第 19 卷 第 4 期　　控　制　与　决　策　　2004 年 4 月
Vol. 19 No. 4　　Control and Decision　　Apr. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)04-0433-04

AHP 中新元素导入的强保序性研究

徐 泽 水
(东南大学 经济管理学院, 江苏 南京 210096)

摘　要: 对层次分析中在单一准则下导入一组新元素的强保序条件进行了研究. 给出在原有元素中导入一组新元素时, 保持新旧两组元素各自原有权值之比的一个充分条件, 并给出了 3 个判断矩阵 (原有元素构成的判断矩阵, 导入的新元素构成的判断矩阵及其合成判断矩阵) 排序向量之间及其一致性之间的关系, 丰富和完善了保序性理论, 并提高了其实用性. 最后通过算例分析验证了该条件的有效性.

关键词: 层次分析; 强保序; 一致性
中图分类号: O223　　　**文献标识码**: A

On strong rank preservation of adding new elements in AHP

XU Ze-shui
(College of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: XU Ze-shui, E-mail: xu_zeshui@263.net)

Abstract: The condition of strong rank preservation for adding new elements under a single criterion in AHP is studied. A sufficient condition is given for keeping relative priority weights of the original elements and the added ones when a new group of elements are added. The relationships among the priority vectors and among the consistency of the juegement matrix constructed with the original elements, the juegement matrix constructed with the added elements and their synthetic judgement matrix are presented. The work enriches and perfects the rank preservation theory and enhances its practicality. Finally, an illustrative example is given to show the validity of this condition.

Key words: AHP; strong rank preservation; consistency

1 引　　言

层次分析(AHP) 中新元素导入的保序性是一个重要的研究课题[1~8]. 近年来, 不少学者对此进行了探讨并取得一些有意义的结果, 如: 文献[3] 给出了在单一准则下, 导入一个新元素时, 保持原有元素各自排序权值之比不变的一个充分条件; [4] 则给出了导入一个新元素时保持原有元素各自排序的相对权值不变的一个充要条件. 然而, 在实际决策过程中, 新元素的导入往往不是一个而是一组[5]. [5] 推广了 Saaty[1] 的保序性原理, 讨论了在单一准则下, 利用特征根排序方法导入一组新元素时, 保持新旧两组元素各自排序的权值之比不变(即强保序) 的充要条件. [6] 对该条件进行了改进, 证明了 $\lambda_{max}(DC) = \lambda_{max}(CD)$ 是与保序性条件无关的. [7] 也从另一个角度利用特征向量排序法给出了一个强保序性条件. 但这些条件[6,7] 只能对给出的判断矩阵的保序性进行检验, 并不能构造具有保序性的判断矩阵. 为此, [8] 对具有协调性的一类排序法(对数最小二乘法、梯度特征向量法、最小偏差法、广义最小偏差法和混合最小二乘法) 在增加一组新元素后的强保序性条件进行了研究, 然而该文未对应用最广泛、但不具有协调性[9]的特征向量排序法进行

收稿日期: 2003-04-07; **修回日期**: 2003-06-02.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970093); 东南大学 - 南瑞继保公司优秀博士学位论文基金资助项目.
作者简介: 徐泽水(1968—), 男, 安徽南陵人, 副教授, 博士后, 从事决策分析及运筹学等研究.

探讨.

本文尝试对特征向量排序法在增加一组新元素后的强保序性条件进行研究, 给出了一个简洁、实用的保序性定理. 利用此定理, 决策者可根据客观实际情况及自己的主观意愿构造出具有保序性的判断矩阵.

2　预备知识

对于某一决策问题, 设有 $n+m$ 个方案, 分为两组进行比较, 得到两组排序方案和权重, 在保持各自的两两比较的情况下, 把它们放在一起比较. 设前 n 个元素的判断矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 后 m 个元素的判断矩阵为 $B=(b_{ij})_{m\times m}$, 将 $n+m$ 个元素放在一起比较, 得到判断矩阵 $A^*=(a_{ij}^*)_{n+m,n+m}$, 则有 $A^*=\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$. 其中: $C=(c_{ij})_{n\times m}$, $D=(d_{ji})_{m\times n}$, $c_{ij}=1/d_{ji}$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=n+1,n+2,\cdots,n+m$. 即

$$A^*=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{1,n+1} & \cdots & c_{1,n+m} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n,n+1} & \cdots & c_{n,n+m} \\ d_{n+1,1} & \cdots & d_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,n+m} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ d_{n+m,1} & \cdots & d_{n+m,n} & b_{n+m,n+1} & \cdots & b_{n+m,n+m} \end{bmatrix}.$$

设判断矩阵 A, B 的排序向量分别为

$$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm T},$$
$$v=(v_1,v_2,\cdots,v_m)^{\mathrm T}.$$

定理 1[5]　在原有元素中加入一组新元素, 同时保持两组元素各自成对比较不变时, 得到的判断矩阵 A^* 的排序权值, 保持它们各自原有权值之比的充要条件是 $\lambda_{\max}(DC)=\lambda_{\max}(CD)$, 且 CD 和 DC 的主特征向量分别为 A, B 的主特征向量 ω, v.

文献[6]对此条件进行了分析, 证明了 $\lambda_{\max}(DC)=\lambda_{\max}(CD)$ 是与保序性无关的, 并得出下列定理:

定理 2[6]　在原有元素中加入一组新元素, 同时保持两组元素各自成对比较不变时, 得到的判断矩阵 A^* 的排序权值, 保持它们各自原有权值之比的充要条件是 CD 和 A 有相同的主特征向量 ω, 且 DC 和 B 有相同的主特征向量 v.

文献[7]对定理 1 也作出了改进, 并给出下面定理:

定理 3[7]　在原有元素中加入一组新元素, 同时保持两组元素各自成对比较不变时, 得到的判断矩阵 A^* 的排序权值, 保持它们各自原有权值之比的充要条件是

$$Cv=a\omega,\ D\omega=bv,\ a>0,\ b>0,$$

并且此时还有 λ_{A^*} 为二次方程

$$\lambda^2-(\lambda_A+\lambda_B)\lambda+\lambda_A\lambda_B-ab=0$$

的较大根. 其中: λ_A, λ_B, λ_{A^*} 分别为 A, B, A^* 的最大特征根; ω, v 分别为对应 λ_A, λ_B 的主特征向量.

定理 2 和定理 3 从不同的角度给出了特征向量排序法在增加一组新元素后的强保序性条件, 具有一定的理论价值, 但在实际应用时只能对给出的判断矩阵保序性进行检验, 而不能直接构造具有保序性的判断矩阵, 因而实际意义并不突出. 在下一节中, 将给出一个简单实用的保序性条件, 此条件弥补了这方面的缺陷.

3　保序性条件

定理 4　在原有元素中加入一组新元素, 同时保持两组元素各自成对比较不变时, 得到的判断矩阵 A^* 的排序权值, 保持它们各自原有权值之比的充分条件是

$$c_{i,n+j}=k\frac{\omega_i}{v_j}. \tag{1}$$

其中: $k>0$; $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$; $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm T}$ 和 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_m)^{\mathrm T}$ 分别为判断矩阵 A, B 的主特征向量.

证明　由条件 $c_{i,n+j}=k\dfrac{\omega_i}{v_j}$ ($k>0$; $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$) 可得

$$CD\omega=\begin{bmatrix} k\frac{\omega_1}{v_1} & k\frac{\omega_1}{v_2} & \cdots & k\frac{\omega_1}{v_m} \\ k\frac{\omega_2}{v_1} & k\frac{\omega_2}{v_2} & \cdots & k\frac{\omega_2}{v_m} \\ & & \vdots & \\ k\frac{\omega_n}{v_1} & k\frac{\omega_n}{v_2} & \cdots & k\frac{\omega_n}{v_m} \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{k}\frac{v_1}{\omega_1} & \frac{1}{k}\frac{v_1}{\omega_2} & \cdots & \frac{1}{k}\frac{v_1}{\omega_n} \\ \frac{1}{k}\frac{v_2}{\omega_1} & \frac{1}{k}\frac{v_2}{\omega_2} & \cdots & \frac{1}{k}\frac{v_2}{\omega_n} \\ & & \vdots & \\ \frac{1}{k}\frac{v_m}{\omega_1} & \frac{1}{k}\frac{v_m}{\omega_2} & \cdots & \frac{1}{k}\frac{v_m}{\omega_n} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_n\end{bmatrix}=$$

$$mn\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_n\end{bmatrix}=mn\omega,$$

$$DCv=\begin{bmatrix}\frac{1}{k}\frac{v_1}{\omega_1} & \frac{1}{k}\frac{v_1}{\omega_2} & \cdots & \frac{1}{k}\frac{v_1}{\omega_n}\\ \frac{1}{k}\frac{v_2}{\omega_1} & \frac{1}{k}\frac{v_2}{\omega_2} & \cdots & \frac{1}{k}\frac{v_2}{\omega_n}\\ & & \vdots & \\ \frac{1}{k}\frac{v_m}{\omega_1} & \frac{1}{k}\frac{v_m}{\omega_2} & \cdots & \frac{1}{k}\frac{v_m}{\omega_n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}k\frac{\omega_1}{v_1} & k\frac{\omega_1}{v_2} & \cdots & k\frac{\omega_1}{v_m}\\ k\frac{\omega_2}{v_1} & k\frac{\omega_2}{v_2} & \cdots & k\frac{\omega_2}{v_m}\\ & & \vdots & \\ k\frac{\omega_n}{v_1} & k\frac{\omega_n}{v_2} & \cdots & k\frac{\omega_n}{v_m}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_m\end{bmatrix}=mn\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_m\end{bmatrix}=mnv,$$

即 $CD\omega=mn\omega, DCv=mnv$, 其中 $\lambda_{\max}(DC)=\lambda_{\max}(CD)=mn$. 因此, CD 和A 有相同的主特征向量 ω, DC 和B 有相同的主特征向量 v. 由定理 1 的充分性即得定理 4 成立 □

推论 1　判断矩阵A 引入一个新元素后强保序的充要条件是

$$c_{i,n+1}=k\omega_i, k>0, i=1,2,\cdots,n.$$

从定理 4 可知, 只需知道原判断矩阵A 和导入新元素所构成的判断矩阵B 及它们的主特征向量 ω, v, 就可根据式(1) 构造具有保序性的判断矩阵 A^*.

根据定理 4 及文献[8] 中的强保序性条件可知, 本文的结果不仅适用于不具有协调性的特征向量排序法, 而且适用于所有具有协调性的排序方法(如: 对数最小二乘法、梯度特征向量法、最小偏差法、广义最小偏差法、混合最小二乘法、χ^2 法、广义χ^2 法等), 因而具有广泛的应用前景

性质 1　设 $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_{A^*}$ 分别为A, B, A^* 的最大特征根; $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$, $v=(v_1,v_2,\cdots,v_m)^{\mathrm{T}}$, $\omega^*=(\omega_1^*,\omega_2^*,\cdots,\omega_{n+m}^*)^{\mathrm{T}}$ 分别为对应 $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_{A^*}$ 的主特征向量, 则 ω, v, ω^* 三者之间的关系为

$$\omega^*=(k\omega^{\mathrm{T}},\alpha v^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.\quad(2)$$

其中: $\alpha=\frac{1}{2m}[\lambda_B-\lambda_A+\sqrt{(\lambda_B-\lambda_A)^2+4mn}]$; ω^* 为未归一化的主特征向量

从式(2) 中可以看出, k 取值越大, 在原有元素中导入新元素之后, 对应于原有元素的权值越大, 而对应于新元素的权值则相对地减少; 反之, k 取值越小, 在原有元素中导入新元素之后, 对应于原有元素的权值也越小, 而对应于新元素的权值则相对地增大 因此, 参数 k 的取值取决于决策者对原有元素的重视程度, 也即取决于决策者对新、旧元素的主观偏好.

利用文献[1] 中给出的衡量判断矩阵A 的一致性程度的指标公式

$$\mathrm{C.I}(A)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ij}\frac{\omega_j}{\omega_i}+a_{ji}\frac{\omega_i}{\omega_j}-2\right),$$

易知:

性质 2　对于判断矩阵A, B, A^* (与性质 1 中相同), 设 $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_{A^*}$ 分别为A, B, A^* 的最大特征根; $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$, $v=(v_1,v_2,\cdots,v_m)^{\mathrm{T}}$, $\omega^*=(\omega_1^*,\omega_2^*,\cdots,\omega_{n+m}^*)^{\mathrm{T}}$ 分别为对应 $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_{A^*}$ 的主特征向量; $\mathrm{C.I}(A)$, $\mathrm{C.I}(B)$, $\mathrm{C.I}(A^*)$ 分别为判断矩阵A, B, A^* 的一致性指标, 则 $\mathrm{C.I}(A)$, $\mathrm{C.I}(B)$, $\mathrm{C.I}(A^*)$ 之间关系为

1)　$\mathrm{C.I}(A^*)=\frac{1}{(n+m)(n+m-1)}\times[n(n-1)\mathrm{C.I}(A)+m(m-1)\mathrm{C.I}(B)+mn\beta]$;

2)　$\mathrm{C.I}(A^*)\le\mathrm{C.I}(A)+\mathrm{C.I}(B)+\beta$,

其中　$\beta=\alpha+1/\alpha-2$

特别地, 若判断矩阵A, B 均为一致性判断矩阵(即 $\mathrm{C.I}(A)$, $\mathrm{C.I}(B)$ 都为零), 则判断矩阵A^* 也是一致性的

4　算例分析

例 1　设对于某一决策问题, 决策者对现有 4 个方案之间两两比较所得到的判断矩阵和对后导入的 3 个新方案之间两两比较所得的判断矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 7\\ 1/2 & 1 & 3 & 4\\ 1/4 & 1/3 & 1 & 2\\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 1/4 & 1/2 & 1\end{bmatrix}.$$

利用特征向量排序法计算它们的主特征向量

$$\omega=(0.514\ 677, 0.295\ 884, 0.120\ 683, 0.068\ 756)^{\mathrm{T}},$$

$$v=(0.474\ 230, 0.376\ 397, 0.149\ 373)^{\mathrm{T}}.$$

假设决策者根据实际情况及自己的偏好设定 $k=2$, 则根据定理 4 的条件构造判断矩阵

$$A^{*}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 2.170\,580 & 2.734\,756 & 6.891\,165 \\ 1/2 & 1 & 3 & 4 & 1.247\,850 & 1.572\,191 & 3.961\,680 \\ 1/4 & 1/3 & 1 & 2 & 0.508\,964 & 0.641\,254 & 1.615\,861 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 & 0.289\,969 & 0.365\,338 & 0.920\,595 \\ 0.460\,706 & 0.801\,378 & 1.964\,776 & 3.448\,645 & 1 & 1 & 4 \\ 0.365\,663 & 0.636\,055 & 1.559\,444 & 2.737\,191 & 1 & 1 & 2 \\ 0.145\,113 & 0.252\,418 & 1.623\,743 & 1.086\,254 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

其主特征向量为

$$\omega^{*}=(0.338\,692\,5, 0.194\,711\,6, 0.079\,417\,8, 0.045\,246\,1, 0.162\,154\,39, 0.128\,702\,16, 0.051\,075\,40)^{T}=(a\omega^{T}, bv^{T})^{T}.$$

其中: $a=0.658\,1$, $b=0.341\,9$. 故而符合定理 4 的结论, 即判断矩阵 A^{*} 的排序权值, 保持它们各自原有的权值之比.

5 结 语

文献[6, 7]所给出的新元素导入的强保序充要条件, 虽具有一定的理论价值, 但在实际应用时只能对给出的判断矩阵保序性进行检验, 并不能直接构造具有保序性的判断矩阵. 本文提出的强保序条件则弥补了这方面的缺陷. 只需知道原判断矩阵和导入新元素所构成的判断矩阵及它们的特征向量, 应用定理 4 中的公式, 根据实际情况及决策者的主观偏好, 通过选择适当的参数 k, 就可构造所需要的具有保序性的判断矩阵, 因而具有重要的实际意义.

参考文献(References):

[1] Saaty T L. *The Analytic Hierarchy Process*[M]. New York: McGraw-Hill Inc, 1980. 152-215.

[2] Saaty T L, Vargas L G. Inconsistency and rank preservation[J]. *J of Mathematical Psychology*, 1984, 28(2): 205-214.

[3] Bryson N, Mobolurin A. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems[J]. *European J of Operational Research*, 1995, 96(2): 379-386.

[4] Saaty T L. Concepts, theory and techniques: Rank generation, preservation and reversal in the AHP[J]. *Decision Sciences*, 1987, 18(1): 157-177.

[5] Huang X L. A general principle of rank preservation for adding elements[A]. *Preprints of ISAHP*[C]. Tianjin, 1988.

[6] 王秋平. AHP 中严格保序性定理条件的修正[J]. 系统工程理论与实践, 1996, 16(10): 83-86.
(Wang Q P. Condition of strict theorem of rank preservation being revised in the AHP[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1996, 16(10): 83-86.)

[7] 孙疆明. AHP 中新元素导入的保序性[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(4): 136-140.
(Sun J M. Isotonicity of leading new elements in AHP[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1999, 19(4): 137-140.)

[8] 章志敏, 徐梅芳, 徐泽水. 层次分析中新元素导入的保序性条件[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(9): 86-90.
(Zhang Z M, Xu M F, Xu Z S. The conditions of rank preservation for adding a group of new elements in AHP[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1998, 18(9): 86-90.)

[9] 贾兰香, 陈宝谦. 层次分析决策方法排序问题的一般性质[J]. 南开大学学报(自然科学版), 1991, (2): 19-28.
(Jia L X, Chen B Q. General properties of the priority methods in the analytic hierarchy process[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis NanKaiensis*, 1991, (2): 19-28.)