文章编号: 1001-0920(2004)04-0471-03

一类交联大系统的分布控制: LMI方法

翟 丁, 张庆灵, 陈跃鹏
(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 以图的拓扑结构为基础, 讨论由不同的交联子系统组成的大系统分布镇定控制器合成问题. 首先通过例子描述了系统邻接矩阵的求法; 然后给出了适定的概念; 最后通过线性参变控制, 获得了用有限维数线性矩阵不等式描述的充分条件.

关键词: 交联系统; 分布控制; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Distributed control for interconnected large-scale systems: LMI Approach

ZHAI Ding, ZHANG Qing-ling, CHEN Yue-peng
(College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China, Correspondent: ZHAI Ding, E-mail: zhaiding@etang. com)

Abstract: Based on topology structure of graph, the compound problem of distribute stabilization controllers is discussed for large-scale systems with different interconnected subsystems. The definition of well-posed is given. A sufficient condition is obtained using finite dimension linear matrix inequalities (LMI) describing by linear parameter-variety control.

Key words: interconnected systems; distributed control; LMI

1 引 言

近年来人们对大系统的控制问题进行了大量的研究[1~5], 广泛存在的一类交联分布控制问题, 引起了众多学者的注意[6,7]. 例如由多个子网组成的大系统、大型的电力系统、通信系统等, 这类系统都具有空间子系统分布的特性. 本文将分布子系统以图的方式表示, 通过线性参变控制, 得到了简单的用有限维数线性矩阵不等式描述的充分条件.

2 预备知识

一个二元组$(V(G), E(G))$称为图. 其中: $V(G)$是非空集合称为顶点, $E(G)$是顶点之间边的集合. 一般$G=(V, E)$表示图, 图G的边可以是有方向的, 也可以是无方向的. 它们分别称为有向边(或弧)和无向边, 用$a_k=(v_i, v_j)$表示, 这时v_i与v_j是相邻顶点. 由无向边组成的图称为无向图. 若n个子系统的顶点V的集合为$\{1, \cdots, n\}$, 无向边为$E:=\{e_{ij}, i\leq j$ 且 $i, j\in G\}$, 则当子系统具有反馈时, 可得到e_{ij}边的结构[8,9].

邻接矩阵表示了顶点之间的邻接关系, 无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵. 邻接矩阵的构造如例1所示.

例1 设$V(G)=\{v_1, \cdots, v_n\}$, 若$n$阶方阵

收稿日期: 2003-02-28; **修回日期**: 2003-09-22
基金项目: 辽宁省普通高校学科带头人基金资助项目(124210); 辽宁省科技基金资助项目(2001401041).
作者简介: 翟丁(1970—), 男, 辽宁铁岭人, 讲师, 博士, 从事大系统分散控制的研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事广义系统的广义系统的分散控制、容错控制等研究.

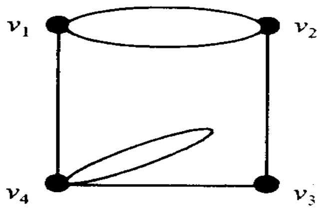

图1 顶点的邻接表示

$E(G) = (e_{ij})$, 其元素 e_{ij} 是 v_i 和 v_j 的边数, 则 $E(G)$ 为图 G 的邻接矩阵, 图1的邻接矩阵为

$$E(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \; v_2 & \; v_3 & \; v_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

对于边, 可以定义一个整数 $t_{ij}(i > j)$ 来构造它的大小. 令 $t_{ij} = t_{ji}, i > j$. 若 $t_{ij} = 0$ 则子系统 i 和 j 不交联. 对于每一个边, 存在4种信号: 来自子系统 j 的子系统 i 的输入(v_{ij})、来自子系统 i 的子系统 j 的输入(v_{ji})、子系统 i 向子系统 j 的输出(h_{ij})、子系统 j 向子系统 i 的输出(h_{ji}). $v_{ij}, v_{ji}, h_{ij}, h_{ji} \in R^{t_{ij}}$, 可以明确写出 $v_{ij}, h_{ij} \in R^{t_{ij}}(i, j \in V)$. 对于任意 $i \in V$, 令 $t_i := \sum_{j=1} t_{ij}$, 每一个子系统 i 的输入 v_i 与输出 h_i 的状态方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ h_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{pp} & \Phi_{pl} \\ \Phi_{lp} & \Phi_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ v_i(t) \end{bmatrix}, \forall t \geq 0. \qquad (1)$$

其中

$$v_i = [v_{i1} \cdots v_{il}]^{\mathrm{T}}, h_i = [h_{i1} \cdots h_{il}]^{\mathrm{T}}.$$

式(1)中, $x_i(t) \in R^{\mu_i}(t \geq 0)$ 且所有的矩阵具有适当维数. 为了使这两个信号维数相同, 当 v_{ij} 或 h_{ij} 的元素为零时, $\Phi_{pl}, \Phi_{lp}, \Phi_{ll}$ 必须增加一行或一列零元素. Φ_{ll} 是 $t_i \times t_i$ 的方阵且不失一般性. 若在每一个顶点确定输入和输出的关系, 可得到所有闭环分布系统的表达式且要求 $v_{ij} = h_{ij}(i, j \in V)$, 定义如下:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{ij} = [h_{ij} \quad v_{ij}]^{\mathrm{T}}, \lambda_i = [\lambda_{i1} \cdots \lambda_{is}]^{\mathrm{T}}. \qquad (2)$$

$\lambda_{ij} = \Gamma \lambda_{ji}(i, j \in V)$. 当这个条件固定时, 则 v_i 和 h_i 满足交联.

3 主要结果

在一个复杂的分布系统中存在若干个子系统, 则系统一定存在适定和稳定的问题. 为了使系统达到要求, 给出下面的定义和定理:

定义1 如果对于任意初始条件 $x_i(0)$, $i = 1, \cdots, n$, 满足方程(1)和(2)的信号 x_i, v_{ij}, h_{ij} 存在且唯一, 那么对于所有的 i, 若其邻接矩阵为 $E(G) \in R^{n \times n}$ 和状态矩阵为 $\Phi_{pp}, \Phi_{pl}, \Phi_{lp}, \Phi_{ll}$, 则所定义的系统称为适定的.

定理1 若对于所有的 $i \in V$, 存在 $t_i \times t_i$ 的对称矩阵 η, 使得 $\eta > 0$ 和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i^{\mathrm{T}} \eta x_i - \sum_{i=1}^{n} \tau_i < 0 \qquad (3)$$

成立, 且对于所有初始条件 $x_i(0)$ 和信号 v_i, h_i 满足交联, 那么分布系统是适定的且稳定.

证明 当 $v_i, h_i \neq 0$ 满足交联时, 假设 $x_i(0) = 0, x_i \equiv 0(i \in V)$, 那么 $\tau_i < 0$. 反之, $\tau_i > 0$. 无论交联是否满足, 都有 $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \equiv 0$. 这样, 当且仅当系统是适定时, $v_i = h_i \equiv 0, x_i \equiv 0$, 且交联成立. 如果认为系统适定, 那么 x_i 是唯一的, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mathrm{T}} \eta x_i\right) < \sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0.$$

因为 $\eta > 0$, 所以 $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mathrm{T}} \eta x_i$ 是系统的 Lyapunov 函数. □

推论1 若存在对称矩阵 $\eta \in R^{t_i \times t_i}$, $\eta_{ij}^1 \in R^{t_{ij} \times t_{ij}}$, $\eta_{ij}^2 \in R^{t_{ij} \times t_{ij}}$ 和 $\eta > 0$ 且 η_{ij}^2 为斜对称矩阵, 以及

$$\left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ \Phi^i_{pp} & \Phi^i_{pl} \\ \hline \Phi^i_{lp} & \Phi^i_{ll} \\ 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_i^{11} & A_i^{12} \\ 0 & 0 & (A_i^{12})^{\mathrm{T}} & A_i^{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ \Phi^i_{pp} & \Phi^i_{pl} \\ \hline \Phi^i_{lp} & \Phi^i_{ll} \\ 0 & I \end{array}\right] < 0,$$
$$i \in V. \qquad (4)$$

其中

$$A_i^{11} := \mathrm{diag}(\eta_{i1}^1, \cdots, \eta_{in}^1),$$
$$A_i^{22} := \mathrm{diag}(-\eta_{i1}^1, \cdots, -\eta_{in}^1),$$
$$A_i^{12} := \mathrm{diag}(\eta_{i1}^2, \cdots, \eta_{ii}^2, -(\eta_{(i+1)i}^2)^{\mathrm{T}}, \cdots, -(\eta_{ni}^2)^{\mathrm{T}}),$$

则分布系统适定并稳定.

由于给定的控制器具有相同的图 G, 因此是闭环系统. 闭环系统的子系统满足下列状态矩阵:

$$\begin{bmatrix} (\Phi^i_{pp})_c & (\Phi^i_{pl})_c \\ (\Phi^i_{lp})_c & (\Phi^i_{ll})_c \end{bmatrix} = \Phi^i + \left[\begin{array}{c} \beta^i_p \\ \hline \beta^i_l \end{array}\right] Y [\alpha^i_p \mid \alpha^i_l]. \qquad (5)$$

$$\Phi^i := \left[\begin{array}{cc|cc} \Phi^i_{pp} & 0 & \Phi^i_{pl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \Phi^i_{lp} & 0 & \Phi^i_{ll} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$Y_i := \begin{bmatrix} (\Phi^i_{pp})_k & (\Phi^i_{pl})_k & (\Theta^i_l)_K \\ (\Phi^i_{lp})_k & (\Phi^i_{ll})_k & (\Theta^i_l)_k \\ (\Delta^i_p)_k & (\Delta^i_l)_k & \Psi_{ik} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

$$\beta^i_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Theta^i_p \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta^i_l := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Theta^i_l \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

$$\alpha^i_p := \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \\ \Delta^i_P & 0 \end{bmatrix}, \alpha^i_l := \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \\ \Delta^i_l & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

其中 $i \in V$. 每一个子系统的顺序是 $\pi^c_i := \pi^k_i + \pi^f_i$. 对每一个对称矩阵 $\eta_c \in R^{\pi_i \times \pi_i}$ 分块, 有

$$\eta_c = \begin{bmatrix} \eta_f & \eta_{fk} \\ \eta_{fk} & \eta_k \end{bmatrix}. \tag{9}$$

其中: $\eta_f \in R^{\pi_i \times \pi_i}$, $\eta_k \in R^{\pi_i \times \pi_i}$. 同样, 若 $\eta_{ij} \in R^{t_{ij} \times t_{ij}}$, 划分它为了适应执行器和控制器的交联输入和输出, 即

$$(\eta_{ij})_c = \begin{bmatrix} (\eta_{ij})_f & (\eta_{ij})_{fk} \\ (\eta_{ij})_{kf} & (\eta_{ij})_k \end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中: $(\eta_{ij})_f \in R^{t_{ij} \times t_{ij}}$, $(\eta_{ij})_k \in R^{t_{ij} \times t_{ij}}$. 注意到, 若 $(\eta_{ij})_{kf} = (\eta_{ij})^{\mathrm{T}}_{fk}$, 则 $(\eta_{ij})_c$ 是对称的

4　结　　语

本文得到了一类大系统分布控制比较简单的充分条件, 通过本方法可以利用线性矩阵不等式解决网络通讯中的一类控制问题

参考文献(References):

[1] Zhai D, Zhang Q L. The decentralized control for composite systems with input saturation[J]. *Control Theory and Application*, 2003, 20(2): 280-282

[2] 张庆灵. 广义大系统的分散控制与鲁棒控制[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1997.

[3] 张庆灵. 广义交联系统的鲁棒分散控制[J]. 控制与决策, 1995, 10(1): 70-74.
(Zhang Q L. Decentralized robust control for interconnected pescriptor systems[J]. *Control and decision*, 1995, 10(1): 70-74.)

[4] Yang G H, Zhang S Y. Decentralized robust control of interconnected systems with time-varying uncertainties[J]. *Automatica*, 1996, 32(11): 1603-1608.

[5] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Decentralized control of symmetric systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 42(2): 145-149.

[6] Bamieh B, Paganini F, Dahleh M. Distributed control of spatially invariant system[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1091-1118.

[7] 陈欣, 张国强, 曹曙光, 等. 分布控制系统中一种控制器参数优化方法[J]. 控制与决策, 1996, 11(5): 571-579.
(Chen X, Zhang G Q, Cao S G, et al. An optimization method of controller parameter in distributed control system[J]. *control and Decision*, 1996, 11(5): 571-579.)

[8] 戴一奇, 胡冠章, 陈卫. 图论与代数结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.

[9] 约翰逊 D E, 约翰逊 J R. 图论与工程应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1982

(上接第 461 页)

4　结　　语

对于积分加纯滞后系统, 几种不同形式的 Smith 预估算法均存在这样或那样的不足, 针对这一情况, 本文提出了一种新的双预测 PI 控制算法, 给出了它的结构形式和性能分析. 这种方法控制结构简单, 可调参数少, 而且参数有明显的物理意义, 便于参数的整定. 它有良好的跟踪性能和抗干扰性能, 鲁棒稳定性能好. 仿真结果表明, 这种算法优于其他算法

参考文献(References):

[1] Watanabe K, Ito M. A process-model control for linear system with delay[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(6): 1261-1266.

[2] Astrom K J, Hang C C, Lim B C. A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead time[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(2): 343-345.

[3] Zhang W D, Sun Y X. Modified Smith predictor for controlling integrator/time delay process[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1996, 35(8): 2769-2772.

[4] Mantausek M R, Micic A D. A modified Smith predictor for controlling process with an integrator and long dead-time[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(8): 1199-1203.

[5] Mantausek M R, Micic A D. On the modified Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(8): 1603-1606.

[6] Chien I L, Peng S C, Liu J H. Simple control method for integrating processes with long deadtime[J]. *J of Process Control*, 2002, 12(3): 391-404.