第19卷第3期 控制与决策 2004年3月
Vol 19 No. 3 Control and Decision Mar. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)03-0342-04

一类时滞奇异系统的H∞鲁棒控制

张永强, 马传贵, 刘粉林
(信息工程大学 信息工程学院, 河南 郑州 450002)

摘 要: 讨论一类具有状态及输入时滞的线性奇异系统的H^{∞}鲁棒控制问题. 利用线性矩阵不等式(LMI)方法, 给出一个使闭环系统正则、无脉冲模、稳定, 且满足H^{∞}鲁棒性能指标的状态反馈控制器存在的充分条件. 同时给出了一类奇异系统可鲁棒镇定的充要条件.

关键词: 奇异系统; H^{∞}控制; 状态反馈; 时滞; LMI; Schur变换
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

H∞ robust control for a class of singular systems with time delay

ZHANG Yong-qiang, MA Chuan-gui, LIU Fen-lin
(Institute of Information Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China. Correspondent: ZHANG Yong-qiang, E-mail: zhyq-gsg@sina.com)

Abstract: The H^{∞} robust control for a class of linear singular systems with state and input delay is discussed. In terms of linear matrix inequalities, a sufficient condition is given which ensures that the system is regular, impulse free and stable, and satisfies H^{∞} performance as well. Meanwhile, a necessary and sufficient condition of robust stabilization is also presented.

Key words: singular systems; H^{∞} control; state feedback; time dalay; LMI; Schur complement

1 引 言

在流体的长管道传输和各种化工生产过程等实际工程中, 时滞是影响系统稳定的重要因素. 对于时滞系统的研究, 大多采用LMI方法将时滞问题等价为一个二次稳定问题[1,2]. 随着研究的深入, 由于奇异系统具有更广泛的适应性, 对该系统的研究逐渐成为热点. 文献[3~5]研究了几类特殊的奇异系统, 但没有涉及时滞问题.

本文考虑一类具有输入和状态时滞的奇异系统的H^{∞}鲁棒控制问题. 利用LMI方法, 给出一个使得闭环奇异系统正则、无脉冲模、稳定, 且满足H^{∞}性能指标的状态反馈控制器存在的设计方案; 同时给出了使奇异系统二次稳定的充要条件; 最后通过仿真说明了本文方法的有效性.

2 系统描述

考虑如下线性系统:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - d_1(t)) + B_1 w(t) + B_2 u(t) + B_d u(t - d_2(t)), \tag{1a}$$

$$z(t) = Cx(t) + C_d x(t - d_1(t)) + D_1 w(t) + D_2 u(t) + D_d u(t - d_2(t)). \tag{1b}$$

其中: $x(t) = 0, t < 0, x(0) = x_0$; $x(t) \in \mathbf{R}^n$为系统状态; $w(t) \in \mathbf{R}^q$为系统的干扰输入, 且$w(t) \in$

收稿日期: 2003-01-23; **修回日期**: 2003-06-11.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(6037404); 河南省高校杰出科研人才创新工程项目(2001KYCX007); 河南省自然科学基金资助项目(0111060100); 河南省杰出青年基金资助项目(0412000200).

作者简介: 张永强(1980—), 男, 甘肃天水人, 硕士生, 从事奇异系统、鲁棒控制的研究; 刘粉林(1964—), 男, 江苏溧阳人, 教授, 博士, 从事复杂控制系统的结构性分析、鲁棒控制等研究.

$L_2[0,\infty)$; $u(t)\in\mathbf{R}^p$ 为控制输入; $z(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制输出; 矩阵 $E\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 可能是奇异的. 假设: $\mathrm{rank}\, E = r\le n$; $A, A_d, B_1, B_2, B_d, C, C_d, D_1, D_2$ 和 D_d 是具有相应维数的常实数矩阵; $d_i(t)\ (i=1,2)$ 为时间延迟, 满足

$$0\le d_i(t)<+\infty,\ \dot d_i(t)\le\beta_i<1,\ i=1,2 \quad (2)$$

关于系统(1), 设计如下形式的连续时间状态反馈控制律:

$$u(t)=Kx(t), \quad (3)$$

其中 $K\in\mathbf{R}^{p\times n}$ 为一常值矩阵, 是反馈增益. 使得对于给定的 $\gamma>0$, 结果满足 H^∞ 范数界, 即

$$\|z(t)\|\le\gamma\|w(t)\|.$$

将式(3) 代入(1), 得到如下闭环系统:

$$E\dot x(t)=A_Kx(t)+A_dx(t-d_1(t))+B_1w(t)+B_dKx(t-d_2(t)), \quad (4a)$$

$$z(t)=C_Kx(t)+C_dx(t-d_1(t))+D_1w(t)+D_dKx(t-d_2(t)). \quad (4b)$$

其中: $A_K=A+B_2K$, $C_K=C+D_2K$.

为讨论系统(1) 的 H^∞ 鲁棒控制问题和二次稳定问题, 引入如下引理:

引理 1[2]　假设系统(4a) 在零干扰情况下正则、无脉冲模, 则系统(1a) 的解在 $[0,+\infty)$ 上存在, 且无脉冲模和唯一.

由文献[2] 中定理 1, 明显有如下引理成立:

引理 2　如果存在矩阵 $Q>0, R>0$ 和矩阵 P, 使得

$$EP^T=PE^T>0, \quad (5)$$

$$A_KP^T+PA_K^T+\frac{1}{1-\beta_1}A_dP^TQ^{-1}PA_d^T+\frac{1}{1-\beta_2}B_dKP^TR^{-1}PK^TB_d^T+Q+R<0, \quad (6)$$

则系统(4a) 在零干扰情况下是正则、无脉冲模和稳定的. 同时存在可逆矩阵 G 和 H, 使得

$$\bar E=GEH=\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\bar A_K=GA_KH=\begin{bmatrix} A_{K1} & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix},$$

$$\bar P=GPH^{-T}=\begin{bmatrix} \bar P_{11} & \bar P_{12}\\ \bar P_{21} & \bar P_{22}\end{bmatrix}, \quad (7)$$

且 $\bar P_{11}=\bar P_{11}^T>0$, $\bar P_{21}=0$. 其中 P 使得式(5) 和(6) 成立. 此时称系统(1a) 在零干扰下是二次可镇定的.

由引理 2 可证明如下引理成立:

引理 3　如果系统(1a) 在零干扰下是二次可镇定的, 则它是鲁棒可镇定的.

3　主要结论

定理 1　系统(1a) 在零干扰条件下是二次可镇定的当且仅当存在矩阵 $X>0, Q>0, R>0$ 及矩阵 Y, 使得

$$\begin{bmatrix} A_KP^T+PA_K^T+Q+R & A_dP^T & B_dKP^T\\ PA_d^T & -(1-\beta_1)Q & 0\\ PK^TB_d^T & 0 & -(1-\beta_2)R\end{bmatrix}<0 \quad (8)$$

成立, 其中 $P=EX+Y\Phi^T$. 证明略.

定理 2　对给定的 $\gamma>0$, 称系统(1) 关于控制器(3) 在 H^∞ 范数界 γ 条件下是鲁棒可镇定的, 如果存在 $X>0, Q>0, R>0$ 及矩阵 Y 和 M, 使得

$$\begin{bmatrix} AP^T+PA^T+B_2M^T+MB_2^T+Q+R & A_dP^T & B_dM^T & B_1 & PC^T+MD_2^T\\ PA_d^T & -(1-\beta_1)Q & 0 & 0 & PC_d^T\\ MB_d^T & 0 & -(1-\beta_2)R & 0 & MD_d^T\\ B_1^T & 0 & 0 & -\gamma^2I & D_1^T\\ CP^T+D_2M^T & C_dP^T & D_dM^T & D_1 & -I\end{bmatrix}<0 \quad (9)$$

成立. 其中: $P=EX+Y\Phi^T$, $M=PK^T$.

证明　由定理 1 知, 可在式(5) 和(7) 中取

$$P=EX+Y\Phi^T.$$

由于式(9) 成立, 有

$$\begin{bmatrix} A_KP^T+PA_K^T+Q+R & A_dP^T & B_dM^T\\ PA_d^T & -(1-\beta_1)Q & 0\\ MB_d^T & 0 & -(1-\beta_2)R\end{bmatrix}<0.$$

由定理 1 可知, 系统(1a) 在零干扰下是二次可镇定的, 因此式(5) 和(6) 成立, 即系统(1) 在控制器(3) 下是内部渐近稳定的.

下面证明系统(1) 在控制器(3) 下, 对于给定的 $\gamma>0$, 满足 H^∞ 范数界, 即 $\|z(t)\|\le\gamma\|w(t)\|$.

由定理 1 可知, 矩阵对 (E, A_K) 正则, 因此存在可逆矩阵 G 和 H 使得式(7) 成立. 在系统(4a) 中令

$$\bar{A}_d = GA_dH,\ \bar{B}_d = GB_dKH,$$
$$\bar{Q} = GQG^{\mathrm{T}},\ \bar{R} = GRG^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

令
$$\mathbf{S}(t) = H^{-1}x(t), \tag{11}$$

则在零干扰情况下, 式(4a) 可写成

$$E\mathring{\mathbf{S}}(t) = \bar{A}_d\mathbf{S}(t - d_1(t)) + \bar{B}_d\mathbf{S}(t - d_2(t)). \tag{12}$$

取系统(12) 的Lyapunov 函数为

$$V(\mathbf{S}) = \mathbf{S}_1^{\mathrm{T}}(t)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{11}^{-1}\mathbf{S}_1(t) + \int_{d_1(t)}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\mathbf{S}(s)\mathrm{d}s + \int_{d_2(t)}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(s)\bar{P}^{-1}\bar{R}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\mathbf{S}(s)\mathrm{d}s, \tag{13}$$

则Lyapunov 函数$V(\mathbf{S})$ 沿系统(12) 轨线的全导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{S}) \leq\ & 2\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{A}_K\mathbf{S}(t) + 2\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{A}_d\mathbf{S}(t - d_1(t)) + 2\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{B}_d\mathbf{S}(t - d_2(t)) + {}\\ & \mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}^{-1}\bar{R}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\mathbf{S}(t) - {}\\ & (1 - \beta_1)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t - d_1(t))\bar{P}^{-1}\bar{Q}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\mathbf{S}(t - d_1(t)) - (1 - \beta_2)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(t - d_2(t))\bar{P}^{-1}\bar{R}\bar{P}^{-\mathrm{T}}\mathbf{S}(t - d_2(t)).\end{aligned} \tag{14}$$

将式(7), (10) 和(11) 代入(14), 并令

$$\xi^{\mathrm{T}}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t)P^{-1}\quad x^{\mathrm{T}}(t - d_1(t))P^{-1}\quad x^{\mathrm{T}}(t - d_2(t))P^{-1}], \tag{15}$$

则有

$$\dot{V}(\mathbf{S}) \leq \xi^{\mathrm{T}}(t) \times \begin{bmatrix} A_KP^{\mathrm{T}} + PA_K^{\mathrm{T}} + Q + R & A_dP^{\mathrm{T}} & b_dKP^{\mathrm{T}} \\ PA_d^{\mathrm{T}} & -(1 - \beta_1)Q & 0 \\ PK^{\mathrm{T}}B_d^{\mathrm{T}} & 0 & -(1 - \beta_2)R \end{bmatrix} \times \xi(t) \triangleq \dot{V}_a(\xi). \tag{16}$$

在零初始条件下, 对于给定的$\gamma > 0$, 令

$$J = \int^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)]\mathrm{d}t \tag{17}$$

因为$x(0) = 0$, 所以$\mathbf{S}(0) = 0$, $V(\mathbf{S}(0)) = 0$, 从而, 对任意非零的$w(t) \in L_2[0, +\infty)$, 有

$$\begin{aligned}J =\ & \int^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t) + \mathring{V}(\mathbf{S})]\mathrm{d}t - V(\mathbf{S}(\infty)) \leq\\ & \int^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t) + \mathring{V}_a(\xi)]\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{18}$$

将式(16) 代入(18), 并令

$$y^{\mathrm{T}}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t)P^{-1}\quad x^{\mathrm{T}}(t - d_1(t))P^{-1}\quad x^{\mathrm{T}}(t - d_2(t))P^{-1}\quad w^{\mathrm{T}}(t)], \tag{19}$$

则有
$$J \leq \int^{\infty}y^{\mathrm{T}}(t)Zy(t)\mathrm{d}t \tag{20}$$

其中

$$Z = \begin{bmatrix} \Theta & A_dP^{\mathrm{T}} + PC_K^{\mathrm{T}}C_dP^{\mathrm{T}} & B_dM^{\mathrm{T}} + PC_K^{\mathrm{T}}D_dM^{\mathrm{T}} & B_1 + PC_K^{\mathrm{T}}D_1 \\ PA_d^{\mathrm{T}} + PC_d^{\mathrm{T}}C_KP^{\mathrm{T}} & -(1 - \beta_1)Q + PC_d^{\mathrm{T}}C_dP^{\mathrm{T}} & PC_d^{\mathrm{T}}D_dM^{\mathrm{T}} & PC_d^{\mathrm{T}}D_1 \\ MD_d^{\mathrm{T}}C_KP^{\mathrm{T}} + MB_d^{\mathrm{T}} & MD_d^{\mathrm{T}}C_dP^{\mathrm{T}} & -(1 - \beta_2)R + MD_d^{\mathrm{T}}D_dM^{\mathrm{T}} & MD_d^{\mathrm{T}}D_1 \\ D_1^{\mathrm{T}}C_KP^{\mathrm{T}} + B_1^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}}C_dP^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}}D_dM^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I + D_1^{\mathrm{T}}D_1 \end{bmatrix},$$

$\Theta = A_KP^{\mathrm{T}} + PA_K^{\mathrm{T}} + Q + K^{\mathrm{T}}RK + PC_K^{\mathrm{T}}C_KP^{\mathrm{T}}$, $M = PK^{\mathrm{T}}$.

由Schur 变换方法可知, 式(12) 成立等价于$Z < 0$, 所以由式(17) 可知$\|z(t)\| \leq \gamma\|w(t)\|$. 因此系统(1) 满足$H^{\infty}$范数界$\gamma$. □

由定理2 可知, 在式(9) 成立的情况下, 可以得到系统(1) 的控制律为

$$K = M^{\mathrm{T}}P^{-\mathrm{T}} = M^{\mathrm{T}}(EX + Y\Phi^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}}. \tag{21}$$

4 算 例

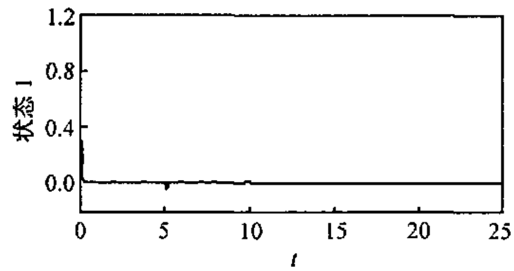
考虑如下连续时间时滞系统:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathring{x}(t) =\ & \begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\ -1 & 2\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}x(t - d_1(t)) + {}\\ & \begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}w(t) + \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}0.3\\ 0.2\end{bmatrix}u(t - d_2(t)),\end{aligned}$$

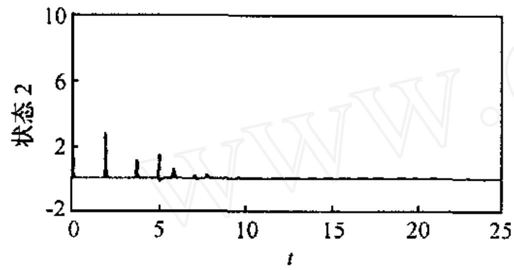
$$\begin{aligned}z(t) =\ & [1\quad 0]x(t) + [-1\quad 0.3]x(t - d_1(t)) + 0.1w(t) + 2u(t) + 0.5u(t - d_2(t)),\\ \gamma =\ & 1,\ d_1(t) = 2 + 0.2\cos t,\\ d_2(t) =\ & 5 + 0.2\sin 3t\end{aligned}$$

由于rank $E = 1$, 可取$\Phi = [0\quad 1]^{\mathrm{T}}$. 由式(9) 及变量的替换, 以及Matlab 中的LMI toolbox 可解出连续时间状态反馈为

$$K = M^{\mathrm{T}}(EX + Y\Phi^{\mathrm{T}})^{-\mathrm{T}} = [-17.5602\quad -0.1072].$$



(a)　状态 1



(b)　状态 2

图 1　仿真曲线

在该反馈下, 由约束方程可知状态 2 可由状态 1 表示 因此, 在取初值 $x_1(0) = 1$ 时, 系统状态的仿真曲线如图 1 所示

5　结　　语

本文主要考虑了具有状态及输入时滞的奇异系统 H^{∞} 鲁棒控制问题, 给出了 H^{∞} 状态反馈控制器的设计方案 该方案可通过解一个 LMI 来实现 状态反馈 H^{∞} 控制器不仅保证了闭环系统的二次稳定性, 而且保证了在一个正数 γ 条件下的 H^{∞} 范数界

参考文献(References):

[1] Jong Hac Kim, Hong Bac Park. H^{∞} state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system [J]. *Automatica*, 1999, 35(5): 1443-1451.

[2] Xu Shengyuan, Paul Van Dooren, Stefan, et al. Robust stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122-1128.

[3] Izumi Masubuchi, Yoshiyuki Kamitane, Atsumi Ohara, et al. H^{∞} control for descriptor systems: A matrix inequalities approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669-673.

[4] 徐胜元, 牛玉刚, 杨成梧 参数不确定性系统的鲁棒 H^{∞} 控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(3): 397-400.
(Xu S Y, Niu Y G, Yang C W. Robust H^{∞} control for singular systems with parameter uncertainty [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3): 397-400.)

[5] 马树萍, 程兆林 线性奇异系统的 H^{∞} 控制问题: 状态反馈情形[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(4): 513-518.
(Ma S P, Cheng Z L. State feedback H^{∞} control design problem for linear singular systems[J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(4): 513-518.)

(上接第 341 页)

5　基于双时钟的 CDMA 移动通信网络的拥塞软处理方法的特点

1) 在 CDMA 移动通信系统中, 根据上行链路 SIR 与 SIR_{req} 比较结果, 确定移动网络的运行情况, 对呼叫采取不同的处理 当系统发生拥塞时, 通过拦截优先级较低的呼叫, 同时启动控制时钟, 达到对移动通信网络拥塞缓解的目的

2) 通过设定两个时钟 T_1 和 T_2, 使得移动网络的拥塞及时得到缓解, 尤其当移动网络某局部出现严重拥塞时, 时钟 T_2 的设定为尽快解除拥塞起了关键作用, 可见该控制方法具有一定的完善性

3) 该控制模型作用于基站, 能够保证缓解拥塞时间短、呼叫等待时间短和呼损率低的特点, 尤其在高峰期能有效及时地解除拥塞, 具有现实意义

4) 该控制方法将预防式控制与反应式控制方法相结合, 简单方便, 易于实现

参考文献(References):

[1] Zhao Liu, Magda El Zarki SIR-based call control for DS-CDMA cellular systems[J]. *IEEE J Select Areas in Commun*, 1994, 12(8): 638-644.

[2] Zander J. Performance of optimal power control in cellular radio systems[J], *IEEE Trans on Veh Tech*, 1992, 20(1): 621- 627.

[3] 杜栓义, 文成义, 李赞, 等 第三代移动通信系统[M]. 北京: 电子工业出版社, 2001.

[4] Jmt-shyr wu, Jrn-Kung Chung, Bor-Jiunn Hwang. Multi-channel assignment schemes and handoff study in CDMA cellular systems [J], *Wireless Personal Communications*, 2001, 18(9): 67-78.

[5] Xilin Chen. Modern communications theory [D], Beijing: Ei Publishe Company of Beijing, 1999. 100-140.