第 19 卷 第 4 期 控 制 与 决 策 2004 年 4 月
Vol 19 No. 4 Control and Decision Apr. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)04-0429-04

一类积分加权时滞型非线性微分包含的稳定性

郭树理[1], **阎绍泽**[1], **黄 琳**[2]
(1. 清华大学 精密仪器与机械系, 北京 100084; 2. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要: 采用多面体 Lyapunov 函数分析微分包含的稳定性, 即通过建立一类内积型 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 分析一类积分加权时滞型非线性微分包含的零解渐近稳定性. 得到了一些关于零解渐近稳定性和 B-鲁棒渐近稳定性的充分条件, 这些充分条件在计算上是简洁实用的.

关键词: Lyapunov-Krasovskii 泛函; 非线性微分包含; 渐近稳定性; B 鲁棒渐近稳定
中图分类号: O317 **文献标识码**: A

Stability analysis of a kind of nonlinear differential inclusions with integral time-delay weighted parts

GUO Shu-li[1], *YAN Shao-ze*[1], *HUANG Lin*[2]
(1. Department of Precision Instrument and Mechanology, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Department of Mechanical and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China. Correspondent: GUO Shu li, E-mail: guoshl@post. pim. tsinghua. edu. cn)

Abstract: Polyhedral Lyapunov functions are used to analyze a class of Lyapunov-Krasovskii functional under general similarity of matrices. Some sufficient conditions on globally asymptotical stability (GAS) and of B-robust stability of the origin for a class of nonlinear differential inclusions are obtained, and these results are computationally simple and convenient.

Key words: Lyapunov-Krasovskii functional; nonlinear differential inclusion; asymptotical stability; B-robust asymptotical stability

1 引 言

在许多实际问题中, 由于信息传输速度的限制以及干扰的作用和元件老化的原因, 经常出现时滞现象. 时滞的出现会导致一个稳定的系统不能稳定工作, 同时也给系统的分析与设计带来了许多困难[1~12]. 但时滞系统常常反映了系统真实准确的运动状态. 如由振荡平台与横梁组合的系统, 其水平方向上局部矢量域就是前面的状态叠加形成的. 再如连续介质物体受力变形时黏弹性结构的 Piola-Kirchoff 受力函数就是时滞分布的积分. 上述函数可用如下动力系统来描述[5,10]:

$$\mathring{x}(t) = Ax(t) + \int^{T} B(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

若平台本身是一种转向系统(如汽车的转向系统、计算机的磁盘系统、机器人控制系统等), 允许在有限个模型中进行切换来实现控制目的, 即

$$\mathring{x}(t) = A_s x(t), A_s \in \{A_1, A_2, \cdots, A_Q\}. \tag{2}$$

本文考虑在切换平台上出现振荡的情形, 即可通过系统

$$\mathring{x}(t) = A_s x(t) + \int^{T} B(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau, A_s \in \{A_1, A_2, \cdots, A_Q\} \tag{3}$$

收稿日期: 2002-01-24; **修回日期**: 2003-06-17.
作者简介: 郭树理(1973—), 男, 内蒙古察右前旗人, 从事复杂系统动力学与控制的研究; 黄琳(1935—), 男, 江苏扬州人, 从事复杂系统动力学与控制以及相关的应用数学问题等研究.

来描述. 本文研究该系统平衡态 $x = 0$ 的稳定性质.

建立 Lyapunov-Krasovskii 泛函是解决时滞系统问题经常使用的方法[1～12]. Lyapunov-Krasovski 泛函的形式为

$$V(t, x) = x^{\mathrm{T}} P x + \int_0^{\tau} x(t-\tau)^{\mathrm{T}} S x(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{4}$$

其中: $P^{\mathrm{T}} = P > 0, S^{\mathrm{T}} = S > 0$. 本文研究系统(3), 采用多面体 Lyapunov 泛函

$$V(t, x) = v_m(l, x) + \int_0^{\tau} x(t-\tau)^{\mathrm{T}} S x(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{5}$$

其中: $v_m(l, x) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \langle l, x \rangle^2, S(-\tau)$ 是变系数正定阵. 利用上述多面体 Lyapunov 泛函形式可把问题转化成实数大小的比较, 形式上较为简洁.

2 预备知识

对于微分包含

$$\overset{\circ}{x} \in F(x), F(x) = \{y : y = Ax, A \in \mathbf{A}\}, \tag{6}$$

其中 $x \in R^n$, $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵空间的紧致集. 绝对连续矢量函数 $x(t)$ 在所考虑的区间上几乎处处满足式(6).

依据文献[2, 12], 给出微分包含零解渐近稳定的定义:

定义 1[2,12] 微分包含(6) 的零解渐近稳定是指:

1) 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 当 $t \geq t_0$, $\| x(t_0) \| < \delta(\epsilon)$ 时, 必有 $\| x(t) \| < \epsilon$;

2) 存在 $\theta > 0$, 当 $\| x_0 \| < \theta (x_0 = x(t_0))$ 时, 有 $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

引理 1[12] 微分包含(6) 的零解的渐近稳定等价于下列微分包含:

$$\overset{\circ}{x} \in F(x), F(x) = \{y : y = Ax, A \in \mathrm{co}(\mathbf{A})\},$$
$$\mathrm{co}(\mathbf{A}) = \mathrm{co}(A_1, A_2, \cdots, A_q) \tag{7}$$

零解的渐近稳定. 其中 $A_1, A_2, \cdots, A_q$ 表示 $\mathrm{co}(\mathbf{A})$ 的所有凸顶点(下同).

引入方向导数

$$\mu = \max_{y \in F(x)} \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}y},$$

其中: $\dfrac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}y} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{v(x + hy)}{h}$, 则有以下引理:

引理 2[12] 微分包含(6) 的零解的渐近稳定等价于存在一个严格凸的齐二次 Lyapunov 函数 $v(x)$, 即

$$\begin{cases} v(x) = x^{\mathrm{T}} L(x) x, \\ L(x) = (l_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}, \\ L^{\mathrm{T}}(x) = L(x) = L(\tau x), x \neq 0, \|\tau\| = 1, \\ v(0) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

且其导函数满足

$$\mu = \max_{y \in F(x)} \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}y} \leq -\gamma \| x \|^2, \gamma > 0. \tag{9}$$

若选取分段二次型 Lyapunov 函数 $v_m(l, x) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \langle l, x \rangle^2$, 其中 $l_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 均为 n 维常数向量, 显然满足式(8) 的要求.

利用分段 Lyapunov 函数给出如下引理:

引理 3[12] 微分包含(6) 的零解的渐近稳定等价于存在一个满足式(8) 的严格凸的齐二次分段 Lyapunov 函数 $v_m(l, x)$, 使

$$\mu_m(l, x) = \max_{y \in F(x)} \frac{\mathrm{d}v_m(l, x)}{\mathrm{d}y} \tag{10}$$

满足不等式(9), 且向量 $l_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 满足条件 $\mathrm{rank}(L) = n \leq m, L = (l_1, l_2, \cdots, l_m)$.

总结引理 1～3 的结论, 文献[12] 给出了如下的等价条件, 并给出更为一般的具体的分段 Lyapunov 函数.

引理 4[12] 微分包含:

$$\overset{\circ}{x} \in F(x),$$
$$F(x) = \{y : y = Ax, A \in \mathrm{co}(\mathbf{A}) = \mathrm{co}(A_1, A_2, \cdots, A_q)\} \tag{11}$$

零解的渐近稳定等价于存在数 $m \geq n$ 及一个 $n \times m$ 矩阵 L 和 $m \times m$ 矩阵

$$\tau_s = (\gamma_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^{m}, s = 1, \cdots, q, \tag{12}$$

其每一行均严格负对角占优, 即

$$\tau(\gamma_{ii}) + \sum_{j \neq i} \left| \tau(\gamma_{ij}^{(s)}) \right| < 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, m, s = 1, 2, \cdots, q,$$

且满足关系式

$$A_s^{\mathrm{T}} L = L \tau_s^{\mathrm{T}}, s = 1, 2, \cdots, q. \tag{13}$$

3 非线性微分包含稳定性的判别准则

考虑如下积分型加权非线性微分包含:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x} \in F_s(t, x), s = 1, 2, \cdots, q, \\ F_s(t, x) = \left\{ y : y = A_s x(t) + \int_0^{\tau} B(\tau) x(t-\tau) \mathrm{d}\tau \right\}, \\ A_s \in \{A_1, A_2, \cdots, A_q\} \end{cases} \tag{14}$$

零解的稳定性质, 其中 $A_s, B(\tau) \in R^{n \times n}, s = 1, 2, \cdots, q$.

定理 1 对于系统(14), 假如:

1) 存在一个 $n\times m$ 阶矩阵 L (秩为 n) 及 $m\times m$ 阶矩阵 $\tau_s=(\gamma_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^{m}, s=1,2,\cdots,q$, 满足关系式(12), (13);

2) 存在一个公共的 Lyapunov 函数及可微矩阵 $Q^{\mathrm T}(t)=Q(t)>0, Q(t)=0, \mathrm dQ(t)/\mathrm dt=-C^{\mathrm T}(t)C(t)$, 定义一个 Lyapunov-Krasovskii 泛函 V: $C([-\tau,0],R^n)\to R$ 为

$$V(\phi)=v_m(l,\phi)+\int_{T}\phi(\theta)Q(-\theta)\phi(\theta)\mathrm d\theta,\tag{15}$$

且满足

$$\epsilon_0=\epsilon+m\frac{\lambda_{\max}(Q(0))}{\lambda_{\min}(LL^{\mathrm T})}+\max_{1\le i\le m}\Big(l_i^{\mathrm T}\int B(\tau)\times C^{-1}(\tau)C^{-\mathrm T}(\tau)B(\tau)\mathrm d\tau l_i\Big)<0,$$

其中

$$\epsilon=\max_{s,i}\tau(\gamma_{ii}^{(s)})+\sum_{j\ne i}\big|\tau(\gamma_{ij}^{(s)})\big|<0,$$

则系统(14) 的零解是一致渐近稳定的.

证明 考虑到 Lyapunov-Krasovskii 泛函(15), 沿(14) 的方向导数为

$$\begin{aligned}
&\mathrm dV(x(t))/\mathrm dt\big|_{(14)}=\\
&\max_{y\in F(x)}\frac{\partial v_m(l,x)}{\partial y}+x^{\mathrm T}(t)Q(0)x(t)-\\
&x^{\mathrm T}(t-T)Qx(t-T)+\\
&\int_{T}x^{\mathrm T}(\tau)\frac{\partial Q(t-\tau)}{\partial t}x(t-\tau)\mathrm d\tau\le\\
&\max_{1\le s\le q,1\le i\le m}\Big(\gamma_{ii}^{(s)}+\sum_{j\ne i}\big|\gamma_{ij}^{(s)}\big|\Big)v_m(l,x)+\\
&\max_{1\le s\le q,1\le i\le m}\frac{\lambda_{\max}(Q(0))}{\lambda_{\min}(LL^{\mathrm T})}\sum_{i=1}^{M}\langle l_i,x\rangle^2+\\
&2\max_{1\le s\le q,1\le i\le m}\langle l_i,x\rangle\Big\langle l_i,\int B(\tau)x(t-\tau)\mathrm d\tau\Big\rangle-\\
&\int x^{\mathrm T}(\tau)C(t-\tau)C^{\mathrm T}(t-\tau)x(\tau)\mathrm d\tau
\end{aligned}\tag{16}$$

令
$$\xi(t,\tau)=x^{\mathrm T}(t-\tau)C(\tau)-x^{\mathrm T}(t)\max_{1\le s\le q,1\le i\le m}(l_il_i^{\mathrm T}B(\tau)C^{-1}(\tau))$$

则式(16) 可放大为

$$\begin{aligned}
&\mathrm dV(x(t))/\mathrm dt\big|_{(14)}\le\\
&\max_{1\le s\le q,1\le i\le m}\Big(\gamma_{ii}^{(s)}+\sum_{j\ne i}\big|\gamma_{ij}^{(s)}\big|\Big)v_m(l,x)+\\
&\max_{1\le s\le q,1\le i\le m}\frac{\lambda_{\max}(Q(0))}{\lambda_{\min}(LL^{\mathrm T})}\sum_{i=1}^{M}\langle l_i,x\rangle^2+\\
&\max_{1\le s\le q,1\le i\le m}x^{\mathrm T}(t)l_il_i^{\mathrm T}\int B(\tau)C^{-1}(\tau)C^{-\mathrm T}(\tau)\times\\
&B(\tau)\mathrm d\tau l_il_i^{\mathrm T}x(t)-\int\xi^{\mathrm T}(t-\tau)\xi(t-\tau)\mathrm d\tau=\\
&\epsilon_0v_m(l,x)-\int\xi^{\mathrm T}(t-\tau)\xi(t-\tau)\mathrm d\tau
\end{aligned}\tag{17}$$

故 $\mathrm dV(x(t))/\mathrm dt\big|_{(14)}\le\epsilon_0v_m(l,x)$.

利用泛函微分方程的基本命题即可得证. □

定理 2 对于系统(14), 若定理 1 的条件 1) 成立, 且存在公共的分段型 Lyapunov 函数 $v_m(l,x)$, 正定阵 R 及非奇异的函数矩阵 $C(\cdot)$: $[0,T]\to R^{n\times n}$, 满足 $\left\|\int C^{\mathrm T}(t)C(t)\mathrm dt\right\|<\infty$, 且

$$\epsilon_0=\epsilon+m\frac{\lambda_{\max}(Q(0))}{\lambda_{\min}(LL^{\mathrm T})}+\max_{1\le i\le m}\Big(l_i^{\mathrm T}\int B(\tau)\times C^{-1}(\tau)C^{-\mathrm T}(\tau)B(\tau)\mathrm d\tau l_i\Big)<0,$$

则系统(14) 的零解是一致渐近稳定的.

证明 由定理 1 的证明过程及 $Q(0)$ 的定义, 可以得到

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm dV(x(t))}{\mathrm dt}\Big|_{(14)}\le&\Big(\epsilon+m\frac{\lambda_{\max}(Q(0))}{\lambda_{\min}(LL^{\mathrm T})}+\\
&\max_{1\le i\le m}\Big(l_i^{\mathrm T}\int B(\tau)C^{-1}(\tau)\times\\
&C^{-\mathrm T}(\tau)B(\tau)\mathrm d\tau l_i\Big)\Big)v_m(l,x)-\\
&\int\xi^{\mathrm T}(t-\tau)\xi(t-\tau)\mathrm d\tau
\end{aligned}$$

依据引理 4 或定理 1, 可得结论. □

定义 2 若 B 是对称正定阵, 则式(14) 的零解称作 B 鲁棒渐近稳定是指: 对于所有的有界时滞区间 $[0,T]$ 及加权矩阵函数 $B(\cdot)$: $[0,T]\to R^n$ 满足

$$\min_{\beta(\cdot)}\int\frac{B(\tau)B^{\mathrm T}(\tau)}{\beta(\tau)}\mathrm d\tau\int\beta(\tau)\mathrm d\tau\le B,\tag{19}$$

则式(14) 的零解都是渐近稳定的(这里 $\beta(\tau)$ 是一正函数).

在系统(14) 中, 假设

$$\int\beta(\tau)\mathrm d\tau=1, \beta(\tau)\in R^+,$$
$$\tau\in R, C(t)=\sqrt{\beta(t)}I>0,\tag{20}$$

可得下述结论:

定理 3 在定理 1 或定理 2 的前提下, 若

$$\epsilon+m\frac{\lambda_{\max}\Big(\int C(\tau)C^{\mathrm T}(\tau)\mathrm d\tau\Big)}{\lambda_{\min}(LL^{\mathrm T})}+\max_{1\le i\le m}(l_i^{\mathrm T}Bl_i)<0,\tag{21}$$

则系统(14) 的零解是 B 鲁棒渐近稳定的.

证明 在 $C(t)=\sqrt{\beta(t)}I>0$ 及(20) 条件下, 利用定义 2, 有

$$l_i^{\mathrm T}Bl_i\ge l_i^{\mathrm T}\int\frac{B(\tau)B^{\mathrm T}(\tau)}{\beta(\tau)}\mathrm d\tau l_i\ge$$

$$l_i^{\mathrm{T}} \int B(\tau) C^{\mathrm{T}}(\tau) C(\tau) B(\tau) \, \mathrm{d}\tau l_i. \qquad (22)$$

于是可得结论. □

特别地,若 A_s 为 $n \times n$ 矩阵,存在 $P^{\mathrm{T}} = P > 0$,使得 $A_s^{\mathrm{T}} P + PA_s < 0, A_s \in \mathrm{co}(\mathbf{A})$,则可得以下推论:

推论 1 在定理 1 的条件下,若 $Q^{\mathrm{T}}(t) = Q(t) > 0, Q(T) = 0, \mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t = -C^{\mathrm{T}}(t) C(t)$,选取 Lyapunov-Krasovskii 泛函 $V: C([-\tau, 0], R^n) \to R$ 为

$$V(\phi) = \phi(0) P \phi(0) + \int_{-\tau} \phi(\theta) Q(-\theta) \phi(\theta) \, \mathrm{d}\theta,$$

且沿式(14) 的方向导数为

$$\mathrm{d}V(x(t))/\mathrm{d}t \big|_{(14)} \leq -x^{\mathrm{T}}(t) R_s x(t),$$

其中

$$-R_s = A_s^{\mathrm{T}} P + PA_s + C^{\mathrm{T}} PC + Q(0) + P \int B(\tau) C^T(\tau) C(\tau) B(\tau) \, \mathrm{d}\tau P,$$

$$s = 1, 2, \cdots, q,$$

则系统(14) 的零解是渐近稳定的.

推论 2 相应于定理 2,在推论 1 的条件下,若 $\left\| \int C^{\mathrm{T}}(t) C(t) \, \mathrm{d}t \right\| < \infty$,且

$$0 = A_s^{\mathrm{T}} P + PA_s + C^{\mathrm{T}} PC + Q(0) + P \int B(\tau) C^{\mathrm{T}}(\tau) C(\tau) B(\tau) \, \mathrm{d}\tau P + R_s,$$

$$s = 1, 2, \cdots, q,$$

则系统(14) 的零解是渐近稳定的.

推论 3 相应于定理 3,若

$$A_s^{\mathrm{T}} P + PA_s + I + PBP < 0,$$

$$s = 1, 2, \cdots, q,$$

则系统(14) 的零解是 B 鲁棒渐近稳定的.

4 结 论

一般直接分析微分包含的稳定性比较困难,若能找到其凸多面体的凸顶点组合,则可通过分析其凸顶点集的稳定性来达到目的. 本文通过建立内积加积分项 Lyapunov-Krasovskii 型的多面体 Lyapunov 泛函方法来分析时滞微分包含系统的稳定性问题,得到了易于计算的稳定性判据. 上述问题在公共 P 函数存在的前提下,可以得到用LMI形式表现的判据.

参考文献(References):

[1] 郭树理. 一类饱和输入下连续控制系统的稳定性理论 [D]. 北京: 北京大学, 2001.

[2] 郭树理, 黄琳. 一类饱和输入下连续控制系统的相空间的划分与平衡点的分类[J]. 控制与决策, 2002, 17(2): 135-138.
(Guo S L, Huang L. The phase space and equilibrium points of control system with saturated inputs [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(2): 135-138.)

[3] 郭树理, 黄琳, 楚天广. 在可交换下单饱和输入下连续控制系统的平衡点的判定[J]. 北京大学学报, 2002, 38(1): 30-34.
(Guo S L, Huang L, Chu T G. The equilibrium points of control systems with single saturated inputs under commuting matrices [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2002, 38(1): 30-34.)

[4] Aubin J P, Cellina A. *Differential Inclusion* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[5] Blanchini F, Ryan E P. A Razumikhin-type lemma for functional equations with application to adaptive control [J]. *Automatica*, 1999, 35(9): 809-818.

[6] Bohyung Lee, Jang Gyu Lee. Robust stability and stabilization of linear delayed systems with structured uncertainty[J]. *Automatica*, 1999, 35(10): 1149-1154.

[7] Dugard L, Verriest E I. *Stability and Control of Time-delay Systems*[M]. Berlin: Springer, 1998. 303-317.

[8] Eansour M. Robustness measures in nonlinear discrete-time systems with delays and large-parameter variations [J]. *Automatica*, 1999, 35(12): 1599-1604.

[9] Kolmanorskii V B, Nosov V B. *Stability of Functional Differential Equation* [M]. New York: Academic Press, 1986.

[10] Kolmanorskii V B, Myshkis A. *Applied Theory of Functional Differential Equations* [M]. Mathematics and Its Applications, Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1992.

[11] Kharitonov V L, Melchor-Aguilar Daniel. On delay-dependent stability condition [J]. *Systems and Control Letter*, 2000, 40(1): 71-76.

[12] Molchanov A P, Pyatnitskiy Y S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory[J]. *Systems and Control Letters*, , 1989, 13(1): 59-64.