

文章编号: 1001-0920(2004)05-0546-04

一种混合优化算法及其收敛性证明

石鸿雁, 陈治飞, 孙昌志

(沈阳工业大学 机器人电机研究所, 辽宁 沈阳 110023)

摘 要: 针对改进的混沌优化方法和 Alopex 算法的特性, 将改进的 Alopex 算法嵌入到改进的混沌优化算法中, 提出一种混合优化算法。此算法充分发挥了改进的 Alopex 算法的快速搜索能力和改进的混沌优化方法细致寻优的特性, 提高了算法的收敛速度, 避免了优化算法陷入局部最优; 同时对改进的混沌优化算法和混合优化算法的收敛性进行了证明。仿真结果表明了算法的有效性。

关键词: 混沌优化; Alopex 算法; 混合优化; 收敛性

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** A

On the convergence of a hybrid optimization algorithm

SHIHong-yan, CHENZhi-fei, SUNChang-zhi

(Research Institute of Electronic Machine for Robots, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China Correspondent: SHIHong-yan, E-mail: shy1231@eyou.com)

Abstract A hybrid optimization algorithm, in which the improved Alopex algorithm is embedded into the improved chaotic optimization algorithm, is proposed based on the properties of the improved chaotic optimization and Alopex algorithm. The algorithm is with the rapid search capability of the improved Alopex algorithm and the subtle search characteristics of the improved chaotic optimization algorithm, and the convergent speed of the presented algorithm avoiding being trapped in local optimum is improved. In the mean time, the convergence of the improved chaotic optimization algorithm and hybrid optimization algorithm are proved. Simulation results show that the algorithm is effective.

Key words: chaotic optimization; Alopex algorithm; hybrid optimization; convergence

1 引 言

1.1 混沌优化方法

混沌现象是不含外加随机因素的完全确定性系统所表现出介于规则和随机之间的一种随机行为。混沌现象不同于混乱和无规律现象, 存在于绝大多数非线性系统中, 混沌现象虽貌似随机现象, 但并非真正如此。混沌现象具有独特的性质: 1) 随机性; 2) 遍历性; 3) 规律性。正是由于混沌的遍历性使其成为搜索过程中避免陷入局部最优的一种机制, 于是混沌优化算法 COA 便应运而生。目前所使用的混沌

优化算法可分为 3 种: 1) 直接利用混沌变量搜索^[1~4]; 2) 为提高算法的性能, 将混沌机制引入其他优化算法中^[5,6]; 3) 通过在 HNN 中引入外部机制产生的混沌噪声构成混沌神经网络进行优化^[7]。

通过对混沌优化方法的分析可知, 混沌优化算法的局限性在于: 1) 单纯提高迭代步数不能显著提高算法搜索的遍历程度; 2) 多轨道并行搜索不能显著提高混沌搜索的遍历程度; 3) 在粗略搜索的最优点附近进行细搜索, 可能导致偏离全局最优点, 影响算法的搜索速度; 4) 根据混沌变量的概率分布特点,

收稿日期: 2003-08-04; 修回日期: 2003-11-25

基金项目: 辽宁省教育厅基金资助项目(202062042)。

作者简介: 石鸿雁(1962—), 女, 辽宁葫芦岛人, 副教授, 博士生, 从事机器人运动规划及优化算法研究; 孙昌志(1938—), 男, 辽宁盖州人, 博士生导师, 从事电机智能化优化设计等研究。

在大范围搜索后,应缩小范围,对概率分布较小的区间进行再搜索^[3]。此外,使用混沌优化算法应注意以下问题:初值的选取应避免不动点 0.25, 0.5 和 0.75,混沌序列个数的选取依优化变量个数的多少而不同,通常变量个数越多,序列越长;二次载波(细搜索)的调节系数选取应适当,开始时不能过小;一次载波(粗搜索)与二次载波的搜索次数要适当。

1.2 改进的 Alopex 算法

Alopex^[8]是一种启发式与随机优化相结合的算法,它从前次自变量变化对目标函数产生的影响中得到启发,用过程控制参数来控制行走方向的概率,利用“噪声”来摆脱局部最优解,使算法具有一定的爬坡能力。它在一定程度上既克服了传统启发式算法易陷入局部最优的缺陷,又克服了模拟退火算法从完全随机搜索到梯度搜索收敛极为缓慢的不足。它不要求目标函数可微,且能保证求出的解满足一定的精度,主要特点是具有快速的搜索能力。

Alopex 算法在迭代过程中,各个自变量不仅可以向正向变化,而且能以一定的概率向反向变化,其目的是使算法跳出局部最优值。从实验得知,为得到全局最优解,自变量正向变化的步长应小一些,避免由于步长过大错过全局最优值;而反向变化步长应大一些,因为反向变化的目的是使目标函数摆脱局部最优值。若反向步长过小,目标函数跳出局部最优的概率不大,由此可能会导致目标函数在某个局部最优解的一侧来回摆动而不能跳出局部最优解,或者即使能跳出局部最优解,但需要多次迭代,导致收敛速度降低。因此,需要对此算法加以改进。改进的模型^[9]为

$$x_i(n) = x_i(n-1) + \delta_i(n), \quad (1)$$

$$\delta_i(n) = \begin{cases} \delta_i, p_i(n) = p_c(n) \text{ 且 } p_i(n) > r_i; \\ \gamma\delta_i, p_i(n) = p_c(n) \text{ 且 } p_i(n) < r_i; \\ -\delta_i, 1 - p_i(n) = p_c(n) \text{ 且 } p_i(n) < r_i; \\ -\gamma\delta_i, 1 - p_i(n) = p_c(n) \text{ 且 } p_i(n) < r_i, \end{cases} \quad (2)$$

$$p_i(n) = 1/(1 + e^{\pm\Delta_i(n)/T}), \quad (3)$$

$$\Delta_i(n) = [x_i(n-1) - x_i(n-2)] \times [F(n-1) - F(n-2)] \quad (4)$$

式中: $x_i(n)$ 为 F 的第 i 个自变量在第 n 次迭代中的取值, $\delta_i(n)$ 和 $p_i(n)$ 分别为第 n 次迭代中自变量 x_i 随机行走的步长和向增加 δ_i 方向行走的概率, r_i 为随机数, $p_c(n)$ 和 $P_c(n)$ 分别为正向变化概率和反向变化概率。式(3)中正、负号的选取与实际问题的有关,正号使问题极小化,负号使问题极大化。 $F(n-1)$ 和 $F(n-2)$ 分别为目标函数在第 $n-1$ 次和第 $n-2$ 次迭代中的取值。

实验表明,为保证算法的收敛速度,需合理选择步长和控制参数,一般 δ_i 初始值的大小根据变量变化的范围来确定,通常取变量变化范围的几分之一或更小。改进的 Alopex 算法的收敛速度对初始值的依赖性有所降低。

2 混合优化方法

解决非线性约束最优化问题的基本方法为罚函数法,但这种方法使目标函数复杂程度加大。而在非线性约束最优化问题的求解中,将算法在可行域上实施取得了较好的效果^[10]。它在改进的混沌优化算法中,引入了 Ulam-von Neumann 映射,克服了原有的混沌优化算法在 Logistic 映射作用下的单侧邻域内搜索,使算法在当前优化点的双侧寻优;而且,在 Ulam-von Neumann 混沌映射作用下,使优化变量的搜索位置随着混沌变量点在混沌映射区间的遍历而改变,更易跳出局部最优区间;在算法中还引入了衰减系数,使调节系数以衰减系数和循环次数构成的幂函数进行衰减,缩小搜索区间,加快了算法的收敛速度。

Alopex 算法计算简单,抗噪声,具有快速的搜索能力,但同时其收敛速度受变量初始值的影响较大,若初始值离全局最优解较远,则收敛速度很慢,对复杂的非线性多峰函数求解全局最优解的概率并不大;而混沌优化算法具有全局收敛性(证明见下节),但由于概率分布的不均匀性,混沌优化算法的搜索效率并不高。因此,将改进的混沌优化方法与改进的 Alopex 算法相结合得到混合优化算法是一种很好的尝试。

混合优化算法的基本思想是:首先利用混沌变量进行粗略搜索;然后采用 Alopex 策略搜索;最后进行混沌精确搜索,即对得到的近优解实施 Ulam-von Neumann 映射,使后面的搜索在近优解的两侧进行。具体步骤如下:

- 1) 初始化:由随机函数产生混沌变量的初始值;
- 2) 将混沌变量映射为优化变量;
- 3) 用混沌变量进行粗略搜索,并为 Alopex 搜索作好准备;
- 4) 进行 Alopex 搜索;
- 5) 二次映射进行较优搜索,先进行 Ulam-von Neumann 映射,再进行二次映射;
- 6) 实行 3 次 Ulam-von Neumann 映射,进行最

优搜索;

7) 检验终止条件是否满足, 若满足, 输出最优解, 否则重复 5) ~ 7) 步.

3 混沌优化算法的收敛性证明

混沌优化算法因其能够避免搜索过程陷入局部最优而引起人们极大兴趣, 但研究始终局限于对特定问题的数值仿真上, 缺乏严格的理论论证^[11]. 受文献[4]的启发, 这里给出改进的混沌优化算法以及混合优化算法的收敛性证明

定理 1 改进的混沌优化算法使如下约束最优化问题:

$$\begin{aligned} \min & f(x), x \in R^n; \\ \text{s.t.} & s_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, l; \\ & h_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5)$$

依概率收敛到全局最优解

证明 设 $x^* = \min_x f(x)$ 为全局最优解, 其中:

$f(x^*)$ 为最优值, D 为可行域, 即

$$D = \{x \mid s_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, l; h_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m; x \in R^n\}$$

且 $D \subset R^n, x^{(k)}$ 表示第 $k (k = 1, 2, \dots, s)$ 次迭代的最优解, 其中 s (充分大) 为迭代次数; 对任意正数 $\epsilon \in N_\epsilon = \{x \mid x \in D, f(x) - f(x^*) < \epsilon\}$ 为全局最优解 x^* 的邻域. 由于改进的混沌优化算法是下降算法, 于是 $f(x^{(k)})$ 是单调不增的序列, 即

$$f(x^{(1)}) \geq f(x^{(2)}) \geq \dots \geq f(x^{(k)}) \geq \dots,$$

于是有

$$\begin{aligned} f(x^{(1)}) - f(x^*) & \geq f(x^{(2)}) - f(x^*) \\ & \geq \dots \geq f(x^{(k)}) - f(x^*) \geq \dots \end{aligned}$$

再设随机事件序列

$$A_m = \{\omega \mid x^{(m)} \in N_\epsilon, m = \{1, 2, \dots, s\}\}$$

表示迭代序列第 m 次落入 N_ϵ 邻域. 对给定的 ϵ , 由于混沌算法的遍历性, 事件 A_1 发生, 必然导致事件 A_2 发生, 而事件 A_2 发生, 必然导致事件 A_3 发生, 等等. 于是有 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_m \subseteq \dots$, 从而 $P(A_1) \leq P(A_2) \leq \dots \leq P(A_m) \leq \dots$, 又因 $0 \leq P(A_m) \leq 1$, 于是 $\lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m)$ 存在

下面证明 $\lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m) = 1$.

设随机变量序列

$$\xi_m = \begin{cases} 1, & \text{第 } m \text{ 次迭代落入 } N_\epsilon \\ 0, & \text{第 } m \text{ 次迭代不落入 } N_\epsilon \end{cases}, m = 1, 2, \dots,$$

则 $A_m = \{\xi_m = 1\}$. 令

$$P\{\xi_m = 1\} = p_m, P\{\xi_m = 0\} = 1 - p_m,$$

$$S_m = \sum_{i=1}^m \xi_i, m = 1, 2, \dots,$$

$$\text{则 } E(S_m) = \sum_{i=1}^m p_i, m = 1, 2, \dots;$$

$$D(S_m) = \sum_{i=1}^m D(\xi_i) = \sum_{i=1}^m p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{4m}.$$

其中: $E(S_m)$ 为序列 $S_m (m = 1, 2, \dots, n)$ 的数学期望, $D(S_m)$ 为序列 S_m 的方差. 由契比雪夫不等式有

$$\begin{aligned} P\{|S_m - E(S_m)| < \epsilon\} \\ \geq 1 - \frac{D(S_m)}{\epsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4m\epsilon^2}, \end{aligned}$$

于是 $\lim_{m \rightarrow \infty} P\{|S_m - E(S_m)| < \epsilon\} = 1$. 又因

$$\xi_m = mS_m - (m - 1)S_{m-1}, m = 1, 2, \dots,$$

从而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\{|\xi_m - E(\xi_m)| < \epsilon\} = 1.$$

上式说明随机变量序列 $\xi_m (m = 1, 2, \dots)$ 依概率收敛, 因此, 随机事件序列 $A_m (m = 1, 2, \dots)$ 亦依概率收敛, 故

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m) = 1.$$

推论 1 混沌优化算法使

$$\min f(x), x \in R^n, a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

依概率收敛到全局最优解

定理 2 混合优化算法使如下约束最优化问题:

$$\begin{aligned} \min & f(x), x \in R^n; \\ \text{s.t.} & s_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, l; \\ & h_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (7)$$

依概率收敛到全局最优解.

证明 由定理 1 知混沌优化算法依概率收敛于全局最优解, 又由文献[12]知 Alopex 算法具有全局收敛性, 而 Alopex 算法在混合优化算法中所起的作用是加快收敛速度, 因此将 Alopex 算法嵌入混沌优化算法中得到的混合优化算法亦依概率收敛到全局最优解

4 仿真实例

为验证提出的混合优化算法的有效性, 以国际上常用的有函数约束和变量约束的测试函数进行仿真实验^[13]. 问题如下:

$$\begin{aligned} \min & f(x) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + \\ & x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + \\ & x_7^4 - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7 \end{aligned}$$



s t

$$\begin{aligned}
 &127 - 2x_1^2 - 3x_2^4 - x_3 - 4x_4^4 - 5x_5 = 0, \\
 &282 - 7x_1 - 3x_2 - 10x_3^2 - x_4 + x_5 = 0, \\
 &196 - 23x_1 - x_2^2 - 6x_6^2 + 8x_7 = 0, \\
 &- 4x_1^2 - x_2^2 - 3x_1x_2 - 2x_3^2 - 5x_6 + 11x_7 = 0, \\
 &- 10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, \dots, 7.
 \end{aligned}$$

本问题的理论最优解为

$$x^* = (2.33049, 1.95137, -0.47754, 4.36572, -0.624487, 1.038131, 1.594227),$$

最优值为

$$f(x^*) = 680.6300573$$

应用混沌优化算法, 当调节系数 α 取为 0.1, 混沌序列中的点数 $n = 4000$ 时, 求出的函数逐次逼近最优解搜索过程曲线如图 1 所示

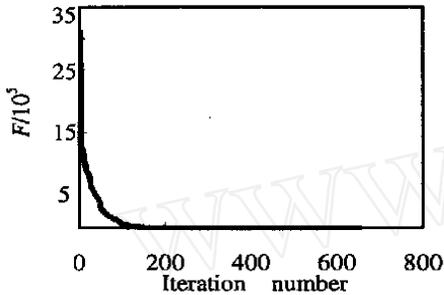


图 1 应用混沌优化算法求出函数逐次逼近最优解搜索过程

混沌优化算法得到的最优解为

$$x^* = (2.33217, 1.95115, -0.48009, 4.36580, -0.62378, 1.03636, 1.59588),$$

最优值为

$$f(x^*) = 680.630175$$

为便于比较, 对上述函数应用 Alopex 算法求解, 搜索到的可行解与正向变化概率曲线如图 2 所示

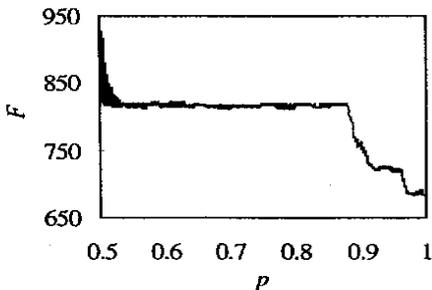


图 2 目标函数值 F 与自变量正向变化概率 p 的关系曲线

最优解为

$$x^* = (2.392025, 1.941816, -0.101692, 4.312848, -0.284617, 1.095821, 1.659681),$$

最优值为

$$f(x^*) = 682.358705$$

而对上述函数采用混合优化算法, α 调节系数仍取为 0.1, 混沌序列中的点数仍取 $n = 4000$, 当正向变化大于 0.9 时作为 Alopex 算法的终止条件. 其逐次逼近最优解收敛过程曲线如图 3 所示

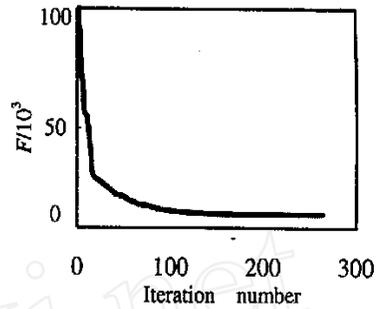


图 3 应用混合优化算法求解函数逐次逼近最优解搜索过程

最优解为

$$x^* = (2.32939, 1.95116, -0.47932, 4.36695, -0.62509, 1.03604, 1.59236),$$

最优值为

$$f(x^*) = 680.630157$$

5 结 论

本文针对混沌优化方法和 Alopex 算法的特性, 将改进的 Alopex 算法嵌入到改进的混沌优化算法中, 得到了混合优化算法, 此算法充分发挥了 Alopex 算法的快速搜索能力和混沌优化算法避免陷入局部最优的特性, 提高了算法的收敛速度, 同时给出了混合优化算法的收敛证明, 仿真结果也佐证了这一点. 至于算法中的参数需根据实际问题确定, 要得到规律性的结果还需作进一步的研究

参考文献 (References):

[1] 李兵, 蒋慰孙. 混沌优化方法及其应用[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(4): 613-615.
 (Li B, Jiang W S. Chaos optimization method and its application[J]. Control Theory and Applications, 1997, 14(4): 613-615.)

[2] Choi C, Lee J. Chaotic local search algorithm [J]. Artificial Life & Robotics, 1998, 2(1): 41-47.

(下转第 553 页)

$$\left\{ \begin{array}{l} C(1) = [R_0 Y_0 \% + U(0)](1 + \beta\%), \\ C(2) = [R_1 Y_1 \% + U_1 + C(1)(1 - \\ \alpha)\alpha](1 + \beta\%), \\ C(3) = [R_2 Y_2 \% + U_2 + C(2)(1 - \\ \alpha)\alpha](1 + \beta\%), \\ \vdots \\ C(T) = [R_{T-1} Y_{T-1} \% + U_{T-1} + C(T- \\ 1)(1 - \alpha)\alpha](1 + \beta\%). \end{array} \right. \quad (15)$$

可以看出, 该模型不仅能对调节参数和管理水平(政府投资水平)进行调节, 而且还能对各年度的投资进行控制调节, 以使经济运行在一个良性的循环上。这一模型较为确切地刻画了现实经济运行的决策与调控过程, 因此, 该模型对于宏观经济运行的调节与控制是非常有参考意义的。

4 结 语

本文首先模拟了宏观经济运行的频率形式的传递函数和时域形式的控制模型, 说明了它们在实际

运用中的局限性; 然后结合经济规划的实际情况, 给出了经济运行的更替循环控制模型和离散逐次投入控制决策模型, 它是实际经济运行的真实模拟。

参考文献(References):

- [1] SM 欣纳内尔. 现代控制理论及应用[M]. 李育才译. 北京: 机械工业出版社, 1979. 111-120
- [2] 张逸民, 范崇惠. 经济控制论[M]. 上海: 同济大学出版社, 1988. 170-180
- [3] 高葆旺, 陈锡洪. 重庆统计年鉴[M]. 北京: 中国统计出版社, 1990. 35-140
- [4] 伍俊良. 多国收入和贸易的系统模型[J]. 系统工程, 1992, (5): 23-26
(Wu J L. A system model of multinational gaining and trad[J]. *System Engineering*, 1992, (5): 23-26)
- [5] Wu J L. Design and Research Which Make Use of Von Neumann Model to Setup Macroeconomy Monitor and Warn System [M]. China: Int Academic Publish, 1993. 191-192

(上接第 549 页)

- [3] 梁瑞鑫, 郑德玲. 基于区间混沌搜索的混合优化方法[J]. 北京科技大学学报, 2002, 24(3): 342-344
(Liang R X, Zheng D L. Hybrid optimization algorithm based on nested intervals chaos search [J]. *J of University of Science and Technology*, 2002, 24(3): 342-344)
- [4] 张彤, 王宏伟, 王子才. 变尺度混沌优化方法及其应用[J]. 控制与决策, 1999, 14(3): 285-288
(Zhang T, Wang H W, Wang Z C. Mutative scale chaos optimization algorithm and its application [J]. *Control and Decision*, 1999, 14(3): 285-288)
- [5] Wang L, Smith K. On chaotic simulated annealing[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1998, 9(4): 716-718
- [6] 李亚东, 李少远. 一种新的遗传混沌优化组方法[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 143-145
(Li Y D, Li S Y. A new genetic chaos optimization combination method [J]. *Control Theory and Applications*, 2002, 19(1): 143-145)
- [7] Hayakawa Y, Marumoto A, Sawada Y. Effects of the chaotic noise on the performance of neural network model for optimization problems [J]. *Physical Review E*, 1995, 51(4): R2693-R2696
- [8] Pandya A S. A stochastic parallel optimization algorithm [D]. USA: Syracuse University, 1988
- [9] 弥丽娜, 陈治飞, 孙昌志. 一种随机并行算法——Alopx算法的改进[J]. 沈阳工业大学学报, 2000, 22(4): 296-299
(Mi L N, Chen Z F, Sun C Z. Improved on a stochastic parallel alopx algorithm [J]. *J of Shenyang University of Technology*, 2002, 22(4): 296-299)
- [10] 陈治飞, 石鸿雁, 安跃军, 等. 混沌优化算法在约束最优化问题中的应用[J]. 控制与决策, 2002, 17(S2): 111-114
(Chen Z F, Shi H Y, An Y J, et al. Application of chaotic optimization algorithm to problems with constrained optimization [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(S2): 111-114)
- [11] 王凌, 郑大钟, 李清生. 混沌优化方法的研究进展[J]. 计算技术与自动化, 2001, 20(1): 1-5
(Wang L, Zheng D Z, Li Q S. Survey on chaotic optimization methods [J]. *Computing Technology and Automation*, 2001, 20(1): 1-5)
- [12] 乔长阁. 一个随机并行算法的收敛性分析[J]. 数值计算与计算机应用, 1996, (4): 308-312
(Qiao C G. Convergence analysis of a stochastic parallel algorithm [J]. *Numerical Calculation and Computer Application*, 1996, (4): 308-312)
- [13] 陈治飞. 混合优化算法的研究及其在水下电机的应用[D]. 沈阳: 沈阳工业大学, 2003. 26-52