

文章编号: 1001-0920(2004)04-0367-05

模糊系统作为通用逼近器的 10 年历程

刘慧林, 冯汝鹏, 胡瑞栋, 刘春华

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 总结了模糊系统作为通用逼近器在存在性、充分性和必要性 3 个方面所作过的主要理论研究, 并分析了这些理论成果在工程上的若干应用, 最后就该理论的未来发展方向作了大胆而理性的分析和预测

关键词: 模糊系统; 逼近; 存在性; 充分条件; 必要条件

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Decennary development of fuzzy systems as universal approximators

L I U H u i - l i n , F E N G R u - p e n g , H U R u i - d o n g , L I U C h u n - h u a

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China
Correspondent: L I U H u i - l i n , E m a i l : l h l x b @ 1 6 3 . c o m)

Abstract: Three aspects, the existence theorems, the sufficient theorems and necessary theorems, of fuzzy systems as universal approximators are systemically summarized. And the present situation of these aspect of the theory are given. Then main parts of the applications of the theory are generalized. At last, main directs of its development are given.

Key words: fuzzy systems; approximation; existence; sufficient condition; necessary condition

1 引 言

自从 Zadeh^[1]教授在 1965 年开创模糊集理论以来, 模糊数学得到了蓬勃发展, 并在 1974 年首次得以应用于控制领域. 由于模糊系统在这方面的应用一直缺乏严密的理论分析, 人们一直难以将模糊系统充分地应用在各个领域. 鉴于这种情况, 在 1992 年, Wang^[2]和 Kosko^[3]同时提出可将模糊系统作为通用逼近器. 从此, 关于模糊系统作为通用逼近器的研究相继展开. 一些学者从数学和实际应用等不同角度对模糊系统的通用逼近性作了不同程度的研究. 这主要包括存在性、充分性和必要性 3 方面内容. 到目前为止已经得出了许多实用性的结论, 有的已成功应用于工程中, 它为模糊系统在系统辨识、控制等方面提供了重要的理论依据.

2 模糊系统的构成及类型

一般模糊系统主要有 4 个组成部分: 模糊化接口、模糊规则库、模糊推理和反模糊化接口. 常用的模糊化接口有两种: 单点模糊化接口和非单点模糊化接口. 这两种接口的主要区别在于: 非单点模糊化接口能抑制输入信号的噪声, 而单点模糊化接口则没有这个能力. 模糊系统的模糊规则有 Mandani 模糊系统和 T-S 模糊系统两种常用形式. 其他的几种变形通常是由这两种形式变化来的. 模糊推理的研究可参考文献[4, 5]. 最常用的反模糊接口有重心、中心平均和最大平均反模糊接口. Filev 和 Yager 提出了更为一般化的反模糊接口^[6]. 由于模糊系统本身具有很强的物理意义和强语言特性, 这也为如何利用模糊系统提供了极大的灵活性.

收稿日期: 2002-12-30; 修回日期: 2003-03-18

作者简介: 刘慧林(1974—), 男, 湖北黄冈人, 博士生, 从事模糊系统、模糊控制的研究; 冯汝鹏(1938—), 男, 北京人, 博士生导师, 从事智能系统、智能控制等研究.

3 模糊系统的通用逼近性理论研究

对于模糊系统的通用逼近性研究,无论是Mamdani模糊系统还是T-S模糊系统,均是针对系统的构成来研究模糊系统的各个构件对逼近性能的影响。在早期的模糊系统通用逼近性研究中,主要集中在一些特殊构造的模糊系统,对其进行存在性、充分性以及必要性的研究。具体体现在给定常用的模糊隶属函数模糊推理算子,针对各变量的模糊子集数与逼近精度之间的关系展开研究。

3.1 模糊系统的通用逼近性的存在性

Wang^[2]和Kosko^[3]分别针对不同的模糊系统,证明了模糊系统作为通用逼近器的存在性定理。Wang对具有Gaussian型隶属函数、乘积推理和重心反模糊方法的一类模糊系统是万能逼近器的形式给出了存在性定理证明,随后,针对多阶模糊系统的通用逼近性也作了存在性研究^[7]。而Kosko在构造出加性模糊系统后,在加性模糊系统模型上采用有限覆盖定理对模糊系统进行了通用逼近性的存在性分析,随后又与其他学者对具有椭圆规则的加性模糊系统的通用逼近性作了有益的探讨^[8]。

Buckley^[9,10]以一类模糊控制器的传递函数为分析对象,从泛函的角度给出了Sugeno模糊系统的通用逼近性的存在性。Zeng和Sing^[11-13]给出了特定模糊系统的通用逼近性的存在性定理,并给出了提高全局通用逼近性的方法。Cao等^[14,15]从动态模型的角度分别对Mamdani模型和T-S模型进行了通用逼近性的分析研究。张恩勤等^[16]采用有限覆盖定理对一类加性模糊系统的通用逼近性的存在性进行了进一步的研究,并在文献[17]中针对采用三角形隶属函数的特殊模糊系统进行分析,指出这种模糊系统具有插值特性。毛志宏等^[18]构造了伸缩和平移算子,并针对由此构成的模糊系统进行了通用逼近性的存在性证明。

另外,Landajo^[11]通过证明一类加性模糊系统是稠密的,进而得出此类系统具有通用逼近性。苗志红和李红兴^[12]从合成规则推理出发构造出更一般的模糊系统,并给出了这类系统的通用逼近性存在性定理。Liu^[12]从格理论出发对模糊函数构造的多变量模糊多项式进行了系统逼近性的存在性研究。Wang^[19]从系统结构的角度分析了模糊系统的通用逼近性的存在性。Kwong^[20]从复杂系统的信息映射关系出发,从映射的角度分析通用逼近性的存在性,即从更广的范围证明模糊系统作为通用逼近器的误差是一个有界值。至此给出了针对一般模糊系统的

万能逼近性定理。

3.2 模糊系统的通用逼近性的充分性

对模糊系统的通用逼近性的存在性定理的证明,给模糊系统的通用逼近性的充分性和必要性的证明提供了理论依据。显然仅仅了解模糊系统的通用逼近性的存在性,无论对于理论研究还是工程应用都还远远不够。如何建立一个理想的模糊模型并达到想要的精度,这就促使学者们研究模糊系统的通用逼近性的充分条件。

首先开始这方面工作的是Ying^[21-23]。他从预先给定的逼近精度出发,采用构造性方法证明了Mamdani型和T-S型模糊系统作为万能逼近器的充分条件。并对具有简单线性规则后件的T-S型模糊系统的通用逼近性的存在性进行了证明。曾珂^[24]等通过对线性T-S型模糊系统给出了优于文献[22]的通用逼近性的充分性条件,但是应用范围较小。同时,曾珂等^[25]还针对采用模糊单点作为规则后件的Mamdani型模糊系统给出了其作为通用逼近器的充分条件,并在[26]中将Mamdani型模糊系统作为通用逼近器的充分条件和线性T-S模糊系统作为通用逼近器的充分条件进行了比较,得出在相同的模糊规则数的情况下,后者具有更高的逼近精度。

Zeng和Sing^[27-29]给出了由乘积推理算子和重心反模糊化产生的模糊系统比由最小推理算子和中心反模糊化或是最大平均反模糊化产生的模糊系统具有更好的逼近精度和特性。Chen^[30]采用与[31]相同的两种模糊系统模型,再利用[21]对这两种不同的模糊系统作为通用逼近器的充分条件进行比较,得出在相同逼近精度的情况下,非模糊规则后件的模糊系统所需的模糊规则数要少于采用模糊规则后件的模糊系统的模糊规则数。[30]得到的关于非线性规则后件的模糊系统作为通用逼近器的充分条件要优于[21],但不及[24]。就这3篇文章中所构成的系统而言,[21]中描述的系统是最具有一般性的,[30]中描述的系统应用范围较小一些,[24]可提供的系统类型最少。Mita^[32]和Kosko^[32]就模糊集的形状对加性模糊系统的通用逼近性的影响进行了阐述,为研究模糊系统在不同的隶属函数下作为通用逼近器作了很好的铺垫。刘晓华等^[33]对采用单点模糊化、模糊规则后件、S(T-conom)推理算子产生的模糊系统,采用和[30]相同的推导方法,得出的结果类似于[30]。

在这些分析证明中,对T-S型的模糊系统给出

的结论比较具有一般性, 因为在这种模型中其规则后件是线性函数, 且其前件与后件的推理关系固定。而 Mamdani 型的模糊系统就不同了, 采用单点模糊集作为规则后件时, 推理算子的灵活性也受到限制, 所能构成的模糊系统也比较单一。当规则后件为一般模糊集时, 推理蕴涵算子得到了充分的发挥, 但给证明这种模糊系统能否作为万能逼近器带来了困难。目前还没有针对一般 Mamdani 型的模糊系统给出其作为通用逼近器的充分逼近性定理。

3.3 模糊系统的通用逼近性的必要性

如何使系统辨识、模糊控制器设计的模糊系统尽可能的紧凑高效, 是一些学者研究模糊系统作为万能逼近器的必要条件的动机, 并进而使这些必要条件能用来指导模糊系统在工程上的应用。Ying 和 Ding 等^[33-36]对一般单输入单输出、多输入单输出的 Mamdani 型和典型的 T-S 型模糊系统作为通用逼近器已经作了深入的研究, 并且揭示了模糊逼近器的优点和缺点: 优点是只需要少数目的模糊规则就可以一致逼近那些具有复杂表达式但只有少量极值的多变量连续函数; 缺点是在逼近周期性或具有高度震荡的连续函数时, 模糊系统需要大量数目的模糊规则, 对此在[37]中有较详尽的描述。

但是在[33]和[34]中所考虑的一般 SISO 和 MISO 的 Mamdani 型模糊系统采用的是几乎任意连续输入模糊集、单点输出模糊集、乘性模糊逻辑和重心反模糊化, 这样构成的 Mamdani 型的模糊系统具有特殊性, 不能全面体现 Mamdani 型模糊系统的一般特性, 因为采用单点输出模糊集时蕴涵推理的灵活性受到限制。由[4]和[5]可知模糊规则算子的灵活性, 当采用单点输出函数时, 模糊系统的 Tnom 算子就退化成为乘积型算子。在逼近一些具有特殊性质的函数(如离散函数、分段不连续函数)时, Tnom 算子中的其他算子也许比乘积算子更为有效。

4 模糊系统的通用逼近性的工程应用

10 年来, 模糊系统作为通用逼近器的理论研究取得了长足的进步, 同时逼近器的理论在实际工程中的应用也有很大发展, 最广泛的应用是在模糊控制和模糊辨识上。

模糊控制器能实现任意的非线性连续映射, 该映射由隶属函数、模糊规则、推理方法及反模糊算子所决定。由于隶属函数构造的灵活性, 很难用一个明晰的表达式表达一般的隶属函数, 通常采用的方法是先将隶属函数分类, 再给出各类隶属函数的明晰

函数。同样, 由于模糊推理的复杂程度, 即各个推理算子之间不明朗的关系, 应用现有的理论也很难将其整合成统一的明晰表达式, 只能以分类的形式来表达, 若能从范函的角度将模糊推理的各算子整合成统一的明晰表达式, 那样统一的模糊控制器的表达式就不难给出。若能做到这一点, 对模糊系统进行系统的分析将会更为有效、简洁、明了。但目前的理论仍未做到这一点, 所以对模糊控制器的设计只能针对不同的实际需要, 对各种模糊系统构造出的模糊控制器具有的各种不同的性质进行比较、选优。在构造模糊控制器或辨识模糊系统的过程中, 是从被逼近函数出发或是以输入输出数据对为被逼近对象, 很多模糊控制器的构造或模糊系统的辨识实例, 是利用模糊系统的万能逼近性推导出来的, 且比其他的推导方便有效^[38-45]。Abe^[38]首先将输出范围划分为多个子区域, 以函数逼近理论作指导, 将构成的模糊系统应用于水净化的过程中并取得了良好的效果。随后, Abe^[39]又采用基于重心平均的 T-S 模型函数逼近器(FACG)从输入输出数据对中训练出椭圆形的模糊规则, 并应用于水净化过程中, 取得了比径向基函数网络训练得到的系统具有更好的效果。

Yam^[40,41]把基于乘积-和-重心规则的模糊系统表示成单变量模糊子系统的加或乘, 用每个子系统来逼近多项式函数, 并提出了采用多项式扩展和傅立叶系数的模糊逼近的构造方法。Homaitar^[42]等采用 Sugeno 逼近理论作指导, 提出了一个在反馈信息不够充分的情形下最优控制的有效实用方法, 实例证明这种方法构成的最优控制具有鲁棒性。Wang^[43]根据模糊系统的通用逼近性, 利用正交最小二乘来构造模糊基函数的模糊系统, 并将此系统应用于杆球系统实验。实验结果证明了这种模糊系统对非线性系统具有良好的逼近能力。Wang^[44]还采用多层模糊系统的通用逼近性来指导多层模糊系统的设计, 取得了良好的效果。同样, 模糊系统的通用逼近性在自适应控制领域也有广泛的应用^[45]。

[45]利用一阶 Sugeno 模糊系统来构造自适应控制律, 而由一阶 Sugeno 模糊系统可以用更少的模糊规则数来实现全局范围的自适应系统。

5 进一步研究工作

从理论上讲, 模糊系统是一个通用逼近器, 只要具有足够的模糊规则数就可以得到足够高的逼近精度。然而在实际工程应用中不可能构造出太大的模糊规则库来实现足够高的逼近精度。即使采用已有理论构造出的最小系统有时也难于应用, 因为已有

理论还有许多方面有待研究 在上面各讨论中,对模糊系统的各种理论分析主要是应用数值信息,而模糊系统本身包含数值信息和语言信息,其优于其他系统的原因很大程度上是因为它能够利用语言信息 所以有待研究的工作包括以下几个方面:

1) 如何将语言信息应用于模糊系统作为通用逼近性的理论研究中 采用语言信息来改进模糊系统的构成部件与模糊系统通用逼近性的关系表达式,并用语言信息构造出明晰表达式 关于利用语言和概念信息构造的模糊系统的通用逼近性的研究还有待开展

2) 研究模糊系统的归一化明晰表达式,给研究一般模糊系统通用逼近性的充分性提供理论基础 在得到足够紧凑的模糊系统的基础上如何改善模糊系统的逼近精度有待进一步研究 对于一些特殊情形的必要性也需研究,如高震荡情形 模糊系统各算子对通用逼近性的影响的系统研究也有待开展

3) 模糊系统作为通用逼近器的理论在工程上的应用也有待进一步研究 采用模糊系统通用逼近性理论来指导模糊系统的工程应用将会使模糊系统具有更强的生命力和更广泛的应用

参考文献(References):

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(2): 338-353
- [2] Wang L X. Fuzzy System s are universal approximators [A] *Proc IEEE Int Conf Fuzzy System s* [C] 1992 1163-1170
- [3] Kosko B. Fuzzy system s as universal approximators [A] *Proc IEEE Int Conf Fuzzy System s* [C] 1992 1153-1162
- [4] Ying M S. Implication operators in fuzzy logic [J]. *IEEE Trans on Fuzzy system s*, 2002, 10(1): 88-91
- [5] Lee C-C. Fuzzy logic in control system s: Fuzzy logic controller- Part I, II [J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 1990, 20(2): 404-435
- [6] Filev D P, Yager R R. A generalized defuzzification method via BAD distributoins [J]. *Int J of Intelligent System s*, 1991, 6(4): 687-697.
- [7] Wang L X. Universal approximation by hierarchical fuzzy system s [J]. *Fuzzy Sets and System s*, 1998, 93(2): 223-230
- [8] Dickerson J A, Kosko B. Fuzzy function approximation with ellipsoidal rules [J]. *IEEE Trans on Syst, Man and Cybernetics*, 1996, 26(4): 542-560
- [9] Buckley J J. Universal fuzzy controllers [J]. *Automatica*, 1992, 28(6): 1245-1248
- [10] Buckley J J. Sugeno type controllers are universal controllers [J]. *Fuzzy Sets and System s*, 1993, 53(3): 293-303
- [11] Landajo M, Rio M J, Perez R. A note on smooth approximation capabilities of fuzzy system s [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System s*, 2001, 9(2): 279-237.
- [12] 苗志宏, 李宏兴. 一类模糊系统的逼近问题 [J]. 北京师范大学学报, 2000, 36(1): 14-20
(Miao Z H, Li H X, Approximation problem of a class of fuzzy system s [J]. *J of Beijing Normal University*, 2000, 36(1): 14-20)
- [13] Liu P. A analysis of approximation of continuous fuzzy functions by multivariate fuzzy polynomials [J]. *Fuzzy Sets and System*, 2002, 127(3): 299-313
- [14] Cao S G, Rees N W, Feng G. Mamdani-type fuzzy controllers are universal fuzzy controllers [J]. *Fuzzy Sets and System s*, 2001, 123(3): 359-367.
- [15] Cao S G, Rees N W, Feng G. Universal fuzzy controllers for a class of nonlinear system s [J]. *Fuzzy Sets and System s*, 2001, 122(1): 117-123
- [16] 张恩勤, 施颂椒, 翁正新. 模糊系统的函数逼近特性研究 [J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(2): 60-64
(Zhang E Q, Shi S J, Wong Z X. Function approximation study of general fuzzy system [J]. *Fuzzy System s and Mathematics*, 2000, 14(2): 60-64)
- [17] 张恩勤, 施颂椒, 翁正新. 采用三角形隶属函数的模糊系统的插值特性 [J]. 自动化学报, 2001, 27(6): 784-790
(Zhang E Q, Shi S J, Wong Z X. Fuzzy system s using triangle MFs as interpolation function [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(6): 784-790)
- [18] 毛志宏, 张雪枫, 李衍达. 模糊系统作为通用函数逼近器的研究 [J]. 中国科学(E 辑), 1997, 27(4): 362-367.
(Mao Z H, Zhang X F, Li Y D. On fuzzy system s as univarsal approximation [J]. *Science in China (Series E)*, 1997, 27(4): 362-367.)
- [19] Wang P Z, Tan S H, Song F M, et al. Construction thoery for fuzzy system s [J]. *Fuzzy Sets and System s*, 1997, 88(1): 195-203
- [20] Kwong C P. The minimum worst case error of fuzzy approximators [J]. *IEEE Trans on System s, Man, Cybernetics*, 2001, 31(6): 714-716
- [21] Ying H. Sufficient conditions on general fuzzy system s as function approximators [J]. *Automatica*, 1994, 30(3): 521-525
- [22] Ying H. Sufficient conditions on unifom approximation of multivariate functions by general Tagaki-Sugeno fuzzy system s with linear rule

- consequent[J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 1998, 28(4): 515-520
- [23] Ying H. General Takagi-Sugeno fuzzy systems with simplified linear rule consequent are universal controllers, models, filters [J]. *J of Information Science*, 1998, 108(1): 91-107.
- [24] 曾珂, 张乃尧, 徐文立. 线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件[J]. *自动化学报*, 2001, 27(5): 606-612
(Zeng K, Zhang N R, Xu W L. Sufficient condition for Linear T-S fuzzy systems as universal approximators [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(5): 606-612)
- [25] 曾珂, 张乃尧, 徐文立. 特定Mamdani模糊系统的通用逼近性[J]. *控制与决策*, 2000, 15(4): 435-438
(Zeng K, Zhang N R, Xu W L. Universal approximation of specialMamdani fuzzy systems[J]. *Control and decision*, 2000, 15(4): 435-438)
- [26] Zeng K, Zhang N-Y, Xu W-L. A comparative on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators[J]. *IEEE Trans on Fuzzy System s*, 2000, 8(6): 773-780
- [27] Zeng X-J, Sing M G. Approximation accuracy analysis of fuzzy system s with the center-average defuzzifier [A]. *Proc 1995 IEEE Int Conf Fuzzy System s* [C]. Yokohama 1995 1: 109-116
- [28] Zeng X-J, Sing M G. A relationship between membership functions and approximation accuracy in fuzzy system s[J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 1996, 26(1): 176-180
- [29] Zeng X-J, Sing M G. Approximation accuracy analysis of fuzzy system s as function approximations[J]. *IEEE Trans on Fuzzy System s*, 1996, 4(1): 44-53
- [30] Chen W T. Sufficient conditions on fuzzy logic controllers as universal approximators [J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 2001, 31(2): 270-274
- [31] Zeng X-J, Sing M G. Approximation theory of fuzzy system s — SISO case [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System s*, 1994, 2(2): 162-176
- [32] Mitaim S, Kosko B. The shape of fuzzy sets in adaptive function approximation [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System s*, 2001, 9(4): 637-656
- [33] Ying H, Chen G-R. Necessary conditions for some typical fuzzy system s as universal approximators[J]. *Automatica*, 1997, 33(7): 1333-1338
- [34] Ding Y S, Ying H, Shao S-H. Necessary conditions for general MISO fuzzy system s as universal approximators [A]. *Proc 1997 IEEE Int Conf System s, Man and Cybernetics* [C]. Orlando, 1997. 4: 3176-3182
- [35] Ying H, Ding Y-S, Li S-K, et al. Comparison of necessary conditions for typical Takagi-Sugeno and Mamdani fuzzy system s as universal approximators [J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 1999, 29(5): 508-514
- [36] Ding Y-S, Ying H, Shao S-H. Necessary conditions on minimal system configuration for general MISO Mamdani fuzzy system s as universal approximators [J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 2000, 30(6): 857-863
- [37] 丁永生, 应浩, 邵世煌. 模糊逼近理论: 现状与展望[J]. *信息与控制*, 2000, 29(2): 157-163
(Ding Y S, Ying H, Shao S H. Approximation theory of fuzzy system s: Current state and future directions [J]. *Information and Control*, 2000, 29(2): 157-163)
- [38] Abe A, Lan M-S. Fuzzy rules extraction directly from numerical data for function approximation [J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 1995, 25(1): 119-129
- [39] Abe S. Fuzzy function approximators with ellipsoidal regions [J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 1999, 29(4): 654-661.
- [40] Yam Y. Subsystem inference representation for fuzzy system s based upon product-sum-gravity rule [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System s*, 1997, 27(6): 90-107.
- [41] Yam Y. Fuzzy approximation via grid point sampling and singular value decomposition[J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 1997, 27(6): 933-951.
- [42] Homaifar A, Bkdash M, Clifton C. Approximating an optimal feedback control law by a generalized sugeno controller [J]. *Fuzzy Sets and System s*, 2001, 121(1): 39-57.
- [43] Wang L X, Mendel J M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal Least-squares learning [J]. *IEEE Trans on Neural Network s*, 1992, 3(5): 807-814
- [44] Wang L X. A nalysis and design of hierarchical fuzzy system s[J]. *IEEE Trans on Fuzzy System s*, 1999, 7(5): 617-624
- [45] A lata M, Su C-Y, Dem irli K. Adaptive control of a class of nonlinear system s with a first-order parameterized Sugeno fuzzy approximator [J]. *IEEE Trans on System s, Man and Cybernetics*, 2001, 31(3): 410-419