文章编号: 1001-0920(2004)04-0402-05

时滞LPV 系统的稳定新判据及控制器设计

王俊玲, 王常虹, 高会军
(哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘　要: 针对一类具有随参数变化状态时滞的线性参数变化系统, 提出一种新的依赖于参数的 Lyapunov 稳定条件. 该准则通过引入两个附加矩阵, 解除了系统矩阵与依赖于参数的 Lyapunov 函数之间的耦合, 更易于系统的分析与综合. 在此基础上设计了此类系统的状态反馈控制器, 采用线性矩阵不等式技术, 将控制器存在的充分条件转化为参数线性矩阵不等式的解存在条件. 数值仿真验证了所提出算法的可行性.

关键词: 线性参数变化系统; 参数线性矩阵不等式; 状态时滞
中图分类号: TP13　　　　**文献标识码**: A

Improved stability criterion and controller design for time-delayed LPV systems

WANG Jun-ling, WANG Chang-hong, GAO Hui-jun
(Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: WANG Jun-ling, E-mail: jun_ling2003@yahoo.com.cn)

Abstract: A parameter-dependent Lyapunov condition is proposed for the stability of linear parameter-varying (LPV) systems with a parameter-varying state delay. This stability criterion is achieved by the introduction of two slack variables, which eliminate the coupling between Lyapunov functions and system matrices. Upon the new conditions, the corresponding state feedback controllers are designed. Sufficient conditions for the existence of such controllers are established in terms of parameterized linear matrix inequalities (LMIs). And numerical example shows the feasibility of the proposed condition and controllers design procedure.

Key words: LPV system; parameterized LMI; state delay

1 引　言

线性参数变化(LPV)系统是一类重要的时变系统, 其状态空间模型的矩阵是某些时变参数的确定函数, 而这些时变参数是可实时测量的. 许多实际系统都可用上述模型进行描述. 由于时滞大量存在于实际的物理系统, 常常造成系统不稳定或使系统性能变差. 国内外学者对于时滞系统的稳定性分析和控制作了大量研究工作, 并取得了很多成果[1~6]. 而对时滞LPV 系统的研究[4~6]刚刚起步, 其中文献[4, 5]主要研究的是时滞LPV 系统的 L_2-L_2 控制; 文献[6]研究的是时滞无关及时滞相关LPV 系统的稳定性问题. 本文在文献[4, 6]的基础上引入了附加矩阵, 进一步研究一类具有随参数变化状态时滞的LPV 系统的二次稳定条件, 以及相应的控制器设计方法.

受文献[7~10]的启发, 本文针对时滞LPV 系统, 提出了一种新的依赖于参数的Lyapunov 稳定条件. 该条件通过引入两个附加矩阵变量而呈现出

收稿日期: 2003-04-14; **修回日期**: 2003-09-11.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69874008).
作者简介: 王俊玲(1968—), 女, 黑龙江五常人, 博士生, 从事时滞LPV 系统控制、变增益控制理论及应用的研究; 王常虹(1961—), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、鲁棒控制等研究.

Lyapunov 矩阵与系统矩阵之间的分离特性, 从而得到比文献[4, 6]更易于实现的稳定性条件. 在此基础上, 采用线性矩阵不等式技术, 设计了此类系统的状态反馈控制器, 并将控制器存在的充分条件转化为参数线性矩阵不等式的求解问题. 所得结果可推广到具有多重状态时滞和输入时滞的LPV 系统. 最后用数值仿真验证了所提出方法的可行性.

2　问题描述

考虑如下时滞LPV 系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = {} & A(\rho(t))x(t) + A_h(\rho(t))x(t - \\ & h(\rho(t))) + B(\rho(t))u(t), \\ x(\theta) = {} & \phi(\theta),\ \forall\theta \in [-h(\rho(0)), 0].\end{aligned} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $u(t) \in R^m$ 为控制输入.

假定系统状态矩阵 $A(\cdot)$, $A_h(\cdot)$, $B(\cdot)$ 和滞后 $h(\cdot)$ 为时变参数 $\rho(\cdot)$ 的函数, 且 $h(t)$ 满足

$$0 < h(t) \leq H < \infty,\ 0 < \dot{h}(t) \leq \sigma < 1,\ \forall t \geq 0. \tag{2}$$

参数向量 $\rho(t) = [\rho_1(t)\ \rho_2(t)\ \cdots\ \rho_s(t)]^{\mathrm{T}}$ 满足 $\rho_i(t)$ 实时可测, 且 $\rho_i(t) \in [\underline{\rho}_i, \overline{\rho}_i]$, 参数的变化率 $\tau_i(t) \in [\underline{\tau}_i, \overline{\tau}_i]$. 以下用 ρ 和 ρ_i 分别代表 $\rho(t)$ 和 $\rho_i(t)$.

构造如下形式的无记忆状态反馈控制器:

$$u(t) = K(\rho)x(t), \tag{3}$$

其中 $K(\rho)$ 为待求的依赖于参数的反馈增益矩阵. 此时闭环系统为

$$\dot{x}(t) = \overline{A}(\rho)x(t) + \overline{A}_h(\rho)x(t - h(\rho)), \tag{4}$$

其中

$$\overline{A}(\rho) = A(\rho) + B(\rho)K(\rho),\ \overline{A}_h(\rho) = A_h(\rho). \tag{5}$$

本文的问题是针对系统(1), 研究其二次稳定准则, 并设计形如式(3) 的状态反馈控制器, 使其闭环系统(4) 二次稳定.

3　二次稳定准则

引理 1[4]　对于系统(1), 如果存在连续可微的对称正定矩阵 $P(\rho) \in R^{n\times n}$ 和对称正定矩阵 $Q \in R^{n\times n}$, 使得

$$\begin{bmatrix} M(\rho) + Q & P(\rho)\overline{A}_h(\rho) \\ * & -\left(1 - \sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i \frac{\partial h}{\partial \rho_i}\right)\right)Q \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

对所有参数变化轨迹成立, 则闭环系统(4) 二次稳定. 其中

$$M(\rho) = \overline{A}^{\mathrm{T}}(\rho)P(\rho) + P(\rho)\overline{A}(\rho) + \sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i \frac{\partial P}{\partial \rho_i}\right).$$

引理 2[6]　对于系统(1), 如果存在连续可微的对称正定矩阵 $P(\rho) \in R^{n\times n}$ 和对称正定矩阵 $Q(\rho) \in R^{n\times n}$, 使得

$$\begin{bmatrix} M(\rho) + Q(\rho) & P(\rho)\overline{A}_h(\rho) \\ * & -\left(1 - \sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i \frac{\partial h}{\partial \rho_i}\right)\right)Q(\upsilon) \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

对所有参数变化轨迹成立, 则闭环系统(4) 二次稳定. 其中 $\upsilon(t) = \rho(t - h(\rho(t)))$, 这里用 υ 代表 $\upsilon(t)$.

注 1　引理2与引理1相比降低了保守性, 所选取的依赖于参数的Lyapunov-Krasovskii函数, 在积分项中引入了依赖于参数的 $Q(\rho)$, 即

$$\begin{aligned} V(x(t), \rho)) = {} & x^{\mathrm{T}}(t)P(\rho)x(t) + \\ & \int_{t-h(\rho)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Q(\rho)x(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{8}$$

以上引理中存在Lyapunov 函数矩阵与闭环系统状态矩阵之间的耦合. 将式(5) 代入式(6) 和(7), 式(6) 和(7) 将成为双线性矩阵不等式. 为解决这一问题, 引入附加矩阵来解耦, 从而得到新的二次稳定准则.

定理 1　对于系统(1), 如果存在连续可微的对称正定矩阵 $X(\rho) \in R^{n\times n}$, 对称正定矩阵 $Y \in R^{n\times n}$, 矩阵 $V \in R^{n\times n}$ 和 $G \in R^{n\times n}$, 对足够小的正常数 $\epsilon > 0$ 及所有参数变化轨迹, 满足以下参数线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{-1}X(\rho) - (V + V^{\mathrm{T}}) & V^{\mathrm{T}}(I + \epsilon\overline{A}(\rho))^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & -\epsilon^{-1}X(\rho) - \sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i}\right) & \left(1 - \sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i \frac{\partial h}{\partial \rho_i}\right)\right)\overline{A}_h(\rho)G & X(\rho) \\ * & * & \left(1 - \sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i \frac{\partial h}{\partial \rho_i}\right)\right)Y - G - G^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & -Y \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

则闭环系统(4) 二次稳定.

证明 首先定义$X(\rho)=P^{-1}(\rho)$, $Y=Q^{-1}$, 不等式(9) 等价于

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{-1}P^{-1}(\rho)-(V+V^{\mathrm T}) & V^{\mathrm T}(I+\epsilon\bar A(\rho))^{\mathrm T} & 0 & 0\\ * & -\epsilon^{-1}P^{-1}(\rho)-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial P^{-1}}{\partial\rho_i}\right) & \left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)\bar A_h(\rho)G & P^{-1}(\rho)\\ * & * & \left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)Q^{-1}-G-G^{\mathrm T} & 0\\ * & * & * & -Q^{-1}\end{bmatrix}<0. \qquad (10)$$

根据文献[10], 式(10) 等价于

$$\begin{bmatrix} -\epsilon^{-1}P^{-1}(\rho) & \epsilon^{-1}P^{-1}(\rho)(I+\epsilon\bar A(\rho))^{\mathrm T} & 0 & 0\\ * & -\epsilon^{-1}P^{-1}(\rho)-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial P^{-1}}{\partial\rho_i}\right) & \bar A_h(\rho)Q^{-1} & P^{-1}(\rho)\\ * & * & -\left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)Q^{-1} & 0\\ * & * & * & -Q^{-1}\end{bmatrix}<0. \qquad (11)$$

由 Schur 补引理[11], 可知式(11) 等价于

$$\begin{bmatrix} N(\rho) & \bar A_h(\rho)Q^{-1} & P^{-1}(\rho)\\ * & -\left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)Q^{-1} & 0\\ * & * & -Q^{-1}\end{bmatrix}<0, \qquad (12)$$

其中

$$N(\rho)=-\epsilon^{-1}P^{-1}(\rho)-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial P^{-1}}{\partial\rho_i}\right)+ (I+\epsilon\bar A(\rho))\epsilon^{-1}P^{-1}(\rho)(I+\epsilon\bar A(\rho))^{\mathrm T}.$$

上式经整理得

$$N(\rho)=\bar A(\rho)P^{-1}(\rho)+P^{-1}(\rho)\bar A^{\mathrm T}(\rho)+ \epsilon\bar A(\rho)P^{-1}(\rho)\bar A^{\mathrm T}(\rho)-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial P^{-1}}{\partial\rho_i}\right). \qquad (13)$$

由于ϵ为足够小的正常数, 令

$$T(\rho)= \bar A(\rho)P^{-1}(\rho)+P^{-1}(\rho)\bar A^{\mathrm T}(\rho)-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial P^{-1}}{\partial\rho_i}\right).$$

于是式(12) 等价于

$$\begin{bmatrix} T(\rho) & \bar A_h(\rho)Q^{-1} & P^{-1}(\rho)\\ * & -\left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)Q^{-1} & 0\\ * & * & -Q^{-1}\end{bmatrix}<0. \qquad (14)$$

用矩阵$J=\mathrm{diag}\{P(\rho),Q,I\}$对式(14) 作全等变换, 可得

$$\begin{bmatrix} M(\rho) & P(\rho)\bar A_h(\rho) & I\\ * & -\left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)Q & 0\\ * & * & -Q^{-1}\end{bmatrix}<0. \qquad (15)$$

根据Schur补引理[11], 式(15) 与引理1中式(6) 等价, 因此闭环系统(4) 二次稳定 □

注2 定理1中建立的时滞LPV 系统的二次稳定新准则是由引理 1 推导出的 为进一步降低其保守性, 可根据引理 2 将式(9) 推广为

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{-1}X(\rho)-(V+V^{\mathrm T}) & V^{\mathrm T}(I+\epsilon\bar A(\rho))^{\mathrm T} & 0 & 0\\ * & -\epsilon^{-1}X(\rho)-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial X}{\partial\rho_i}\right) & \left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)\bar A_h(\rho)G & X(\rho)\\ * & * & \left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)Y(\upsilon)-G-G^{\mathrm T} & 0\\ * & * & * & -Y(\rho)\end{bmatrix}<0. \qquad (16)$$

注 3　通过引入附加矩阵 V 和 G, 定理 1 消除了 Lyapunov 函数与系统矩阵之间的耦合, 即不再含有正定矩阵与系统矩阵的乘积项 这种特性使得将该条件用于系统的稳定性分析及综合时, 数值实现更加容易

通过解除 Lyapunov 矩阵和系统矩阵之间的耦合来减小设计的保守性的思想, 是由文献[8]中提出的, 该方法可应用于不确定离散系统 文献[7]借助于投影定理将这种思想扩展到连续系统 文献[9]将其应用于仿射 LPV 系统的变增益观测器设计. 然而这种思想在时滞 LPV 系统中的应用尚未见报道 本文即是受以上文献的启发, 推导了应用于时滞 LPV 系统的依赖于参数的 Lyapunov 稳定条件

4　控制器设计

下面基于定理 1 设计系统(1)的状态反馈控制器

定理 2　对于系统(1), 如果存在连续可微的对称正定矩阵 $X(\rho) \in R^{n\times n}$, 对称正定矩阵 $Y \in R^{n\times n}$, 矩阵 $V \in R^{n\times n}$, $G \in R^{n\times n}$ 和 $R(\rho) \in R^{n\times n}$, 使得

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{-1}X(\rho) - (V+V^{\mathrm T}) & V^{\mathrm T} + \epsilon V^{\mathrm T}A^{\mathrm T}(\rho) + \epsilon R^{\mathrm T}(\rho)B^{\mathrm T}(\rho) & 0 & 0 \\ * & -\epsilon^{-1}X(\rho) - \sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial X}{\partial\rho_i}\right) & \left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)A_h(\rho)G & X(\rho) \\ * & * & \left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)Y - G - G^{\mathrm T} & 0 \\ * & * & * & -Y \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

对足够小的正常数 $\epsilon > 0$ 及所有参数变化轨迹成立, 则闭环系统(4)二次稳定

若上述参数线性不等式存在可行解, 则依赖于参数的状态反馈控制器增益矩阵为

$$K(\rho) = R(\rho)V^{-1}. \tag{18}$$

考虑式(5)和式(18), 则式(9)与式(17)等价

注 4　用上述同样的方法, 由式(16)可设计如式(18)所示的状态反馈控制器, 满足

$$\begin{bmatrix} \epsilon^{-1}X(\rho) - (V+V^{\mathrm T}) & V^{\mathrm T} + \epsilon V^{\mathrm T}A^{\mathrm T}(\rho) + \epsilon R^{\mathrm T}(\rho)B^{\mathrm T}(\rho) & 0 & 0 \\ * & -\epsilon^{-1}X(\rho) - \sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial X}{\partial\rho_i}\right) & \left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)A_h(\rho)G & X(\rho) \\ * & * & \left(1-\sum_{i=1}^{s}\left(\tau_i\frac{\partial h}{\partial\rho_i}\right)\right)Y(\rho) - G - G^{\mathrm T} & 0 \\ * & * & * & -Y(\rho) \end{bmatrix} < 0. \tag{19}$$

注 5　借助于文献[10]的近似基函数方法, 可将式(17)～(19)中的 $X(\rho)$, $Y(\rho)$ 和 $R(\rho)$ 表述为

$$X(\rho) = \sum_{j=1}^{s} f_j(\rho)X_j > 0, \tag{20}$$

$$Y(\rho) = \sum_{j=1}^{s} f_j(\rho)Y_j > 0, \tag{21}$$

$$R(\rho) = \sum_{j=1}^{s} f_j(\rho)R_j. \tag{22}$$

然后利用网格技术将参数线性矩阵不等式组转化为有限维的凸优化问题

5　算　　例

考虑如下具有时变状态时滞的 LPV 系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1+0.2\rho_1(t) \\ -2 & -3+0.1\rho_1(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.2\rho_1(t) \\ 0.1+0.1\rho_1(t) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.2\rho_1(t) & 0.1 \\ -2+0.1\rho_1(t) & -0.3 \end{bmatrix} x(t-\mu\rho_2(t)), \tag{23}$$

其中: $\rho_1(t) = \sin t$ 和 $\rho_2(t) = |\cos 5t|$ 为时变参数, 满足 $\rho_1(t) \in [-1, 1]$, $\rho_2(t) \in [0, 1]$, $\dot{\rho}_1(t) \in [-1, 1]$, $\dot{\rho}_2(t) \in [-5, 5]$; $h(t) = \mu\rho_2(t)$ 和 $|\dot{h}(t)| < 1$ 为时变时滞, 参数 $\mu \le \mu_m$ 代表了使系统二次稳定所允许的时滞幅值

本例的目的是确定上述系统的二次稳定性, 即确定使闭环系统二次稳定的最大时滞 μ_m 值, 进而设计相应的状态反馈控制器 首先选取近似基函数

$$f_1(\rho) = 1, f_2(\rho) = \rho_1(t), f_3(\rho) = \rho_2(t),$$

于是有

$$X(\rho) = X_1 + \rho_1(t)X_2 + \rho_2(t)X_3,$$
$$Y(\rho) = Y_1 + \rho_1(t)Y_2 + \rho_2(t)Y_3,$$
$$R(\rho) = R_1 + \rho_1(t)R_2 + \rho_2(t)R_3.$$

运用网格技术将参数的变化区域均匀划分为 9×9 网格, 应用LMI工具箱中求解器feast来判断参数线性矩阵不等式的可行解问题, 并求出可行解所对应的最大时滞 μ_m.

采用定理2的稳定条件(17), 对于 $\epsilon = 0.01$, 可得最大时滞 $\mu_m = 0.2026$, 相应的控制器为

$$K(\rho) = [-100.7855 \quad -23.4047] + \rho_1(t)[-623.8318 \quad -128.5151] + \rho_2(t)[-122.4294 \quad -21.3442].$$

用式(19)的稳定条件可得最大值 $\mu_m = 0.2031$, 相应的控制器为

$$K(\rho) = [0.0010 \quad -4.3025] + \rho_1(t)[-26.8887 \quad -7.5392] + \rho_2(t)[0.2692 \quad -2.3145].$$

可以看出时滞的大小会对系统稳定性产生影响, 两个稳定条件相比, 式(19)比式(17)的参数依赖条件具有较低的保守性.

6 结 语

本文针对一类具有参数变化状态时滞的线性参数变化系统, 提出了新的二次稳定条件, 并得到了相应的状态反馈控制器的设计方法. 所得到的稳定条件表述为参数线性矩阵不等式的解存在性, 是对参数依赖二次稳定研究的进一步扩展. 所得结果可推广到具有多重时变状态时滞以及输入时滞的LPV系统.

参考文献(References):

[1] Watanabe K, Nobuyama E, Kojima A. Recent advances in control of time delay systems: A tutorial review [A]. *Proc of the 35th Conf on Decision & Control*[C]. Kobe, 1996: 2083-2089.

[2] Gao Huijun, Wang Changhong. Robust L_2-L_∞ filtering for uncertain systems with multiple time-varying state delays [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Fundmental Theory and Applications*, 2003, 50(4): 594-599.

[3] 高会军, 王常虹, 李艳辉. 时滞不确定系统的广义 H_2 控制[J]. 电机与控制学报, 2002, 6(4): 328-332.
(Gao H J, Wang C H, Li Y H. Generalized H_2 control for uncertain time-delayed systems [J]. *Electric Machines and Control*, 2002, 6(4): 328-332.)

[4] Wu F, Grigoriadis K M. LPV systems with parameter-varying time delays: Analysis and control[J]. *Automatica*, 2001, 37(2): 221-229.

[5] 郑连伟, 郭立山, 刘晓平. 一类线性参数变化时滞系统的 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(5): 595-598.
(Zheng L W, Guo L S, Liu X P. H_∞ control for a class of linear parameter-varying systems with time-delay [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(5): 595-598.)

[6] Zhang X P, Tsiotras P, Knospe C. Stability analysis of LPV time-delayed systems[J]. *Int J on Control*, 2002, 75(7): 538-558.

[7] Apkarian P, Adams R J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(12): 1941-1946.

[8] De Oliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition [J]. *Systems Control Lett*, 1999, 37(4): 261-265.

[9] Bara G I, Daafouz J, Kratz F. Advanced gain scheduling techniques for the design of parameter-dependent observers[A]. *Proc of the 40th Conf on Decision & Control*[C]. Florida, 2001: 3892-3897.

[10] Shaked U. Improved LMI representations for the analysis and the design for continous-time systems with polotopic type uncertainty[J]. *IEEE Trans on Control System Technology*, 2001, 46(4): 652-656.

[11] Boyd S P, El Ghaoui L, Feron E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[12] Apkarian P, Adams R J. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems[J]. *IEEE Trans on Control System Technology*, 1998, 6(1): 21-32.