

文章编号: 1001-0920(2004)04-0416-04

基于 LM I 的一类非线性时滞关联大系统的分散模糊控制

韩安太, 王树青

(浙江大学 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 针对一类采用 Takagi-Sugeno 模糊模型描述的非线性时滞关联大系统, 研究其分散模糊状态反馈控制器设计问题; 利用 Lyapunov 稳定性分析理论和线性矩阵不等式等工具, 得到了闭环系统的可镇定条件和相应的分散模糊状态反馈控制器; 在此基础上, 通过求解具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 给出了具有较小反馈增益的分散模糊控制器设计方法

关键词: 模糊控制; 分散控制; 时滞; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Decentralized fuzzy control for a class of nonlinear interconnected large-scale systems with time-delay based on LM I approach

HAN An-tai, WANG Shu-qing

(Institute of Advanced Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China Correspondent: HAN An-tai, E-mail: ncs1@zjuem.zju.edu.cn)

Abstract: The problem of decentralized fuzzy state-feedback controller design for a class of nonlinear interconnected large-scale systems with control and state time-delay is considered based on the Takagi-Sugeno fuzzy models. The stabilizing conditions of closed-loop fuzzy system are obtained and the decentralized fuzzy state-feedback controller is designed through Lyapunov stability analysis theory and linear matrix inequality respectively. Based on that, a convex optimization problem with LM I constraints is formulated to design a decentralized fuzzy state-feedback controller with smaller gain parameters which can stabilize the controlled system.

Key words: fuzzy control; decentralized control; time-delay; linear matrix inequality

1 引 言

关联动态大系统在现实生活中普遍存在, 如动力系统、网络系统等。在过去的 30 多年里, 许多学者研究了关联系统的属性并提出了各种镇定线性关联大系统的方法^[1]。线性关联动态大系统往往具有较高的维数, 因此, 一些学者提出了分散控制策略^[2], 从而使得系统可靠性增强, 实现起来也较经济。另外, 绝大多数的系统模型中含有不确定性, 实际系统

中也往往存在时滞现象, 这就促使更多的人致力于研究线性不确定时滞关联大系统的分散鲁棒镇定问题^[3]。然而, 实际生活中的多数被控对象含有不同程度的非线性, 难以得到其精确数学模型。因此, 以上基于线性关联大系统得到的研究结果就很难应用于一般的非线性系统。一些学者也对一类弱非线性关联大系统的镇定问题进行了研究^[4], 采用局部线性化和鲁棒控制技术得到了一些结论。然而, 这些结论

收稿日期: 2003-03-31; 修回日期: 2003-09-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(N 60174035)。

作者简介: 韩安太(1975—), 男, 山西晋城人, 博士生, 从事模糊控制和先进控制算法等研究; 王树青(1939—), 男, 浙江仙居人, 教授, 博士生导师, 从事过程控制系统和先进控制等研究

仅适用于一些特殊的非线性系统

模糊控制已被证明是非线性系统的一种有效控制方法^[5]。研究表明, 具有线性后件的 Takagi-Sugeno 模糊模型可充分利用系统的局部信息和专家控制经验, 很好地逼近实际非线性系统^[6]。但是, 逼近精度的提高依赖于模糊规则数的增加, 过多的规则数会增加模糊推理、分析的复杂性; 如果允许存在模型误差, 且将该误差看作系统的参数不确定性, 则可大大简化模糊模型^[7]。

基于上述考虑, 本文研究一类非线性时滞关联大系统的分散模糊镇定问题。首先给出了问题的描述; 在此基础上, 推导了闭环系统的可镇定条件; 通过求解一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 给出了具有较小反馈增益的分散模糊控制器的设计方法

2 问题描述

考虑一类由 n 个子系统 $S_i (i = 1, \dots, n)$ 组成的非线性时滞关联大系统

$$S_i: \begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_{i0}(x_i(t)) + f_{i1}(x_i(t - \tau_i)) + \\ g_{i0}(x_i(t))u_i(t) + g_{i1}(x_i(t))u_i(t - d_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n f_{ij}(x_j(t)), \\ x_i(t) = \varphi_i(t), t \in [-\alpha, 0], \alpha > 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_i(t) \in R^{n_i}$ 为状态向量; $u_i(t) \in R^{m_i}$ 为控制向量; $f_{i0}(\cdot), f_{i1}(\cdot), g_{i0}(\cdot), g_{i1}(\cdot)$ 分别为连续函数; $f_{ij}(\cdot)$ 表示第 j 个子系统与第 i 个子系统之间的关联作用; τ_i, d_i 分别为第 i 个子系统的状态和控制滞后, 且满足 $0 < d_i < \tau_i < \alpha$

考虑系统固有不确定性、模型误差和时滞现象, 系统(1)可采用如下的 Takagi-Sugeno 模糊模型进行描述:

R^k_i : if $z_{i1}(t)$ is $L_{ik1} \dots$ and $z_{ig_i}(t)$ is L_{ikg_i} then

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \mathbf{L}_i, \\ x(t) = \varphi_i(t), i \in [-\alpha, 0] \end{cases}$$

其中

$$\mathbf{L}_i = (A_{ik0} + \Delta A_{ik0}(t))x_i(t) + (A_{ik1} + \Delta A_{ik1}(t))x_i(t - \tau_i) + (B_{ik0} + \Delta B_{ik0}(t))u_i(t) + (B_{ik1} + \Delta B_{ik1}(t))u_i(t - d_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk}x_j(t);$$

$i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, l_i$ 为构成第 i 个子系统的模糊模型所需的规则数; $z_{i1}(t), \dots, z_{ig_i}(t)$ 为第 i 个子系统的规则前件变量; $L_{ik1}, \dots, L_{ikg_i}$ 为第 i 个子系统

的模糊语言值; $x_i(t) \in R^{n_i}$ 和 $u_i(t) \in R^{m_i}$ 分别为系统的状态和控制向量; $A_{ik0}, A_{ik1}, B_{ik0}, B_{ik1}$ 是适当维数的实常数矩阵; A_{ijk} 为第 j 个子系统对第 i 个模糊子系统的关联作用矩阵; $\Delta A_{ik0}(t), \Delta A_{ik1}(t), \Delta B_{ik0}(t), \Delta B_{ik1}(t)$ 表示系统的时变不确定性; τ_i, d_i 分别为第 i 个子系统的状态和控制滞后, 且满足 $0 < d_i < \tau_i < \alpha$; $\varphi_i(t)$ 为系统的初始状态向量

本文所考虑的系统不确定性假设是范数有界的, 且具有如下结构形式:

$$[\Delta A_{ik0}(t) \quad \Delta B_{ik0}(t) \quad \Delta A_{ik1}(t) \quad \Delta B_{ik1}(t)] = D_{ik} F_{ik}(t) [E_{ik0}^A \quad E_{ik0}^B \quad E_{ik1}^A \quad E_{ik1}^B], \quad (2)$$

其中: $D_{ik}, E_{ik0}^A, E_{ik0}^B, E_{ik1}^A, E_{ik1}^B$ 为适当维数的实常数矩阵; $F_{ik}(t)$ 是一个具有 Lebesgue 可测元的未知实值矩阵, 表示系统中的不确定性, 且满足 $F_{ik}^T(t)F_{ik}(t) \leq I, I$ 为适当维数的单位矩阵

根据模糊控制理论, 具有状态和控制滞后的不确定关联大系统的全局模糊模型可写成以下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^{l_i} h_k(z_i(t)) [(A_{ik0} + \Delta A_{ik0}(t))x_i(t) + (A_{ik1} + \Delta A_{ik1}(t))x_i(t - \tau_i) + (B_{ik0} + \Delta B_{ik0}(t))u_i(t) + (B_{ik1} + \Delta B_{ik1}(t))u_i(t - d_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk}x_j(t)] \end{cases} \quad (3)$$

其中: $i = 1, \dots, n; h_k(z_i(t)) = \mu_k(z_i(t)) / \sum_{k=1}^{l_i} \mu_k(z_i(t))$ 为模糊基函数, 且满足

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{l_i} h_k(z_i(t)) = 1; \\ \mu_k(z_i(t)) = \prod_{j=1}^{g_i} L_{ikj}(z_{ij}(t)) \quad 0; \\ z_i(t) = [z_{i1}(t) \quad z_{i2}(t) \quad \dots \quad z_{ig_i}(t)]; \end{cases}$$

$L_{ikj}(z_{ij}(t))$ 表示前件变量 $z_{ij}(t)$ 对于模糊集合 L_{ikj} 的隶属度

本文所要研究的问题是: 针对由 n 个子系统构成的模糊不确定时滞关联大系统(3), 为每一个子系统设计一个局部状态反馈模糊控制器, 使所得的闭环关联系统保持稳定。所考虑的模糊控制器具有如下形式^[7]:

$$R^k_i: \text{if } z_{i1}(t) \text{ is } L_{ik1} \dots \text{ and } z_{ig_i}(t) \text{ is } L_{ikg_i} \text{ then } u_i(t) = K_{ik}x_i(t), k = 1, \dots, l_i, i = 1, \dots, n.$$

其中 K_{ik} 为控制器增益。相应地全局模糊状态反馈控制器可写为

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^{l_i} h_k(z_i(t))K_{ik}x_i(t), i = 1, \dots, n \quad (4)$$

将式(4)代入(3), 可得到如下的闭环关联大系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & \sum_{k=1}^{l_i} h_k(z_i(t))h_m(z_i(t)) [A_{ik0} + \\ & \Delta A_{ik0}(t) + (B_{ik0} + \Delta B_{ik0}(t))K_{im}]x_i(t) + \\ & (A_{ik1} + \Delta A_{ik1}(t))x_i(t - \tau_i) + (B_{ik1} + \\ & \Delta B_{ik1}(t))K_{im}x_i(t - d_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk}x_j(t), \\ & i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

首先给出如下引理:

$$\begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \mathfrak{E}_{ikm}^T P_i + P_i \mathfrak{E}_{ikm} + Q_i + H_i + \\ P_i \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk} A_{ijk}^T P_i + 2(n-1)I \\ (A_{ik1} + \Delta A_{ik1})^T P_i \\ [(B_{ik1} + \Delta B_{ik1})K_{im}]^T P_i \end{array} \right] & P_i(A_{ik1} + \Delta A_{ik1}) & P_i[(B_{ik1} + \Delta B_{ik1})K_{im}] \\ & - Q_i & 0 \\ & 0 & - H_i \end{bmatrix} < 0, \quad (7a)$$

$$\begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} (\mathfrak{E}_{ikm}^T P_i + P_i \mathfrak{E}_{ikm} + \mathfrak{E}_{imk}^T P_i + P_i \mathfrak{E}_{imk})/2 + \\ Q_i + H_i + P_i \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk} A_{ijk}^T P_i + 2(n-1)I \\ (A_{ik1} + \Delta A_{ik1})^T P_i \\ \left[\begin{array}{c} [(B_{ik1} + \Delta B_{ik1})K_{im}]^T P_i/2 + \\ [(B_{im1} + \Delta B_{im1})K_{ik}]^T P_i/2 \end{array} \right] \end{array} \right] & P_i(A_{ik1} + \Delta A_{ik1}) & \left[\begin{array}{c} P_i[(B_{ik1} + \Delta B_{ik1})K_{im}]/2 + \\ P_i[(B_{im1} + \Delta B_{im1})K_{ik}]/2 \end{array} \right] \\ & - Q_i & 0 \\ & 0 & - H_i \end{bmatrix} < 0,$$

$$k, m = 1, \dots, l_i, k < m, i = 1, \dots, n. \quad (7b)$$

则闭环系统(5)可采用分散模糊状态反馈控制器(4)镇定 其中

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{ikm} &= [A_{ik0} + \Delta A_{ik0} + (B_{ik0} + \Delta B_{ik0})K_{im}], \\ X_i &= \begin{bmatrix} x_i \\ x_i(t - \tau_i) \\ x_i(t - d_i) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

证明 考虑模糊关联系统(5), 定义如下的 Lyapunov 泛函:

$$V(x_i, t) = \sum_{i=1}^n [x_i^T P_i x_i + \int_{-\tau_i}^t x_i^T Q_i x_i ds + \int_{-d_i}^t x_i^T H_i x_i d\sigma],$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & A_{ik}W_i & B_{ik1}V_{ik} & (E_{ik0}^A W_i - E_{ik0}^B V_{ik})^T & I \\ (A_{ik1}W_i)^T & - M_i & 0 & (E_{ik1}^A W_i)^T & 0 \\ (B_{ik1}V_{ik})^T & 0 & - U_i & (E_{ik1}^B V_{ik})^T & 0 \\ E_{ik0}^A W_i + E_{ik0}^B V_{ik} & E_{ik1}^A W_i & E_{ik1}^B V_{ik} & - \epsilon I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2(n-1)}I \end{bmatrix} < 0, \quad (8a)$$

引理 1^[8] 假设 X, Y, Z 是具有适当维数的矩阵或向量, 则不等式

$$\begin{aligned} X^T Y + Y^T X & \quad X^T X + Y^T Y, \\ 2Z^T Y & \quad Z^T Z + Y^T Y, \end{aligned} \quad (6)$$

总成立

3 主要结果

为简单起见, 下文中与时滞无关的时间变量将不再标明, 例如 $x_i(t)$ 简记为 x_i

定理 1 考虑模糊关联系统(5), 若存在一组正定对称矩阵 P_i, Q_i, H_i 和适当的矩阵 K_{ik} , 使得对任意允许的不确定性和时滞, 以下矩阵不等式组成立:

其中: P_i, Q_i, H_i 是适当维数的正定对称矩阵

将 $V(x_i, t)$ 沿系统(5)的任意运动轨迹求导数,

并考虑引理 1, $\sum_{k=1}^{l_i} h_k^2(z_i) > 0, \sum_{k,m=1, k < m}^{l_i} h_k(z_i)h_m(z_i)$

和定理条件(7), 通过适当的矩阵不等式运算, 可得 $\dot{V}(x_i, t) < 0, x_i \rightarrow 0$, 从而可知, 系统(5)可保持 Lyapunov 意义下的稳定

定理 2 矩阵不等式组(7)成立的充分必要条件是 对任意的模糊关联子系统(3), 存在一组实数 $\epsilon > 0$, 适当维数的正定对称矩阵 W_i, M_i, U_i 和矩阵 V_{ik} , 使得如下线性矩阵不等式组成立:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= (A_{ik0}W_i + B_{ik0}V_{ik})^T + (A_{ik0}W_i + B_{ik0}V_{ik}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk}A_{ijk}^T + M_i + U_i + \epsilon D_{ik}D_{ik}^T, \\
 k &= m = 1, \dots, l_i, i = 1, \dots, n; \\
 &\left[\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{B} & A_{ik1}W_i & \frac{B_{ikm1}V_{imk}}{2} & \frac{(E_{ikm0}^A W_i + E_{ikm0}^B V_{imk})^T}{2} & I & \\
 (A_{ik1}W_i)^T & -M_i & 0 & (E_{ik1}^A W_i)^T & 0 & \\
 \frac{(B_{ikm1}V_{imk})^T}{2} & 0 & -U_i & \frac{(E_{ikm1}^B V_{imk})^T}{2} & 0 & \\
 \frac{E_{ikm0}^A W_i + E_{ikm0}^B V_{imk}}{2} & E_{ik1}^A W_i & \frac{(E_{ikm1}^B V_{imk})}{2} & -\epsilon I & 0 & \\
 I & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2(n-1)}I &
 \end{array} \right] < 0, \quad (8b) \\
 \mathbf{B} &= (A_{ik0}W_i + A_{im0}W_i + B_{ikm0}V_{imk})^T/2 + (A_{ik0}W_i + A_{im0}W_i + B_{ikm0}V_{imk})/2 + \\
 &\sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk}A_{ijk}^T + M_i + U_i + \epsilon D_{ikm}D_{ikm}^T; i = 1, \dots, n; k, m = 1, \dots, l_i, k < m.
 \end{aligned}$$

如果上述的线性矩阵不等式组有一组可行解 \$(\epsilon, W_i, M_i, U_i, V_{ik})\$, 则相应的模糊状态反馈增益阵 \$K_{ik} = V_{ik}W_i^{-1}\$; 其中

$$\begin{aligned}
 D_{ikm} &= [D_{ik} \quad D_{im}], E_{ikm0}^A = \begin{bmatrix} E_{ik0}^A \\ E_{im0}^A \end{bmatrix}, \\
 E_{ikm0}^B &= \begin{bmatrix} E_{ik0}^B & 0 \\ 0 & E_{im0}^B \end{bmatrix}, E_{ikm1}^B = \begin{bmatrix} E_{ik1}^B & 0 \\ 0 & E_{im1}^B \end{bmatrix}, \\
 E_{ik1}^A &= \begin{bmatrix} E_{ik1}^A \\ 0 \end{bmatrix}, V_{imk} = \begin{bmatrix} V_{im} \\ V_{ik} \end{bmatrix}, \\
 B_{ikm1} &= [B_{ik1} \quad B_{im1}], B_{ikm0} = [B_{ik0} \quad B_{im0}]
 \end{aligned}$$

证明 设 \$W_i = P_i^{-1}, V_{ik} = K_{ik}P_i^{-1}, M_i = P_i^{-1}Q_iP_i^{-1}, U_i = P_i^{-1}H_iP_i^{-1}\$, 利用矩阵变换, Schur 补定理和文献[9]中的引理 1, 即可由式(7a) 得到定理 2 中的(8a).

同理, 令

$$\begin{aligned}
 F_{ikm} &= \begin{bmatrix} F_{ik} & 0 \\ 0 & F_{im} \end{bmatrix}, K_{imk} = \begin{bmatrix} K_{im} \\ K_{ik} \end{bmatrix}, \\
 \Gamma_{ikm} &= A_{ik0} + B_{ik0}K_{im},
 \end{aligned}$$

按照与式(7a) 相同的证明方法, 即可由(7b) 得到定理 2 中的(8b).

由上述证明过程可以看到, 如果线性矩阵不等式组(8) 有解, 则相应的分散模糊状态反馈控制器增益为 \$K_{ik} = V_{ik}W_i^{-1}\$.

定理 1 和定理 2 分别给出了模糊时滞关联大系统的可分散模糊状态反馈镇定的条件和相应的控制器设计方法. 在实际工程应用中, 为了保证系统良好的动态性能和抑制测量噪声, 常采用具有较小反馈增益的控制器. 考虑

$$V_{ik}^T V_{ik} < \theta I, W_i^{-1} < \lambda I,$$

其中 \$\theta, \lambda > 0\$ 因此有

$$K_{ik}^T K_{ik} = W_i^{-1} V_{ik}^T V_{ik} W_i^{-1} < \theta \lambda^2 I.$$

从而, 可通过使得 \$\theta, \lambda\$ 的极小化来获得具有较小增益的反馈矩阵, 即求解如下最优化问题:

$$\min_{W_i, M_i, U_i, V_{ik}, i=1}^n (\theta + \lambda),$$

约束条件为: \$W_i = W_i^T > 0, M_i = M_i^T > 0, U_i = U_i^T > 0\$ 以及式(8) 和

$$\begin{bmatrix} -\theta I & V_{ik}^T \\ V_{ik} & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} W_i & I \\ I & \lambda I \end{bmatrix} > 0 \quad (9)$$

可见, 这是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 可利用 Matlab 等相关工具进行求解. 只要此凸优化问题有解, 就可保证所得到的分散稳定化模糊控制器具有较小的反馈增益.

4 结 语

本文针对一类具有状态和控制滞后的非线性关联时滞大系统, 研究其可分散模糊镇定和相应的稳定化分散模糊控制器设计问题. 给出了分散模糊状态反馈控制器的存在条件, 控制器的反馈增益依赖于一组线性矩阵不等式的解; 进而, 通过求解一个满足线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 提出了具有较小反馈增益的分散模糊控制器设计方法.

到目前为止, 非线性时滞关联大系统的模糊控制在国内还没有相关的研究结果, 国际上类似的研究结果也不多见. 因此, 本文方法具有较强的理论意义和推广价值.

(下转第 428 页)

- Systems & Control Letters*, 1998, 33(3): 163-169
- [10] Lin Z L, Bao X Y, Chen B M. Further results on almost disturbance decoupling with global asymptotic stability for nonlinear systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 709-717.
- [11] Haykin S S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundations*[M]. Beijing: Tsinghua University Press and Prentice Hall Inc, 2001.
- [12] Ho D W C, Ma Z. Multivariable internal model adaptive decoupling controller with neural network for nonlinear plants [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Philadelphia, 1998 532-536
- [13] Yue H, Chai T Y. Adaptive decoupling control of multivariable nonlinear nonminimum phase systems using neural networks [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Philadelphia, 1998 513-514
- [14] Hornik K, Stinchcombe M, White H. Universal approximation of an unknown mapping and its derivatives using multilayer feedforward networks [J]. *Neural Networks*, 1990, 3(5): 551-560
- [15] 王昕, 岳恒, 柴天佑. 一类非最小相位系统的多变量多模型解耦控制器[J]. *控制与决策*, 2003, 18(1): 7-12
(Wang X, Yue H, Chai T Y. Multivariable decoupling controller using multiple models for a nonminimum phase system [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(1): 7-12)

(上接第 419 页)

参考文献(References):

- [1] Chen Y H, Leitmann G, Zhang Kai X. Robust control design for interconnected systems with time-varying uncertainties [J]. *Int J Control*, 1991, 54 (8): 1119-1142
- [2] Mao C J, Yang J H. Decentralized robust stabilizing and output tracking controllers [J]. *Automatica*, 1995, 31(15): 151-154
- [3] Xu B, Lam J. Decentralized stabilization of large-scale interconnected time-delay systems [J]. *J of Optimization Theory and Applications*, 1999, 103 (1): 231-240
- [4] Davison E J. The decentralized stabilization and control of unknown nonlinear time varying systems [J]. *Automatica*, 1974, 10(3): 309-316
- [5] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on System, Man and Cybern*, 1985, 15 (1): 116-132
- [6] Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 1996, 4(1): 14-23
- [7] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. A unified approach to controlling chaos via LM F-based fuzzy control system design [J]. *IEEE Trans on Circuit System*, 1998, 45(9): 1021-1040
- [8] Cao Y Y, Sun Y X, Lam J. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with time-varying delays [J]. *IEE Proc Control Theory Applications*, 1998, 145(3): 338-344
- [9] Yu L, Chu J. An LM I approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(8): 1155-1159

(上接第 423 页)

- [5] Mansilla R. From naive to sophisticated behavior in multiagents-based financial market models [J]. *Physica A*, 2000, (284): 478-488
- [6] Savit R, Manuca R, Riolo R. Adaptive competition, market efficiency, phase transition [J]. *Phys Rev Lett*, 1999, 82(10): 2203-2206
- [7] Kalinowski T, Schulz H J, Briese M. Cooperation in the minority game with local information [J]. *Physica A*, 2000, (277): 502-508
- [8] Slanina F. Social organization in the minority game model [J]. *Physica A*, 2000, (286): 367-376