

文章编号: 1001-0920(2004)04-0468-03

周期性系统的能控性理论

郭 戈

(兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃 兰州 730050)

摘 要: 主要探讨周期性系统(包括连续和离散两种情形)的能控性问题. 对文献中有关周期为 T_0 的连续周期性系统的能控性结论进行了完善, 推导出系统能控等价于单周期 $(0, T_0)$ 内能控的结论, 并将这些结论直接推广到离散周期性系统; 然后讨论了离散前后周期性系统能控性保持不变的可能性, 证明在采用不等间距采样方式时, 离散前后周期性系统的能控性保持不变.

关键词: 周期性系统; 能控性; 能控性条件; 离散化

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Controllability theory of periodic systems

GUO Ge

(College of Electrics and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

E-mail: guog@lut.cn

Abstract: The controllability of both continuous and discrete periodic systems is dealt with. The controllability results for continuous T_0 -periodic systems in literatures are improved to $(0, T_0)$ controllability. At the same time, these results are directly extended to discrete periodic systems. Then a discussion on the possibility of retaining periodic system controllability during discretization is made, resulting in the conclusion that the controllability of linear periodic systems does not loss during discretization using the nonequidistant sampling pattern.

Key words: periodic systems; controllability; controllability conditions; discretization

1 引 言

随着控制系统理论的发展以及数字控制和信号处理技术的进步, 人们重新展开了关于周期性系统及其控制理论的研究^[1-4]. Hewer^[5]将线性连续定常系统能控性的特征值-特征向量判据推广到周期性系统, 下文称之为 H-能控性. Hewer 还通过证明指出, 如果周期为 T_0 的 n 阶周期性系统能控, 它必在区间 $(0, nT_0)$ 上能控, 并证明了周期性系统的 H-能控性与经典的 Kaman 能控性(K-能控性)等价. 文献[6]对 Hewer 的结论进行了改进, 指出完全能控的周期性系统在区间 $(0, kT_0)$ 上完全能控, 其中 k

n 是单周矩阵的最小多项式阶次

对于周期性系统, 人们最关心它们在单个周期内的属性. 研究周期性系统的能控性, 弄清其是否在单个周期内能控是非常重要的和必要的. 本文以上述研究成果作为出发点, 对它们进行了改进. 主要工作包括将周期为 T_0 的连续周期性系统的能控性结论由区间 $(0, nT_0)$ 和 $(0, kT_0)$ 能控改善到单个周期 $(0, T_0)$ 内能控, 并将这些结论推广到离散周期性系统. 为了研究如何保证周期性系统的能控性在离散化过程中保持不变的问题, 本文采用文献[7]中提出并已证明不影响定常线性系统的能观性和能控性的

收稿日期: 2003-03-12; 修回日期: 2003-05-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50274003); 国家科技攻关项目(2002BA 901A 28); 甘肃省省长基金资助项目(GS015-A 52-012); 甘肃省自然科学基金资助项目(ZS021-A 25-017-G).

作者简介: 郭戈(1972—), 男, 甘肃庄浪人, 博士, 从事移动机器人、系统与控制理论等研究

不等间距采样方式, 并证明, 当采用这种采样方式时, 线性周期性系统的能控性在离散化过程中保持不变

2 连续周期性系统的能控性

考虑如下周期性系统:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \quad (1)$$

其中: $x: R \rightarrow R^n$ 为状态变量, $u: R \rightarrow R^m$ 是输入变量, $A: R \rightarrow R^{n \times n}$ 和 $B: R \rightarrow R^{n \times m}$ 均为周期为 T_0 的分段连续周期性函数 记 $\Phi(t, \tau)$ 为系统状态转移矩阵, 则显然有

$$\Phi(t + T_0, \tau + T_0) = \Phi(t, \tau). \quad (2)$$

矩阵 $\Phi(0, T_0)$ 对于线性周期性系统非常重要, 称为单周矩阵

文献[8]已经证明, 如果周期性系统(1) 在区间 $(0, nT_0)$ 内能控, 则该系统完全能控, 这里 n 是系统的阶次 该结论见如下引理:

引理 1 如果矩阵

$$W_n = \int_0^{nT_0} \Phi(0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(0, t)dt \quad (3)$$

正定, 则周期性系统(1) 能控

文献[6] 将该结论简化如下:

引理 2 如果周期性系统(1) 能控, 它必在区间 $(0, kT_0)$ 内能控, 其中 $k \leq n$ 是单周矩阵的最小多项式阶次

本节的主要结论可以归结为: 对于线性周期性系统, 系统能控与区间 $(0, T_0)$ 能控一致, 见定理 1. 为了便于后面的证明, 首先给出如下引理:

引理 3 能控性矩阵 W_n 满足如下关系:

$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi W_1 (\Phi^T)^k, \quad (4)$$

其中 $\Phi = \Phi(0, iT_0)$. (5)

证明 由式(3) 可知

$$W_{i+1} = W_i + \int_{iT_0}^{(i+1)T_0} \Phi(0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(0, t)dt \quad (6)$$

对 $i = 1, 2, \dots, n$ 均成立 令 $v = t - iT_0$, 考虑到系统的周期性, 根据式(2) 和式(5) 有

$$B(t) = B(v), \Phi(0, t) = \Phi\Phi(0, v), \Phi^T(0, t) = \Phi^T(0, v)\Phi^T. \quad (7)$$

于是由式(3), (6) 和(7) 可得

$$W_{i+1} = W_i + \Phi W_1 \Phi^T. \quad (8)$$

同样根据式(2) 和(5), 式(8) 可写为

$$W_{i+1} = W_i + \Phi W_1 (\Phi^T)^i. \quad (9)$$

对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 都利用上述关系, 便可推出式

(4).

定理 1 当且仅当在区间 $(0, T_0)$ 内能控时, 周期性系统(1) 能控 即周期性系统能控的充分必要条件是矩阵

$$W_1 = \int_0^{T_0} \Phi(0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(0, t)dt \quad (10)$$

正定

证明 必要性: 采用反证法, 假设该周期性系统完全能控, 但在区间 $(0, T_0)$ 内不能控, 即矩阵 W_n 正定, W_1 非正定 则根据式(10) 可知 W_1 为奇异矩阵, 于是根据引理 3 可直接导出矩阵 W_n 奇异, 这与题设相矛盾 所以, 如果周期性系统能控, 则矩阵 W_1 必为正定, 即系统在区间 $(0, T_0)$ 内能控

充分性: 当矩阵 W_1 正定时, 考虑到状态转移矩阵 Φ 非奇异, 此时有

$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^k W_1 (\Phi^T)^k = \int_0^{nT_0} \Phi^k \Phi(0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(0, t)(\Phi^T)^k dt > 0 \quad (11)$$

即周期性系统能控

3 离散周期性系统的能控性

周期性系统的离散状态方程描述如下:

$$x(l+1) = \Phi(l)x(l) + \Gamma(l)u(l). \quad (12)$$

其中: $l \in Z^+$, 状态 $x(l) \in R^n$, 控制输入 $u(l) \in R^m$. 矩阵 $\Phi(l)$ 和矩阵 $\Gamma(l)$ 均为周期为 N 的矩阵, 即连续周期性系统每个周期 T_0 内进行 N 次采样, 这里 $N = n + 1$, 其选择应满足香农采样定理 对于该离散周期性系统, 有如下结论:

定理 2 离散周期性系统(12) 能控的充分条件是矩阵

$$[W]_n = \sum_{l=0}^{nN} \Phi(0, l)\Gamma(l)\Gamma^T(l)\Phi^T(0, l) \quad (13)$$

正定

该定理可由对应的连续周期性系统能控性判据(引理 1) 直接得出, 这里略去其证明过程 进而该定理可简化为下述两个结论:

定理 3 如果周期性系统(12) 能控, 则它必在区间 $(0, kN)$ 上能控, 即矩阵

$$[W]_k = \sum_{l=0}^{kN} \Phi(0, l)\Gamma(l)\Gamma^T(l)\Phi^T(0, l)$$

正定 其中 $k \leq n$ 为单周矩阵 $\Phi(N, 0)$ 的最小多项式的阶次, $\Phi(N, 0)$ 对应于连续周期性系统中的单周矩阵 $\Phi(T_0, 0)$.

定理4 周期性系统(12)能控的充分必要条件是它在区间 $(0, N)$ 内能控, 即矩阵

$$[W]_1 = \int_0^N \Phi(0, t) \Gamma(t) \Gamma^T(t) \Phi^T(0, t) dt \quad (14)$$

正定

4 保证离散前后周期性系统能控性一致

当系统通过采样和保持从连续形式化为离散形式时, 其能控性等结构属性会发生变化, 从而导致离散后的系统无法用输出反馈实现闭环稳定控制。如果离散化过程使系统失去能控性, 判断离散系统能控或不能控就无任何意义。因此, 这里急需回答的问题是: 能否保证系统能控性在离散化过程中保持不变? 许多年来, 控制界的学者们一直在设法寻找能回答这一问题的离散化方法^[9, 10]。文献[6]提出了一种不等间距周期性采样方法, 每个采样周期由连续 M 个间隔为 T 的采样点后接一个间隔为 \bar{T} 的采样点组成, 即采样时间点取为

$$t_k = \begin{cases} kT, & k = 1, 2, \dots, M; \\ MT + \bar{T}, & k = M + 1; \\ t_{k-(M+1)} + MT + \bar{T}, & k > M + 1. \end{cases} \quad (15)$$

其中: $M \in \mathbb{Z}^+$ ($M \in \mathbb{N}$); $T, \bar{T} \in \mathbb{R}^+$, 且 T/\bar{T} 为无理数。这里, $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^+$ 和 \mathbb{Z}_0^+ 分别表示实数、整数、正实数、正整数和非负整数集合。

采用该采样模式和零阶保持器, 系统(1)可离散化为形如式(12)的离散系统。文献[7]已证明, 对于线性定常系统这种离散化过程不影响系统的能控性和能观性。本文将这一结论推广到周期性系统, 并得到如下结论:

定理5 如果采用式(15)的采样方法将连续周期性系统离散化为系统(12), 则离散系统(12)的能控性与其连续系统(1)的能控性等价, 即两者互为充要条件。

由于线性周期性系统可看作特殊形式的时变线性系统, 而关于线性时变系统在上述采样方式下的能控性结论, 参见文献[11], 故定理5的证明略。

5 结论

本文的主要工作在于, 证明了文献[5, 6]中关于连续线性周期性系统的能控性结论可从区间 $(0, nT_0)$ 能控或 $(0, kT_0)$ 能控改善到区间 $(0, T_0)$ 能控, 同时将这些结论直接推广到离散周期性系统。另外, 本文还讨论了将系统从连续形式化为离散形式的过程中保证系统能控性不变的可能性问题, 所得的结论是: 如果采用文献[7]中的采样方式, 则线性周期性系统的能控性在离散化过程中保持不变。

第2部分的结论实际上给出了文献[6]中隐含的关于周期性矩阵Riccati微分方程的一个重要结论的证明, 该Riccati微分方程建立在一个能控矩阵对 (A, B) 和一个能观矩阵对 (A, C) 的基础上。

第4部分的结论是在对文献[7]中关于线性定常系统能控性结论进行推广的基础上, 针对周期性系统得到的, 但该结论不限于周期性系统, 它适合于一般的时变线性系统。

根据对偶原理, 本文的所有结论都可直接推广到对应的能观性结论。

参考文献(References):

- [1] Bittanti S, Colaneri P. From singular to nonsingular filtering for periodic systems: Filling the gap with the spectral interactor matrix [J]. *IEEE Automatic Control*, 1998, 43(2): 222-227.
- [2] Bittanti S, Colaneri P. Invariant representations of discrete time periodic systems [J]. *Automatica*, 2000, 36: 1777-1793.
- [3] Dahleh, M A, Vulgaris, P G. Optimal and robust controllers for periodic and multirate systems [J]. *IEEE Automatic Control*, 1992, 37(1): 90-99.
- [4] Grasselli O M, Longhi S. Zeros and poles of linear periodic multivariable discrete-time systems [J]. *IEEE Circuits, Systems and Signal Processing*, 1988, 7(1): 16-20.
- [5] Hewer G A. Periodicity, detectability and the matrix Riccati equation [J]. *SIAM J Control Optimization*, 1975, 13(5): 1235-1251.
- [6] Bittanti S, Colaneri P, Guardabassi G. H⁻controllability and observability of linear periodic systems [J]. *SIAM J Control Optimization*, 1984, 22(6): 889-893.
- [7] Kreisselmeier G. On sampling without loss of observability/controllability [J]. *IEEE Automatic Control*, 1999, 44(5): 1021-1025.
- [8] Brunovsky P. Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems [J]. *J of Differential Equations*, 1969, 6(2): 296-313.
- [9] Hou L, Michel A N. Some qualitative properties of multirate digital control systems [J]. *IEEE Automatic Control*, 1997, 42(4): 765-770.
- [10] Chew K K, Tomizuka M. Digital control of repetitive errors in disk drive systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1998, 10(1): 16-20.
- [11] 郭戈, 王伟. 保证能控性和能观性的采样方式 [J]. *控制与决策*, 2003, 18(1): 66-72.
(Guo G, Wang W. Sampling guaranteeing controllability and observability [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(1): 66-72.)