

文章编号: 1001-0920(2004)03-0247-05

## $\mu$ 分析的线性矩阵不等式方法及其优化算法

富饶, 杨莹, 黄琳

(北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

**摘要:** 通过采用  $s$ -过程和投影引理, 得到了结构奇异值上界的 LM I 判据。该判据是基于状态空间描述的, 从而消除了频率扫描过程和频率响应曲线拟合过程, 并具有较好的数值性态。以该判据为基础, 给出了计算结构奇异值上界的优化投影迭代算法, 并将该方法应用于基准测试系统和典型电力系统, 以验证其有效性。数值结果表明, 该方法与经典频域方法和状态空间方法相比具有更好的求解效率。

**关键词:** 结构奇异值; 线性矩阵不等式; 半正定规划

**中图分类号:** TP13

**文献标识码:** A

### Optimized LM I algorithm for $\mu$ analysis

FU Rao, YANG Ying, HUANG Lin

(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China Correspondent: FU Rao, Email: rao.fu@water.pku.edu.cn)

**Abstract:** By using  $s$ -procedure and projection lemma, new  $\mu$  upper bounds for a dynamic system are derived in terms of LM Is. Since the approach bases on state-space, it requires no frequency sweep and frequency response curve fitting and therefore has a better numerical property. Based on this result, a specially optimized projective iteration algorithm for computing the  $\mu$  upper bound is derived. To demonstrate the effectiveness, this approach is applied to benchmark system and typical power system. Numerical simulation results of this approach are compared with those of classical frequency domain and state methods.

**Key words:** structured singular value; linear matrix inequality; semidefinite programming

### 1 引言

自从文献[1, 2]提出结构奇异值( $\mu$ )理论以来, 由于其广泛的适用性及其可以精确地处理具有混合不确定性系统的鲁棒分析与综合问题, 一直是鲁棒控制理论研究中的重点<sup>[3, 4]</sup>。但是, 基于频域的研究方法都必不可少地需要有频率扫描过程, 这便导致了计算量的增加, 而且在  $\omega\mu$  曲线不连续的情况下很难得到准确结果。针对这些不足, 人们提出了一些极具发展潜力的新的研究方向。文献[5, 6]分别提出了基于 NM I (Nonlinear Matrix Inequality) 和 BM I (Bilinear Matrix Inequality) 的  $\mu$  方法, 但迄今为

止, BM I 和 NM I 的数值算法还远未成熟。文献[7]给出了基于 LM I 的  $\mu$  分析方法, 该方法是基于状态空间描述的, 不需要频率扫描过程, 同时该方法具有良好的数值性态(多项式时间复杂度), 这使得该方法能够更加有效地处理实际控制工程中的问题。文献[8]考虑了该方法在电力系统中的具体应用, 并从数值计算的角度考虑了对算法的优化。

文献[9, 10]提出并予以完善的  $s$ -过程作为一种处理非凸优化的有效手段, 对于带有非负定二次型约束的半正定规划问题, 采用  $s$ -过程可将该非凸优化问题转换成凸优化问题而不过多地引入保守性。

收稿日期: 2003-01-24; 修回日期: 2003-04-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272001); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020302)。

作者简介: 富饶(1971—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 博士生, 从事  $\mu$  分析与综合理论、控制理论中的数值方法等研究; 黄琳(1935—), 男, 江苏扬州人, 教授, 博士生导师, 从事稳定性理论与应用、鲁棒控制等研究。

本文在文献[7, 8]的基础上,采用  $s$ -过程方法将文献[7, 8]中 LM I 形式的判据简化,给出了形式较为简单的基于 LM I 的  $\mu$  分析方法;以文献[7, 8]中的数值模型与优化算法为基础,给出了该方法的数值算例,并对数值结果与经典频域方法和状态空间方法<sup>[3,7]</sup>的结果进行了比较

## 2 预备知识与问题描述

### 2.1 预备知识

本文采用 MATLAB 符号  $[x; y]$  表示将矩阵  $y$  的行向量附加在矩阵  $x$  的行向量之后所形成的矩阵,其中  $x$  和  $y$  具有相同的列数  $\mathbf{S}_n, \mathbf{G}$  和  $\mathbf{P}_n$  分别表示  $\mathbf{R}^{n \times n}$  中的对称矩阵、反对称矩阵和正定矩阵子空间. 对适当阶数方阵  $G, \text{He}G = G + G^T$ .  $A_{m \times n} (0_{m \times n}, 1_{m \times n})$  表示  $m$  行  $n$  列的实矩阵(0-矩阵, 1-矩阵).  $\text{diag}_{i=1}^n A_i$  表示矩阵  $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . 其他符号定义参见文献[7].

**引理 1<sup>[11]</sup>** 对给定矩阵  $G = G^T \in \mathbf{R}^{n \times n}, U \in \mathbf{R}^{n \times p}, V \in \mathbf{R}^{n \times q}$ , 以下命题等价:

- 1) 存在  $X \in \mathbf{R}^{p \times q}$  满足  $\text{He}(UXV^T) + G > 0$ ;
- 2)  $U^T G U > 0, V^T G V > 0$

### 2.2 问题描述

本文研究的  $\mu$  控制问题可描述为: 对给定不确定量集合  $U, \mathcal{Y} \in \mathbf{R}_+$  及广义标称系统  $G(s)$

**RH**, 判断频域条件

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_U(G(j\omega)) < \mathcal{Y} \quad (1)$$

是否满足. 其中  $G(s)$  有以下状态空间实现:

$$G(s) \sim \begin{bmatrix} A_{l \times l} & B_{l \times m} \\ C_{m \times l} & D_{m \times m} \end{bmatrix}$$

不确定量集合  $U$  和结构奇异值  $\mu_U(G)$  分别定义如下:

**定义 1<sup>[11]</sup>** 给定非负整数  $l_r, l_u$  及非负整数数组

$\{k_1^r, \dots, k_{l_r}^r\}, \{k_1^u, \dots, k_{l_u}^u\}$ , 其中  $\sum_{i=1}^{l_r} k_i^r + \sum_{i=1}^{l_u} k_i^u = m$ . 不确定量集合  $U \subset \mathbf{C}^{m \times m}$  定义为

$$U = \{\text{diag}(r_1 I_{k_1^r}, \dots, r_{l_r} I_{k_{l_r}^r}, \Delta_1, \dots, \Delta_{l_u}) \mid r_i \in \mathbf{R}, |r_i| \leq 1, i = 1, \dots, l_r; \Delta_j \in \mathbf{C}^{k_j^u \times k_j^u}, \overline{\sigma}(\Delta_j) \leq 1, j = 1, \dots, l_u\} \quad (2)$$

并记:  $U_r = U|_{k_i^r=0}, U_u = U|_{k_i^u=0}$

**定义 2<sup>[11]</sup>** 对给定常值复矩阵  $G \in \mathbf{C}^{m \times m}$  和不确定量集合  $U$ , 结构奇异值  $\mu_U(G)$  定义为

$$\mu_U(G) = \{\inf_{\Delta \in U} \mathcal{Y} \mid \mathcal{Y} > 0, \det(\mathcal{Y} - G\Delta) = 0, \forall \Delta \in U\}$$

## 3 $\mu$ 分析的线性矩阵不等式方法

直接根据定义 2 很难判断式(1) 是否成立. 文献[7]采用正实引理和 Multi-Convexity 假定将频域中的  $\mu$  分析问题(1) 转化为 LM I 可行解的存在性问题, 但该条件不适于处理  $U$  结构比较复杂的情况(包含有  $2^{l_r} + l_r$  个 LM I). 本文在文献[7] 的基础上, 采用  $s$ -过程得到以下充分性 LM I 判据:

**引理 2** 对于式(2) 给定的  $U, \mathcal{Y} \in \mathbf{R}_+$  及  $G(s)$ , 式(1) 成立当且仅当对  $\forall \Delta_r \in U_r$  存在  $X \in \mathbf{X}$  满足

$$\text{He}(M X N^T) + L L^T > 0 \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \{\text{diag}(P, Q, Q) \mid P \in \mathbf{S}_{l_r}, Q \in \mathbf{Q}_{l_u}\}, \\ \mathbf{Q} &= \{\text{diag}(q_1 I_{k_1^u}, \dots, q_{l_u} I_{k_{l_u}^u}) \mid q_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, l_u\}, \\ M &= - \begin{bmatrix} A & B T_c & 0 \\ C & D T_c & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} I & B T_c & 0 \\ 0 & D T_c & 0 \\ 0 & 0 & -I_r \end{bmatrix}, \\ L &= L_r \Delta_r + L_u, L_r = \begin{bmatrix} B \\ D \\ 0 \end{bmatrix}, L_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathcal{Y} \\ T_c^T \end{bmatrix}, \\ T_c &= \begin{bmatrix} 0_{(m-k) \times k} \\ I_k \end{bmatrix}, k = \sum_{i=1}^{l_u} k_i^u \end{aligned}$$

**证明** 由文献[7] 可知, 式(1) 成立当且仅当对  $\forall \Delta \in U$  存在  $P \in \mathbf{S}_{l_r}, U \in \mathbf{R}^{m \times l}, V \in \mathbf{R}^{m \times m}$  满足

$$\text{He}X_r(\Delta) > 0 \quad (4)$$

其中

$$X_r(\Delta) = \begin{bmatrix} B \Delta U - A P & B \Delta V \\ (D \Delta - \mathcal{Y})U - C P & (D \Delta - \mathcal{Y})V \end{bmatrix}$$

易知对  $\forall \Delta \in U$  有  $\Delta = \Delta_r + T_c \Delta_u T_c^T, \Delta_r \in U_r, \Delta_u \in U_u$ , 即

$$\begin{aligned} \text{He}X_r(\Delta) &= \\ \text{He}X_r(\Delta_r) &+ \text{He} \left[ \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} T_c \Delta_u T_c^T \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

采用  $s$ -过程<sup>[12]</sup> 易证式(4) 成立当且仅当对  $\forall \Delta_r \in U_r$  存在  $P \in \mathbf{S}_{l_r}, U \in \mathbf{R}^{m \times l}, V \in \mathbf{R}^{m \times m}, Q \in \mathbf{Q}_{l_u}$  满足

$$\begin{aligned} &\left[ \text{He}X_r(\Delta_r) - \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} T_c Q T_c^T \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix}^T T_c \right] = \\ &\text{He} \left[ \begin{bmatrix} P & & \\ & Q & \\ & & Q \end{bmatrix} N^T + L \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right] > 0 \quad (5) \end{aligned}$$

其中  $Q = Q/2$ .  $\mathbf{Q}$  对式(5) 中的  $U$  和  $V$  项应用引理 1, 则由 Finsler 引理<sup>[12]</sup> 有式(3) 成立

引理 2 中的乘子  $X$  依赖于(参数) 不确定量  $\Delta$ .

的选取,因而  $R$ -LM I 条件(3) 难于直接验证 参考文献[13],可假定  $X$  为  $\Delta_r$  的仿射线性函数,即

$$X(\Delta_r) = X_0 + r_1 X_1 + \dots + r_l X_l, \quad X_0, X_i \in \mathbf{X}, i = 1, \dots, l \quad (6)$$

由该假定及以下引理可得式(3) 成立的充分条件:

**引理 3** 给定  $U$  如式(2) 及适当维数实矩阵  $T_1 = T_1^T, T_2, T_3, T_4$ , 如存在  $T$  满足

$$H^T T H \succ 0, \forall \Delta \in U, \quad (7)$$

且

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix}^T \succ 0, \quad (8)$$

则有

$$T_1 + \text{He}(T_2 \Delta (I - T_4 \Delta)^{-1} T_3) \succ 0, \quad \forall \Delta \in U. \quad (9)$$

其中  $H = \begin{bmatrix} (I - \Delta^T T_4^T)^{-1} \Delta^T T_2^T \\ (I - T_4^T \Delta)^{-1} T_2^T \end{bmatrix}$

**证明** 对  $\forall \Delta \in U$  及适当维数矢量  $u$  定义

$$p = (I - \Delta^T T_4^T)^{-1} \Delta^T T_2^T u,$$

$$q = (I - T_4^T \Delta)^{-1} T_2^T u.$$

易证  $p$  和  $q$  满足  $q = T_2^T u + T_4^T p$ , 由式(7) 有

$$u^T H^T T H u = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \succ 0 \quad (10)$$

由式(8) 有

$$\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \succ 0$$

考虑到式(10), 则有

$$\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = u^T (T_1 + \text{He}(T_2 \Delta (I - T_4 \Delta)^{-1} T_3)) u \succ 0$$

即有式(9) 成立

**定理 1** 给定  $U$  如式(2),  $\mathcal{Y} \in \mathbf{R}^+$  及  $G(s)$ , 令  $a = l + m + k$ , 如存在  $X_0, X_i \in \mathbf{X}, S_i \in \mathbf{S}^a, R_i \in \mathbf{P}^a, G_i \in \mathbf{G}, i = 1, \dots, l$ , 满足  $R_i + S_i \succ 0$  及

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{31}^T & H_{32} & \dots & H_{3l}^T \\ H_{31} & H_{41} & 0 & \dots & 0 \\ H_{32} & 0 & H_{42} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{3l} & 0 & 0 & \dots & H_{4l} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (11)$$

则有式(1) 成立 其中:  $H_{11} = \text{He}(M X \Delta N^T) + \sum_{i=1}^l R_i + L L_u^T, H_{3i} = M X N^T + G_i + L L_u^T, H_{4i} = \text{He} D_i -$

$S_i, D_i = L L_i^T / 2, L_i = L_r \Delta_r |_{r_j = \delta_{ij}}, \Delta_r \in U, r_i, i, j = 1, \dots, l$   
证明 已知

$$L = L_r \Delta_r + L_u = \sum_{i=1}^l (r_i L_i) + L_u$$

注意到  $L L_j^T = 0 (i, j = 1, \dots, l, i \neq j)$ , 则由式(6), 式(3) 可表示成

$$\text{He}(M X N^T) + L L^T = T_1 + \text{He}(T_2 \tilde{\Delta} (I - T_4 \tilde{\Delta})^{-1} T_3).$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{He}(M X \Delta N^T) + L L_u^T, \\ T_2 &= [T_2^1 \quad T_2^2 \quad \dots \quad T_2^l], \\ T_2^i &= [I \quad 0], T_3 = [T_3^1; T_3^2; \dots; T_3^l], \\ T_3^i &= [M X N^T + L L_u^T; I], \\ T_4 &= \text{diag}(T_4^1, T_4^2, \dots, T_4^l), \\ T_4^i &= [0 \quad D_i; 0 \quad 0], \\ \tilde{\Delta} &= \text{diag}(r_1 I_{2a}, r_2 I_{2a}, \dots, r_l I_{2a}). \end{aligned}$$

即式(3) 等价于判断

$$T_1 + \text{He}(T_2 \tilde{\Delta} (I - T_4 \tilde{\Delta})^{-1} T_3) \succ 0, \forall \tilde{\Delta} \in \tilde{U}$$

其中

$$\tilde{U} = \{ \text{diag}(r_1 I_{2a}, r_2 I_{2a}, \dots, r_l I_{2a}) \mid r_i \in \mathbf{R}, |r_i| \leq 1, i = 1, \dots, l \}$$

应用引理 3, 构造矩阵乘子

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} S & G \\ G^T & R \end{bmatrix}, S \in \mathbf{S}^{\tilde{U}}, R \in \mathbf{R}^{\tilde{U}}, G \in \mathbf{G}; \\ \mathbf{S}^{\tilde{U}} &= \{ \text{diag}(S_1, \dots, S_l) \mid S_i \in \mathbf{S}^{2a}, i = 1, \dots, l \}; \\ \mathbf{R}^{\tilde{U}} &= \{ \text{diag}(R_1, \dots, R_l) \mid R_i \in \mathbf{P}^{2a}, i = 1, \dots, l \}; \\ \mathbf{G} &= \{ \text{diag}(G_1, \dots, G_l) \mid G_i \in \mathbf{G}^{2a}, i = 1, \dots, l \}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} S_i &= [S_{11i} \quad S_{12i}; S_{12i}^T \quad 0], S_{11i} \in \mathbf{S}^a; \\ R_i &= [R_{11i} \quad R_{12i}; R_{12i}^T \quad 0], R_{11i} \in \mathbf{P}^a; \\ G_i &= [G_{11i} \quad -I; I \quad G_{22i}], G_{11i} \in \mathbf{G}, i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

且满足

$$D_i G_{22i} = S_{12i}, D_i R_{12i}^T = G_i, R_i + S_i \succ 0, i = 1, \dots, l \quad (12)$$

则对  $\forall \Delta \in \tilde{U}$  有式(7) 成立 将  $T$  带入式(8) 即可得式(11), 其中:  $S_i = S_{11i}, R_i = R_{11i}, G_i = -D_i R_{12i}^T - C_{11i}$ , 由引理 3 定理得证

当对精度要求不高或问题规模较大时, 可对矩阵乘子  $T$  的结构进一步附加约束(同时也会带来一定的保守性), 得到定理 1 的简化形式:

**推论 1** 给定  $U$  如式(2),  $\mathcal{Y} \in \mathbf{R}^+$  及  $G(s)$ , 如存在  $X_0, X_i \in \mathbf{X}, R_i = \text{diag}(R_{1i}, R_{2i}), R_{1i} \in \mathbf{P}^{l+m}, R_{2i} \in \mathbf{P}^{2a}, i = 1, \dots, l$

$\mathbf{P}_{k,i} \in \mathbb{L}$  及  $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ , 满足式(11) 及  $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \eta \end{bmatrix} \succ 0$ , 则有式(1) 成立, 其中

$$H_{11} = \text{He}(MX\alpha N^T) - \sum_{i=1}^{l_r} R_i + \tilde{H}_{11},$$

$$\tilde{H}_{11} = \begin{bmatrix} 0_i & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}I - \mathcal{N}cT^T & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mathcal{Y}\eta)I_m \end{bmatrix},$$

$$H_{3i} = MX\alpha N^T + L L_u^T,$$

$$H_{4i} = \text{He}D_i + R_i, i \in \mathbb{L}$$

### 4 $\mu$ 分析优化算法

判据(11) 可化成如下一般形式 LM I

$$\text{He}(A \mathbf{L}(x)B^T) \succ 0, i \in \mathbb{L} \quad (13)$$

其中:  $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p}$  和  $B_i \in \mathbb{R}^{m_i \times q}$  为已知,  $x \in \mathbb{R}^r$  为优化变量, 线性算子  $\mathbf{L}: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$  将  $\mathbb{R}^r$  映射到  $\mathbb{R}^{p \times q}$  中的  $r$  维线性子空间,  $\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \mathbf{I}$ ;  $A_i, B_i$  及  $\mathbf{L}$  的具体形式可由判据(11) 确定, 定义线性算法  $\epsilon$  为

$$x \mapsto \text{diagHe}_{i=1}^n(A \mathbf{L}(x)B^T),$$

则判据(11) 等价于判断  $S$  中  $r$  维线性子空间  $\text{Im} \epsilon = \{\epsilon(x) \mid x \in \mathbb{R}^r\}$  与正定矩阵锥  $\mathbf{P}$  是否存在交集 该问题可采用投影迭代法<sup>[14]</sup> 判断: 给定  $X_{(0)} = I$ , 设已知  $X_{(k)} \succ 0$ , 则有

$$X_{(k+1)} = \left( \frac{(2 + \rho)X_{(k)}^{-1}}{1 + \rho} - \frac{X_{(k)}^{-1/2} \mathbf{F}(x_{(k)}) X_{(k)}^{-1/2}}{1 + \rho} \right)^{-1}.$$

其中

$$\rho = \max_{i \in \mathbb{L}} |\lambda(\mathbf{F}(x_{(k)}) - I)|, \quad (14a)$$

$$\mathbf{F}(x) = X_{(k)}^{-1/2} \epsilon(x) X_{(k)}^{-1/2}, \quad (14b)$$

$$x_{(k)} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^r} \|\mathbf{F}(x) - I\|_F. \quad (14c)$$

当  $x_{(k)}$  满足  $\|\mathbf{F}(x_{(k)}) - I\|_F < 1$  时, 可知  $\text{Im} \epsilon$  与  $\mathbf{P}$  存在非空交集 当  $X_{(k)}^{-1}$  大于给定上界时迭代终止 ( $\text{Im} \epsilon$  与  $\mathbf{P}$  的交集为空).

参考文献[8], 本文采用共轭梯度法求解(14c), 考虑到线性算子  $\epsilon$  的分块结构, 可令  $X_{(k)} =$

$\text{diag}_{i=1}^n X_{(k)}^i$ , 则有

$$\mathbf{F}(x) = \text{diag}_{i=1}^n \text{He} \left( (X_{(k)}^i)^{-1/2} A_i \mathbf{L}(x) \left( (X_{(k)}^i)^{-1/2} B_i \right)^T \right),$$

$$\mathbf{F}^T(y) = \mathbf{L}^T \left[ \sum_{i=1}^n \left( \left( (X_{(k)}^i)^{-1/2} A_i \right)^T \text{He}(y) \left( (X_{(k)}^i)^{-1/2} B_i \right) \right) \right]. \quad (15)$$

由式(15) 即可构造相应的共轭梯度算法 数值结果

表明, 对于式(11) 该方法比正交分解方法具有更好的求解效率

### 5 数值算例

分别采用  $G$ - $D$  乘子方法<sup>[3]</sup>、LM I方法<sup>[7]</sup> 和推论 1 计算文献[7] 所给算例和文献[8] 中所用电力系统模型(包括开环系统, AVR + PSS 和  $\mu$  控制器闭环系统) 的  $\mu$  上界 表1 为系统  $\mu$  上界和平均 CPU 时间 (P4 1.5G, 512MB, RH Linux 7.0, MAT LAB 6.0 for Linux), 图 1~ 图 4 分别给出了系统的  $\omega$ - $\mu$  曲线

表 1  $\mu$  上界( $\bar{\mu}$ ) 和平均 CPU 时间(t)

Problem		文献[3]	文献[7]	推论 1
Benchmark <sup>[7]</sup>	$\bar{\mu}$	3 073.9	3 074.7	3 074.6
	t	131.248 s	12.536 s	10.983 s
开环系统 <sup>[8]</sup>	$\bar{\mu}$	1.294.5	1.312.2	1.318.3
	t	3.640 s	98.2 s	61.1 s
AVR + PSS <sup>[8]</sup>	$\bar{\mu}$	1.273.2	1.305.4	1.298.9
	t	4.460 s	124 s	68.6 s
$\mu$ 控制器 <sup>[8]</sup>	$\bar{\mu}$	0.979.6	0.985.1	0.984.7
	t	3.820 s	106 s	62.1 s

数值算例表明, 本文提出的  $\mu$  上界判据(定理 1 或推论 1) 与文献[3, 7] 中的结果具有相似的精确度, 但与频域方法<sup>[3]</sup> 相比, 判据定理 1 或推论 1 是基于状态空间描述的, 因而不再需要频率扫描过程, 且 LM I 判据(11) 的规模为  $O(al)$  (文献[7] 所给判据为  $O(2^l a)$  复杂度), 从而该判据与优化 LM I 算法结合使用可以处理  $U$  结构比较复杂的情况

由图 1~ 图 4 可知, 开环系统的  $\bar{\mu}$  值大于 1 ( $\bar{\mu} = 1.318.3$ ), 说明开环系统在给定的扰动作用下不是鲁棒稳定的 扰动量至少缩减到  $1/\bar{\mu} = 0.758.6$  以后才能保证系统鲁棒稳定 从  $\mu$  曲线分析可知, AVR + PSS 控制器的控制效果并不比手动控制(开环系统) 效果好 ( $\bar{\mu} = 1.298.9$ ), 但 AVR + PSS 控制器使系统的  $\mu$  曲线的光滑性更好 大量数值算例表明, 具有较平坦的  $\mu$  曲线的系统, 通常具有更好的鲁棒性

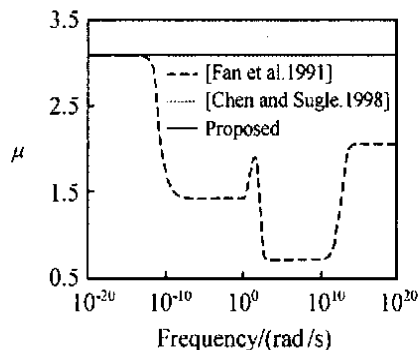


图 1  $\mu(G)$  上界(Benchmark 系统<sup>[7]</sup>)

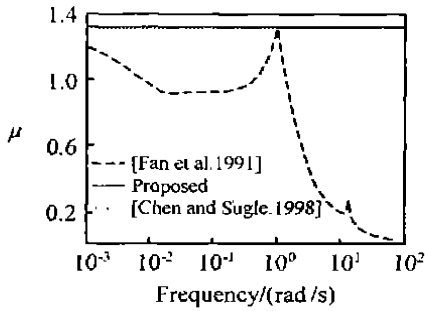


图 2  $\mu(G)$  上界(开环系统<sup>[81]</sup>)

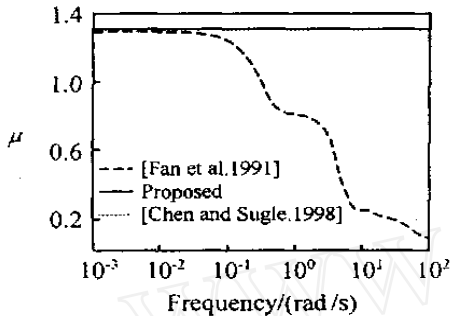


图 3  $\mu(G)$  上界(AVR + PSS 闭环系统<sup>[81]</sup>)

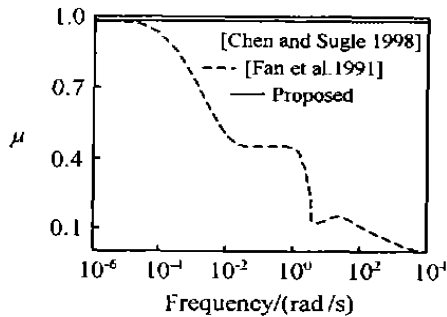


图 4  $\mu(G)$  上界( $\mu$  控制器闭环系统<sup>[81]</sup>)

$\mu$  控制器能显著降低系统的  $\mu$  值 ( $\bar{\mu} = 0.9847$ ), 即增强系统的鲁棒性, 使上述系统在给定的扰动作用下都能达到稳定

## 6 结 论

本文提出了一个新的基于 LM I 的混合  $\mu$  分析方法, 通过采用  $S$ -过程, 将  $R$ -LM I 形式的判据简化, 得到了可验证的基于 LM I 的混合  $\mu$  分析判据. 通过对现有 LM I 形式的  $\mu$  分析的投影迭代算法进行优化, 给出了基于大规模稀疏 LM I 算法的  $\mu$  鲁棒分析方法. 数值结果表明, 该方法与经典频域方法和状态空间方法相比具有更好的求解效率.

## 参考文献(References):

[1] Doyle J C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties [J]. *Proc of IEE, Part D*,

1982, 129(1): 240-250  
 [2] Safonov M G. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems [J]. *Proc of IEE, Part D*, 1982, 129(1): 251-256  
 [3] Fan M K H, Tits A L, Doyle J C. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(1): 25-38  
 [4] Gary J Balas, John C Doyle, Keith Glover, et al.  *$\mu$  Analysis and Synthesis Toolbox* [M]. Minneapolis: The MUSYN Inc and the MathWorks Inc, 1998  
 [5] Collins E G, Sadhukhan D, Watson L T. Robust controller synthesis via non-linear matrix inequalities [J]. *Int J of Control*, 1999, 72(11): 971-980  
 [6] Safonov M G, Goh K C, Ly J H. Control system synthesis via bilinear matrix inequalities [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. New York: IEEE, 1994. 45-49  
 [7] Chen G, Sagle T.  $\mu$ -Analysis and synthesis of state feedback systems based on multipliers and LM I [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. New York: IEEE, 1998. 537-541.  
 [8] Fu Rao, Huang L in. Optimized LM I algorithm for  $\mu$  analysis and synthesis with application in power system [J]. *Proc of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 2002, 22(10): 7-11.  
 [9] Aizeman M A, Gantmacher F R. *Absolute Stability of Regulator Systems* [M]. San Francisco: Holden-Day, 1964  
 [10] Yakubovich V A. The  $S$ -procedure in non-linear control theory [J]. *Vestnik Leningrad Univ Math*, 1977, 4: 73-93  
 [11] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general  $H$  control problem: LM I existence conditions and state space formulas [J]. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307-1317.  
 [12] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994  
 [13] Pascal Gahinet, Pierre Apkarian, Mahmoud Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov function and real parameter uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 436-442  
 [14] Arkadii Nemirovskii, Pascal Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. New York: IEEE, 1994. 840-844