

文章编号: 1001-0920(2004)04-0372-05

具有反馈时延的 TCP Vegas 拥塞控制算法的稳定性分析

杨洪勇, 田玉平

(东南大学 自动控制系, 江苏 南京 210096)

摘 要: 将 Internet 拥塞控制算法看作一个复杂的动态非线性反馈系统, 借助多变量频率域控制系统的广义 Nyquist 判据和时延微分方程的 Pontryagin 判据, 研究了各通信回路时延相同和时延不同条件下 Internet 网络拥塞控制算法, 得到了具有反馈时延的 TCP Vegas 拥塞控制算法在平衡点渐近稳定的多个判据. 仿真结果说明了稳定性判据的有效性和实用性.

关键词: TCP Vegas; 拥塞控制算法; 反馈时延; 稳定性

中图分类号: TP393

文献标识码: A

Analysis of the stability on TCP Vegas congestion control algorithm with feedback delays

YANG Hong-yong, TIAN Yu-ping

(Department of Automatic Control, Southeast University, Nanjing 210096, China Correspondent: TIAN Yu-ping, Email: yptian@seu.edu.cn)

Abstract: Internet network congestion control algorithms (NCCA) is taken as a complicated dynamical nonlinear feedback system. Using the generalized Nyquist criterion for multivariable frequency systems and Pontryagin criterion for delay differential equations, the Internet NCCA with homogeneous delays and heterogeneous delays is studied. And several criteria of stability at the equilibrium point are obtained for the TCP Vegas NCCA with feedback delays. The effectiveness and practicability of these stability criteria are validated by simulation results.

Key words: TCP Vegas; congestion control algorithm; feedback delays; stability

1 引 言

随着计算机通信网络特别是 Internet 网络规模的不断膨胀, 如何控制网络中的信息流量以及如何分析网络性能已变得越来越重要. Internet 网络中的拥塞控制对保障网络的正常运行起着关键作用. 当网络连接需求超过网络可以提供的资源(如连接带宽、缓存), 网络拥塞就会发生. 如果不采用及时、适宜的方法控制网络拥塞, 保证网络稳定运行, 则会导致网络瘫痪.

从控制理论角度而言, 网络拥塞控制算法可看

作一个复杂的高阶动态非线性反馈系统, 从功能方面网络拥塞控制算法通常分为两大类: 一类是应用于网络源节点, 基于网络拥塞信号对系统速率作相应调整的 TCP 速率控制算法(如 TCP Reno^[1]和 TCP Vegas^[2]); 另一类是应用于网络连接节点当网络超负载时如何丢弃到达数据包的 AQM 控制算法(如 Drop Tail^[1]和 RED^[3]). Internet 中在源节点使用最广泛的是 TCP Reno 算法, TCP Vegas 算法是为了提高源节点的数据传输能力而提出的 TCP 改进算法. 目前常用的 TCP 拥塞控制策略和分析工具

收稿日期: 2003-04-21; 修回日期: 2003-06-16

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目(02112); 博士点基金资助项目(2000028611).

作者简介: 杨洪勇(1967—), 男, 山东庆云人, 副教授, 博士生, 从事非线性控制、鲁棒控制、网络拥塞控制等研究; 田玉平(1964—), 男, 安徽马鞍山人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、鲁棒控制、网络拥塞控制等研究.

在文献[4]中已给出了详细的介绍

由于通信时延是通信网络系统本身所固有的物理特性, 研究网络拥塞控制算法的稳定性必须要分析具有时延的复杂动态反馈系统. 在网络拥塞控制算法的研究过程中, 主要研究两种时延反馈系统: 一种是具有时延的连续时间系统^[5~7], 用时延微分方程作为系统模型来分析网络拥塞控制系统的稳定性; 另一种是具有时延的离散时间系统^[5], 通过系统特征方程特征根的特性来分析网络拥塞控制系统的稳定性

本文基于文献[8]描述的 TCP Vegas 拥塞控制策略, 讨论一个更一般化的带通信时延的 TCP Vegas 拥塞控制算法, 并分析具有不同通信时延的 TCP Vegas 拥塞控制算法在平衡点的稳定性

2 问题描述

考虑一个有多个源节点和多个连接节点的网络通信系统. 连接节点集合 $L = \{1, \dots, L_0\}$, 源节点集合 $N = \{1, \dots, N_0\}$. 在网络中一个源节点可以与多个连接节点连接; 反过来, 每个连接节点可以有多个源节点共享. 对于每一个连接节点 l , 设连接节点的拥塞率为 p_l , 连接能力为 c_l , 使用节点 l 的源节点集合为 $N(l) \subseteq N$, 节点 l 的网络负载为 y_l . 对于每一个源节点 $i \in N$, 设源节点速率为 x_i , 来自连接节点的总拥塞率为 q_i . 定义 $L_0 \times N_0$ 维的路由矩阵 $R = (R_{li})_{L_0 \times N_0}$ 为

$$R_{li} = \begin{cases} 1, & i \in N(l); \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在本文中假定路由矩阵 R 是行满秩的

假设对于每一个连接节点, 可以计算该节点的网络负载, 并且源节点可以计算接收到的总的反馈拥塞率. 文献[8]讨论了 TCP Vegas 拥塞控制算法在网络效益最优时的平衡特性, 建立了如下的 TCP Vegas 拥塞控制算法:

$$p_l(t+1) = [p_l(t) + \frac{1}{c_l} \sum_{i \in N(l)} x_i(t) - c_l]^+,$$

$$x_i(t) = w_i(t)/T_i$$

其中: $[z]^+ = \max\{0, z\}$, T_i 是源节点 i 上的往返时延(包括传播时延与排队时延), w_i 为源节点 i 的拥塞窗口大小

在上面的算法中拥塞率调整函数没有考虑通信时延, 因此本文以此算法为基础, 将该拥塞控制模型中的关键参数和速率调整函数进行一般化描述, 借鉴文献[4]中对通信时延的一些假设, 在算法中加入通信时延, 分析具有通信时延的 TCP Vegas 拥

塞控制算法在平衡点的渐进稳定性

算法模型为

$$\frac{d}{dt} p_l(t) = \kappa(y_l(t) - c_l), \quad (1)$$

$$y_l(t) = \sum_{i \in N} R_{li} x_i(t - d_1(l, i)), \quad (2)$$

$$q_i(t) = \sum_{l \in L} R_{li} p_l(t - d_2(l, i)), \quad (3)$$

$$x_i = f_i(q_i(t)). \quad (4)$$

这里控制增益 κ 是一个充分小的正数, $d_1(l, i)$ 是数据由源节点 i 传输到连接节点 l 的时延, $d_2(l, i)$ 是反馈信号由连接节点 l 到达源节点 i 的时延. 在通信网络系统中每一个回路对应一个传播时延, 记为 D_l , 显然 $d_1(l, i) + d_2(l, i) = D_l, l \in L$. 源节点的速率函数 f_i 是一个关于链路拥塞率 q_i 可微的严格单调递减函数. 由于随着连接节点的队列变长, 数据等待服务的时间逐渐增加, 节点的拥塞率就会越来越大. 为了避免网络拥塞, 源节点的速率应逐渐降低, 减缓连接节点的负载压力. 不同的 TCP 拥塞控制算法, 函数 f_i 有不同的描述方式, 但总的原则是根据链路的拥塞率来合理调整源节点的速率.

算法(1)~(4)可作如下解释: 连接节点 l 接收到来自源节点在 $d_1(l, i)$ 时间前的总使用传输率(2), 得到连接节点 l 的队列长度, 根据式(1)计算连接节点处排队时延(拥塞率) $p_l(t)$; 源节点 i 接收到式(3)的连接节点在 $d_2(l, i)$ 时间前的总的排队时延(总拥塞率), 根据式(4)刷新源节点速率, 系统再采用新的速率传输数据.

记系统(1)~(4)的平衡点为 p^* , 系统在平衡点对应源节点的速率为 x^* , 容易得到系统(1)~(4)的平衡点满足

$$\sum_{i \in N} R_{li} x_i^* = c_l \quad (5)$$

3 具有反馈时延的 TCP Vegas 拥塞控制算法的稳定性

假设系统平衡点为 $p_i^*, f_i = f_i(q_i)$ 为系统达到平衡时源节点的传输率, $f_i = f_i(q_i)$ 为系统传输率关于平衡排队时延 $q_i = \sum_{l \in L} R_{li} p_l^*$ 的导数. 设

$$y_l(t) = \sum_{i \in N} R_{li} f_i \left(\sum_{k \in L} R_{ki} p_k(t - d_1(l, i) - d_2(k, i)) \right). \quad (6)$$

令 $p_l(t) = p_l^* + \hat{p}_l(t)$, 线性化式(6), 忽略高阶无穷小项, 得到

$$y_l(t) = \sum_{i \in N} R_{li} f_i + \sum_{i \in N} R_{li} f_i \sum_{k \in L} R_{ki} p_k(t - \hat{})$$

$$d_1(l, i) - d_2(k, i).$$

对上式作 Laplace 变换, 令 $Y_l(s) = L(y_l(t) - R_{lif} i)$, $P_l(s) = L(p_l(t))$, 这里 $L(\bullet)$ 表示 (\bullet) 的 Laplace 变换 于是得到

$$Y_l(s) = \begin{matrix} R_{lif} & & \\ i & N & \\ & & R_{ki} P_k \end{matrix} (s) e^{-sd_1(l, i) - sd_2(k, i)}. \quad (7)$$

定义矩阵

$$\begin{aligned} R_D(s) &= (R_{li} e^{sd_2(l, i)}, l = L, i = N), \\ F &= \text{diag}(-f_i, i = N), \\ M_D(s) &= R_D(s) F R_D^T(-s), \\ A(s) &= \text{diag}(e^{-sD_1}, l = L) M_D(s), \\ Y(s) &= [Y_1(s), \dots, Y_{L_0}(s)]^T, \\ P(s) &= [P_1(s), \dots, P_{L_0}(s)]^T. \end{aligned}$$

则由式(7)可得

$$Y(s) = -A(s)P(s). \quad (8)$$

对原系统(1)作 Laplace 变换, 令 $K = \text{diag}(\kappa, l = L)$, $C_l(s) = L(c_l - R_{lif} i)$, $C(s) = [C_1(s), \dots, C_{L_0}(s)]^T$, 得到

$$sP(s) = K(Y(s) - C(s)).$$

令 $K(s) = \text{diag}(\frac{\kappa}{s}, l = L)$, 则上式变为

$$P(s) = K(s)(Y(s) - C(s)). \quad (9)$$

闭环系统(8), (9) 渐近稳定的充要条件是闭环传递函数极点都有负实部, 也就是说系统(1) ~ (4) 在平衡点渐近稳定的充要条件是闭环传递函数极点都有负实部

在系统(1) ~ (4) 中, 如果对于所有的 $l = L$, 网络通信时延 $D_l = D$, 则下面的定理保证了系统在平衡点的渐近稳定性

定理 1 假设对于所有 $l = L$, 网络通信时延 $D_l = D$. 系统(1) ~ (4) 在平衡点处局部渐近稳定的充分条件为

$$\rho(K^{1/2} M K^{1/2}) < \pi/2D,$$

其中 $M = R F R^T$, $K = \text{diag}(\kappa, l = L)$, $\rho(\bullet)$ 表示矩阵的最大特征值

定理 1 的证明中需要用到时延微分方程中的 Pontryagin 判据, 为使用方便, 把该判据以一个引理方式列出

引理 1 (Pontryagin)^[9] 考虑指数多项式

$$H(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k (e^z)^i,$$

其中多项式首项 $b_n z^n (e^z)^m = 0$ 令 $H(j\omega) = F(\omega) + jG(\omega)$, $\omega \in R$, 则方程 $H(z) = 0$ 的所有根有负实

部的充要条件为: $G(\omega) = 0$ 的所有根都为实数, 并且对于它的每个根 ω 满足 $G(\omega)F(\omega) > 0$, 这里 $G(\omega)$ 为函数 $G(\omega)$ 在 $\omega = \omega$ 点的导数

证明 系统(8), (9) 的开环传递函数为

$$G(s) = K(s)A(s) = \text{diag}\left(\frac{\kappa e^{-sD}}{s}\right) M_D(s).$$

在网络系统中对于所有的 $l = L$, 通信时延 $D_l = D$, 此时闭环系统(8), (9) 的特征方程为

$$\det(\text{diag}(se^{sD}) + K^{1/2} M K^{1/2}) = 0, \quad (10)$$

方程左边为对称矩阵行列式 由于矩阵 $K^{1/2} M K^{1/2}$ 为正定矩阵, 则存在正交矩阵 B , 使得 $B^T K^{1/2} M K^{1/2} B = \text{diag}(m_l, l = L)$, 这里 m_l 为矩阵 $K^{1/2} M K^{1/2}$ 的特征值 特征方程(10) 两边分别乘以矩阵 B^T 和 B 的行列式, 特征方程变为

$$\det(\text{diag}(se^{sD} + m_l, l = L)) = 0$$

系统在平衡点处局部渐近稳定的充要条件为特征方程的所有特征根都有负实部, 也就是对于所有的 $l = L$, 方程

$$se^{sD} + m_l = 0 \quad (11)$$

的特征根都有负实部

应用 Pontryagin 判据, 将式(11) 与引理 1 比较, 有 $n = 1, m = D$, 首项 $\lambda(e^\lambda)^D = 0$, 且

$$F(\omega) = -\omega \sin(\omega D) + m_l,$$

$$G(\omega) = \omega \cos(\omega D).$$

当 $G(\omega) = 0$ 时, 可解得 $\omega = 0$ 或 $\omega = \frac{\pi + 2k\pi}{2D}$, 这里 k 为任意整数 下面验证对于每个根 ω , 满足 $G(\omega)F(\omega) > 0$

1) 当 $\omega = 0$ 时, 容易得到 $G(\omega)F(\omega) = m_l > 0$;

2) 当 $\omega = \frac{\pi + 2k\pi}{2D}$ 时,

$$G(\omega)F(\omega) = \omega D \sin(\omega D) (\omega \sin(\omega D) - m_l).$$

要证明 $G(\omega)F(\omega) > 0$, 也就是要求 $\frac{m_l}{\omega \sin(\omega D)} < 1$ 成立 当分母小于 0 时, 显然成立 当分母大于 0 时, 应保证 $m_l < \omega \sin(\omega D)$ 成立, 令 $k = 0$, 取 ω 的最小正数, 得到 $m_l < \frac{\pi}{2D}$. 由引理 1 可得定理的结论

注 1 由定理 1 的证明过程可知, 定理 1 所给条件对线性化的系统(8), (9) 是充要的, 因此根据 Lyapunov 稳定性第一判定定理, 如果线性化系统(8), (9) 在虚轴上没有特征根, 则定理 1 的结论对原系统(1) ~ (4) 也是必要的

在系统(1)~(4)中,如果对于所有的 $l \in L$, 网络系统中具有不同的传播时延, 则下面的定理保证了系统在平衡点的渐近稳定性

定理 2 假设系统(1)~(4)的平衡点是 p_i^* , 各链路具有不同的传播时延 则系统在平衡点处局部渐近稳定的充分条件为: 存在对角矩阵 $H = \text{diag}(h_l > 0, l \in L)$, 对所有的 $l \in L$, 有

$$\kappa \prod_{i=1}^{L_0} \left(m_{ii} \frac{h_l}{h_i} \right) < \frac{\pi}{2D};$$

其中: m_{ii} 是矩阵 $M = RFR^T$ 的第 (l, i) 个元素, κ 是控制增益矩阵 κ 的第 l 个对角元素

证明 系统(8), (9) 的开环传递函数为

$$G(s) = \text{diag} \left(\frac{\kappa e^{-sD_l}}{s} \right) R_D(s) \text{diag}(-f_i) R_D^T(-s),$$

易知开环系统在复平面的右半开平面没有极点

$$\text{令 } \hat{G}(s) = \text{diag} \left(\sqrt{\kappa D_l} \right) R_D(s) \text{diag} \left(\sqrt{-\frac{2f_i}{\pi}} \right),$$

$s = j\omega$ 则开环传递函数矩阵可写为

$$G(j\omega) = \hat{G}(j\omega) \text{diag} \left(\frac{2e^{-j\omega D_l}}{j\omega D_l} \right) \hat{G}^H(j\omega), \quad (12)$$

这里角标 H 表示矩阵的共扼转置 由定理的条件可知, 存在对角矩阵 $H = \text{diag}(h_l > 0, l \in L)$, 对所有的 $l \in L$, 有

$$\rho \left(\text{diag} \left(\frac{2\kappa D_l}{\pi} \right) M \right) \max_{i=1}^{L_0} \left(\frac{2}{\pi} \kappa D_l \left(m_{ii} \frac{h_l}{h_i} \right) \right) < 1,$$

这里 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径, 于是可以得到

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho(G(j\omega)G^H(j\omega)) = \\ &= \rho \left(\frac{2}{\pi} \text{diag}(\kappa D_l) M(j\omega) \right) < 1. \end{aligned} \quad (13)$$

在式(12)中, 假设 λ 为矩阵 $G(j\omega)$ 的特征根, 则存在特征向量 $v, v_2 = 1$, 满足

$$G(j\omega)v = \hat{G}(j\omega) \text{diag} \left(\frac{e^{-j\omega D_l}}{j\omega D_l} \right) \hat{G}^H(j\omega)v = \lambda v.$$

所以

$$\lambda = v^H G(j\omega)v = v^H \hat{G}(j\omega) \text{diag} \left(\frac{\pi e^{-j\omega D_l}}{2 j\omega D_l} \right) \hat{G}^H(j\omega)v.$$

令 $u = \frac{\hat{G}^H(j\omega)v}{\sqrt{\bar{\rho}}}$, 显然 $u^H u = 1$ 成立

得到

$$\lambda = u^H \text{diag} \left(\frac{\pi \bar{\rho} e^{-j\omega D_l}}{2 j\omega D_l} \right) u = \prod_{i=1}^{L_0} \left(|u_i|^2 \frac{\pi \bar{\rho} e^{-j\omega D_l}}{2 j\omega D_l} \right),$$

所以有

$$\lambda \in \text{Co} \left(0, \left\{ \frac{\pi \bar{\rho} e^{-j\omega D_l}}{2 j\omega D_l} \right\} \right). \quad (14)$$

这里 $\text{Co}(\cdot)$ 表示集合的凸包

由于在复平面上, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时函数 $\left(\frac{e^{-jx}}{jx} \right)$ 的 Nyquist 图过复平面上负实轴的 $-\frac{2}{\pi} + 0j$ 点, 因此

函数 $\left(\frac{\pi e^{-jx}}{2 jx} \right)$ 的 Nyquist 图过复平面上的 $-1 + 0j$ 点, 又由式(13)得到 $\bar{\rho} < 1$. 这样根据广义 Nyquist 判据^[10] 可得闭环系统(8), (9) 在平衡点是局部渐近稳定的 也就是说系统(1)~(4) 在平衡点渐近稳定

在定理 2 中假设矩阵 H 为单位矩阵, 可以得到下面的推论:

推论 1 假设系统(1)~(4)的平衡点是 p_i^* . 系统(1)~(4) 是局部渐近稳定的充分条件为: 对于所有的 $l \in L$, 有

$$-k_l \left(\prod_{i \in N} R_{lif} \hat{L}(i) \right) < \frac{\pi}{2D_l},$$

这里 $\hat{L}(i)$ 表示源节点 i 占用的所有连接节点数

如果在推论 1 中令 $\max_{i \in N} |\hat{L}(i)| = \bar{L}$, 容易得到

下面的推论:

推论 2 假设系统(1)~(4)的平衡点为 p_i^* , 系统是局部渐近稳定的充分条件为: 对于所有的 $l \in L$, 有

$$-k \bar{L} \prod_{i \in N} R_{lif} < \frac{\pi}{2D_l};$$

4 系统仿真

假设网络系统中有 2 个连接节点 5 个源节点, 源节点初始速率 x_i 依次为: 0.0025, 0.005, 0.0075, 0.01, 0.0125 (Kb/m s), 源节点的窗口大小 $w_i (i = 1, 2, 3, 4) = 0.0025, w_5 = 0.005$; 连接节点服务能力分别为 $c_1 = 1$ (Kb/m s), $c_2 = 0.8$ (Kb/m s). 源节点 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 共享第 1 个连接节点, 源节点 x_2, x_3, x_4, x_5 共享第 2 个连接节点, 这样有 $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 通信时延分别为 $D_1 = 40$ m s, $D_2 = 80$ m s, 根据网络排队时延 $q(t)$, 调整源节点的速率 $\max(\min(w_i/(D + q(t)), 1), x_i)$ ^[8], 其中: $i = 1$ 时, $q(t) = p_1(t - d_2(1, 1))$; $i = 2$ 时, $q(t) = p_1(t - d_2(1, i)) + p_2(t - d_2(2, i))$, $d_1 = d_2 = D/2$, 由定理 2 可得平衡点为(0.0125, 0.003125).

设矩阵 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$, 根据定理2可求出当元素 h 变化时临界控制增益呈图1所示关系(实线为临界控制增益 κ_1 的变化, 虚线为临界控制增益 κ_2 的变

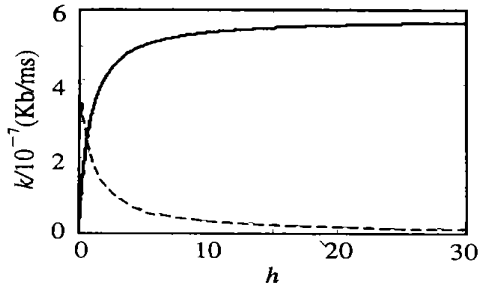
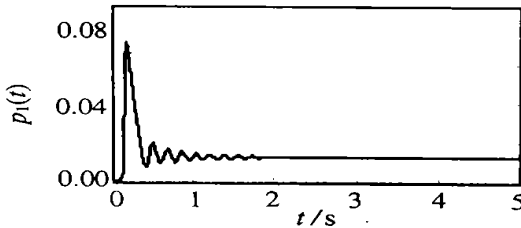
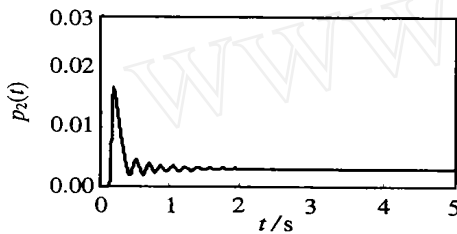


图1 临界控制增益之间的关系

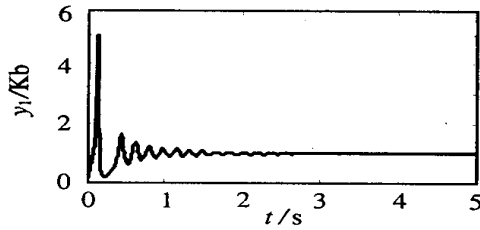


(a) 网络拥塞率 p_1

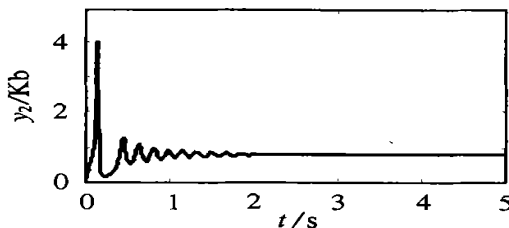


(b) 网络拥塞率 p_2

图2 网络拥塞率时刻图



(a) 网络负载 y_1



(b) 网络负载 y_2

图3 连接节点负载时刻图

化). 取矩阵 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 控制增益分别为 $\kappa_1 = 0.000423$, $\kappa_2 = 0.000128$, 比临界增益略小, 满足定理2的条件. 网络拥塞控制系统在平衡点的稳定性见图2和图3所示. 可以看到系统拥塞率渐近稳定, 与定理2的结论一致, 连接节点的传输能力达到最大值, 且与平衡点式(5)计算结果一致.

5 结论

本文详细研究了具有反馈时延的 TCP Vegas 拥塞控制算法的稳定性, 得到了在通信时延相同和时延不同条件下系统在平衡点处局部渐近稳定的多个判据. 通过仿真说明了本文所得判据的有效性和实用性. 这些结论为创建良好的网络配置, 确保网络的稳定性, 避免网络拥塞提供了必需的理论基础.

参考文献 (References):

- [1] Jacobson V. Congestion avoidance and control [A]. *Proc of ACM SIGCOMM '88* [C]. Stanford, 1988. 314-329.
- [2] Lawrence S Brakmo, Larry L Peterson. TCP Vegas: End to end congestion avoidance on a global Internet [J]. *IEEE J on Selected Areas in communications*, 1995, 13(8): 1465-1480.
- [3] Floyd S, Jacobson V. Random early detection gateways for congestion avoidance [J]. *IEEE/ACM Trans on Networking*, 1993, 1(4): 397-413.
- [4] Low S, Paganini F, Doyle J C. Internet congestion control [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2002, 22(1): 28-43.
- [5] Johari R, Tan D. End-to-end congestion control for the internet: Delays and stability [J]. *IEEE/ACM Trans on Networking*, 2001, 9(6): 818-832.
- [6] Kelly F P, Maulloo A, Tan D. Rate control for communication networks: Shadow prices, proportional fairness, and stability [J]. *J of the Operational Research Society*, 1998, 49(3): 237-252.
- [7] Vinnicombe G. On the stability of end-to-end congestion control for the Internet [R]. London: Department of Engineering University of Cambridge, 2000.
- [8] Low S, Larry L, Wang L. Understanding Vegas: A duality model [J]. *J of the ACM*, 2002, 49(2): 207-235.
- [9] Hale J. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer-verlag, 1977. 338-339.
- [10] Desoer C A, Yang Y T. On the generalized Nyquist stability criterion [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1980, 25(2): 187-196.