁棒保代价控制问题. 首先阐述了多目标优化的非劣解(Pareto 最优解)的概念及相关定理, 将多目标优化控制问题转化为一标量函数的优化控制问题, 并通过加权因子向量的选择来解决不同控制目标之间的竞争问题; 其次给出了保证闭环系统渐近稳定且代价函数有上界的充分条件; 然后, 从该条件出发, 采用线性矩阵不等式技术, 得到了一个求解所提出的多目标鲁棒保代价控制的线性凸优化算法; 最后, 通过数值算例说明了本文方法的有效性.

## 2 问题的表述

考虑由下述状态方程和输出方程描述的线性不确定系统:

**收稿日期**: 2003-02-13; **修回日期**: 2003-06-04
**作者简介**: 王德进(1956—), 男, 黑龙江牡丹江人, 教授, 从事鲁棒控制、时滞系统和计算机网络控制等研究.

$$\overset{\circ}{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))u(t), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$z_i(t) = C_i x(t) + D_i u(t),\ i \in \bar{s} \tag{3}$$

其中:指标集 $\bar{s} = \{1, 2, \cdots, s\}$, $x(t) \in R^n$ 为系统状态, $u(t) \in R^k$ 为控制输入, $z_i(t) \in R^{p_i}(i \in \bar{s})$ 为系统的 $s$ 个性能评价输出. 记

$$A(t) = A + \Delta A(t), B(t) = B + \Delta B(t),$$

且假设容许不确定性矩阵具有如下形式:

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = H_0 \Delta(t)[E_a \quad E_b].$$

其中: $A, B, H_0, E_a, E_b$ 为具有适当维数的已知矩阵; $\Delta(t)$ 为时变未知矩阵,且满足如下范数有界条件:

$$\Delta^T(t)\Delta(t) \le I.$$

为推导简便,假设如下正交性条件成立:

$$C_i^T D_i = 0,\ i \in \bar{s}.$$

与不确定系统(1)～(3)相关联的多目标代价函数取为

$$J_i = \int [z_i^T(t) Q_i z_i(t) + u^T(t) R u(t)] \mathrm{d}t,\ i \in \bar{s} \tag{4}$$

其中: $R > 0, Q_i > 0 (i \in \bar{s})$ 为加权矩阵.

由于本文将讨论多目标优化控制问题,有必要明确所选择的多目标优化的概念[7,9]. 设 $\Omega$ 代表任意非空集合,令 $f_i: \Omega \to R^+ (i \in \bar{s})$ 为 $\Omega$ 上的非负泛函,则称点 $x^0 \in \Omega$ 关于向量值函数 $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)]^T$ 为非劣的(Pareto 最优的),如果不存在 $x \in \Omega$,使得对所有 $i \in \bar{s}$,有 $f_i(x) \le f_i(x^0)$,且对某一 $k \in \bar{s}$ 有 $f_k(x) < f_k(x^0)$.

利用上述概念,可将向量值函数优化问题转化为标量函数的优化问题. 下述结果成立:

**命题 1**[7] 设 $\Omega$ 为赋范线性空间,且 $F = [f_1, f_2, \cdots, f_s]^T$ 的每一元素在 $\Omega$ 上为凸函数. 令

$$\Lambda := \left\{\lambda \in R^s \,\middle|\, \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1\right\}. \tag{5}$$

对 $\lambda \in \Lambda$,考虑如下标量优化问题:

$$\inf\{\lambda^T F(x) \mid x \in \Omega\}. \tag{6}$$

假设 $x^0 \in \Omega$ 关于向量值函数 $F(x)$ 是非劣的,则存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得 $x^0$ 为式(6)的解. 反之,给定 $\lambda \in \Lambda$,如果式(6)有一个解 $x^0$,则 $x^0$ 关于 $F(x)$ 为非劣的.

构造无记忆状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t). \tag{7}$$

将式(7)代入代价函数(4),有

$$J_i(K) = \int x^T(t)[C_i^T Q_i C_i + K^T(D_i^T Q_i D_i + R)K]x(t)\mathrm{d}t,\ i \in \bar{s}$$

由凸函数的定义,不难验证 $J_i(K)(i \in \bar{s})$ 关于反馈增益阵 $K \in \Omega$ 是凸的. 其中 $\Omega$ 取为一般的矩阵赋范空间. 对 $\lambda \in \Lambda$,考虑如下定义的标量优化问题:

$$L = \inf\{\lambda^T J(K) \mid K \in \Omega\}. \tag{8}$$

其中 $J(K) = [J_1(K), J_2(K), \cdots, J_s(K)]^T$. 至此,给出不确定系统多目标保代价控制的定义如下:

**定义 1** 考虑系统(1)～(3),给定 $\lambda \in \Lambda$. 如果存在无记忆状态反馈控制律(7)和标量 $L^* > 0$,使得对所有容许的不确定性,有: 1) 闭环系统是渐近稳定的; 2) 标量性能指标(8)满足 $L \le L^*$. 则称控制律(7)为系统(1)～(3)的一个多目标保代价控制律, $L^*$ 称为一个保代价.

**注 1** 多目标控制的任务之一就是解决不同目标之间的竞争问题. 显然,根据评价者对目标函数 $J_1, J_2, \cdots, J_s$ 重要程度的要求,适当选择一组 $\lambda \in \Lambda$,即可解决不同目标之间的竞争.

下面给出一个矩阵不等式:

**命题 2**[10] 令 $Y$ 为对称矩阵, $H$ 和 $E$ 为具有适当维数的已知矩阵,且 $\Delta^T(t)\Delta(t) \le I$. 则有

$$Y + H\Delta(t)E + E^T\Delta^T(t)H^T < 0,$$

当且仅当存在一个标量 $\eta > 0$,使得

$$Y + \eta HH^T + \frac{1}{\eta}E^TE < 0.$$

## 3 主要结果

在设计定义 1 给出的多目标保代价控制律之前,首先给出使闭环系统渐近稳定且代价函数(8)有上界的一个充分条件. 将无记忆状态反馈控制律(7)代入状态方程(1),导致的闭环系统为

$$\overset{\circ}{x}(t) = [A(t) + B(t)K]x(t). \tag{9}$$

记 $A_K(t) = A(t) + B(t)K$. 有如下引理:

**引理 1** 给定 $\lambda \in \Lambda$. 如果存在正定对称阵 $P$,反馈增益阵 $K$,使得

$$PA_k(t) + A_k^T(t)P + K^TRK + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i[(C_i + D_iK)^T Q_i (C_i + D_iK)] < 0, \tag{10}$$

对所有容许的不确定性成立,则闭环系统(9)是渐近稳定的,且代价函数(8)有上界 $L^*$,即

$$L \le L^* = x_0^T P x_0. \tag{11}$$

证明类似于文献[3].

注意到式(10)中含有系统的不确定性参数矩阵,因此不能直接用于反馈控制律的设计. 利用命题 2 的充要条件,可将这种不确定性消掉,并相应地给出定义 1 的多目标保代价控制律的设计方法.

**定理 1**　给定 $\lambda\in\Lambda$ 如果存在正定对称阵 $X$，矩阵 $N$，以及标量 $\epsilon>0$，使得

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{l}(AX+XA^{\mathrm T}+\\ BN+N^{\mathrm T}B^{\mathrm T}+\\ \epsilon H_0H_0^{\mathrm T})\end{array} & J_{12}^{\mathrm T} & XE_a^{\mathrm T}+N^{\mathrm T}E_b^{\mathrm T} & N^{\mathrm T} \\ J_{12} & -J_{22} & 0 & 0 \\ E_aX+E_bN & 0 & -\epsilon I & 0 \\ N & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}<0 \tag{12}$$

成立，其中：$J_{12}^{\mathrm T}=[\sqrt{\lambda_1}(XC_1^{\mathrm T}+N^{\mathrm T}D_1^{\mathrm T}),\cdots,\sqrt{\lambda_s}(XC_s^{\mathrm T}+N^{\mathrm T}D_s^{\mathrm T})]$，$J_{22}=\text{block-diag}\{Q_1^{-1},\cdots,Q_s^{-1}\}$. 则控制律

$$u(t)=NX^{-1}x(t) \tag{13}$$

是不确定系统(1)～(3)的一个多目标保代价控制律，且代价函数(8)有上界 $L^*$，即

$$L\le L^*=x_0^{\mathrm T}X^{-1}x_0. \tag{14}$$

**证明**　应用 Schur 补引理，不等式(10)等价于

$$\Sigma=\begin{bmatrix} PA_k(t)+A_k^{\mathrm T}(t)P+K^{\mathrm T}RK & \bar J_{12}^{\mathrm T} \\ \bar J_{12} & -J_{22}\end{bmatrix}<0.$$

其中

$$\bar J_{12}^{\mathrm T}=[\sqrt{\lambda_1}(C_1+D_1K)^{\mathrm T},\cdots,\sqrt{\lambda_s}(C_s+D_sK)^{\mathrm T}].$$

注意到:

$$\Sigma=$$

$$\begin{bmatrix} P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm T}P+K^{\mathrm T}RK & \bar J_{12}^{\mathrm T} \\ \bar J_{12} & -J_{22}\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} PH_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\bar\Delta(t)\begin{bmatrix} E_a+E_bK & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} (E_a+E_bK)^{\mathrm T} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\bar\Delta^{\mathrm T}(t)\begin{bmatrix} H_0^{\mathrm T}P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

其中 $\bar\Delta(t)=\text{block-diag}\{\Delta(t),\cdots,\Delta(t)\}$.

根据命题 2，$\Sigma<0$ 当且仅当存在 $\epsilon>0$，使得

$$\begin{bmatrix} P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm T}P+K^{\mathrm T}RK & \bar J_{12}^{\mathrm T} \\ \bar J_{12} & -J_{22}\end{bmatrix}+$$

$$\epsilon\begin{bmatrix} PH_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_0^{\mathrm T}P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}+$$

$$\frac{1}{\epsilon}\begin{bmatrix} (E_a+E_bK)^{\mathrm T} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} E_a+E_bK & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}<0.$$

由 Schur 补引理，上述不等式成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{l}(P(A+BK)+\\ (A+BK)^{\mathrm T}P+\\ K^{\mathrm T}RK+\epsilon PH_0H_0^{\mathrm T}P)\end{array} & \bar J_{12}^{\mathrm T} & (E_a+E_bK)^{\mathrm T} \\ \bar J_{12} & -J_{22} & 0 \\ E_a+E_bK & 0 & -\epsilon I\end{bmatrix}<0. \tag{15}$$

用分块对角阵 $\text{block-diag}\{P^{-1},I,\cdots,I,I\}$ 同时左右乘不等式(15)，且令 $X=P^{-1}$，$N=KX$，并再次利用 Schur 补引理，即得不等式(12).

根据变量变换关系，代价函数(8)的上界为式(14). □

**注 2**　代价函数的上界(14)依赖于系统的初始状态 为了去掉这种依赖性，假设初始状态 $x_0$ 为一零均值协方差阵 $E\{x_0x_0^{\mathrm T}\}=I$ 的随机变量，于是

$$E\{x_0^{\mathrm T}X^{-1}x_0\}=\mathrm{tr}\{X^{-1}E\{x_0x_0^{\mathrm T}\}\}=\mathrm{tr}\{X^{-1}\}.$$

由 $L$ 的定义式(8)，得

$$L\le\mathrm{tr}\{X^{-1}\}. \tag{16}$$

最后，根据定理 1 的结论，给出如下求解多目标保代价控制问题的一个凸优化算法:

**定理 2**　考虑系统(1)～(3)和与其相关联的代价函数(8)，给定 $\lambda\in\Lambda$ 如果线性凸优化算法

$$\min_{\epsilon,X,N,M}\mathrm{tr}\{M\},$$

s t　1) 式(12)成立，

$$2)\ \begin{bmatrix} -M & I \\ I & -X\end{bmatrix}<0, \tag{17}$$

有解 $\epsilon,X,N,M$；则控制律(13)是一个多目标保代价控制律，且代价函数(8)的一个上界为 $\mathrm{tr}\{M\}$.

**证明**　应用 Schur 补引理，条件 2) 等价于 $X^{-1}<M$. 所以，由式(16)即得 $L<\mathrm{tr}\{M\}$. □

**注 3**　定理 2 中的目标函数和线性矩阵不等式约束均为凸的 因此，对一组固定的 $\lambda\in\Lambda$，该优化算法可给出问题的全局最优解

## 4　仿真算例

考虑不确定系统(1)～(3)，取 $s=2$，且系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

$$C_1=[1\ \ 1],\ C_2=[0\ \ 1],$$

$$D_1=D_2=0,\ Q_1=Q_2=R=1.$$

设不确定性系数矩阵满足 $\|\Delta A(t)\| \le 0.2$, $\|\Delta B(t)\| \le 0.2$. 取

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, E_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

应用定理 2 的凸优化算法, 对某些给定的 $\lambda \in \Lambda$, 相应的控制器和代价函数的上界如表 1 所示.

表 1 控制器和代价函数的上界

| $\lambda_1, \lambda_2$ | $K$ | $L^*$ |
|---|---|---|
| 0.1, 0.9 | [-1.622 3 -3.468 0] | 15.137 4 |
| 0.5, 0.5 | [-1.643 4 -3.500 3] | 14.593 4 |
| 0.9, 0.1 | [-1.664 9 -3.534 2] | 14.059 6 |

## 5 结 论

本文在非劣的意义下, 给出了多目标鲁棒保代价控制的一种解法. 该方法的特点是: 1) 通过适当选取加权因子, 可处理不同目标间的竞争问题; 2) 采用线性凸优化算法进行控制器设计, 保证了线性加权目标函数上界的最优性. 值得指出的是: 本文方法可推广到具有状态时滞的不确定系统.

参考文献(References):


[1] Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474-483.

[2] Palhares R M, Takahashi R H C, Peres P L D. $H_\infty$ and $H_2$ guaranteed costs computation for uncertain linear systems[J]. *Int J Systems Science*, 1997, 28(2): 183-188.

[3] Yu L, Chu J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155-1159.

[4] Esfahani S H, Moheimarri S O R, Petersen I R. LMI approach to suboptimal guaranteed cost control for uncertain time-delay systems[J]. *IEE Proceedings Part D, Control Theory and Applications*, 1998, 145(6): 491-498.

[5] Guan X, Lin Z, Duan G. Robust guaranteed cost control for discrete-time uncertain systems with delay[J]. *IEE Proceedings Part D, Control Theory and Applications*, 1999, 146(6): 598-602.

[6] Mahmoud M S, Xie L. Guaranteed cost control of uncertain discrete systems with delay[J]. *Int J Control*, 2000, 73(2): 105-114.

[7] Khargonekar P P, Rotea M A. Multiple objective optimal control of linear systems: The quadratic norm case[J], *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 36(1): 14-24.

[8] Theodor Y, Shaked U. $H_\infty$ multipleobjective robust controllers for infinite-horizon single measurement single control input problems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(10): 2130-2134.

[9] 解可新, 韩立兴, 林有联. 最优化方法[M]. 天津: 天津大学出版社, 1997.

[10] Xie L. Outputfeedback $H_\infty$ control of systems with parameter uncertainty[J]. *Int J Control*, 1996, 63(4): 741-750.


(上接第 326 页)

参考文献(References):


[1] Saaty T L. *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation*[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[2] Yang C, Huang J B. A decision model for IS outsourcing [J]. *Int J of Information Management*, 2000, 20(3): 225-239.

[3] Ngwenyama O K, Bryson N. Eliciting and mapping qualitative preferences to numeric rankings in group decision making[J]. *European J of Operational Research*, 1999, 116(3): 487-497.

[4] Liu Z, Inooka H, Kato M. A procedure for measuring the consistency of pair-wise comparison matrix [EB/OL]. http://www.ise.nus.edu.sg/proceedings/apors2000/fullpapers/25-04.htm, 2003-05-08.

[5] 李德敏, 黄双喜, 曹健, 等. Fuzzy 决策中有限方案的群体一致性评价方法与算法[J]. 控制与决策, 1999, 14(1): 14-18.
(Li D M, Huang S X, Cao J, et al. The group consensus assessment methods and algorithms of finite scheme in fuzzy decision [J]. *Control and Decision*, 1999, 14(1): 14-18.)

[6] Ross T J. *Fuzzy Logic with Engineering Application* [M]. New York: McGraw-Hill, 1995.