第 19 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2004 年 5 月
Vol 19 No. 5 Control and Decision May 2004

文章编号: 1001-0920(2004)05-0496-05

不确定线性多时变时滞系统的时滞相关鲁棒控制

张先明, 吴 敏, 何 勇
(中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘 要: 提出一种积分不等式新方法, 讨论不确定线性多时变时滞系统的鲁棒稳定性以及鲁棒稳定化问题 首先利用 Park 不等式建立了基于二次型项的积分不等式, 利用这一不等式获得了系统基于LMI的时滞相关、时滞导数相关鲁棒稳定条件; 然后利用这一条件给出了时滞状态反馈控制器的一种新的设计方法 数值例子说明了所得结论具有较小的保守性

关键词: 时滞相关; 鲁棒稳定性; 鲁棒稳定化; 时滞状态反馈; LMI
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Delay dependent robust control for linear systems with multiple time-varying delays and uncertainties

ZHANG Xian-ming, WU Min, HE Yong
(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: ZHANG Xian-ming, E-mail: zhangxmy@mail csu. edu. cn)

Abstract: A new method called integral inequality method (IM) is proposed to study the delay-dependent robust stability and stabilization for linear systems with multiple time-varying delays and norm-bounded uncertainties First, an integral inequality for quadratic terms is established by using the Park inequality. Secondly, a new robust criterion of delay and its derivation dependent for determining the stability of systems with time-varying delays is obtained. This criterion is used to design an efficient stabilizing delayed state-feedback controller for systems with norm-bounded uncertainties Finally, examples illustrate that the new results are of less conservative than that of the present literatures

Key words: delay-dependent; robust stability; robust stabilization; state-feedback with delay; linear matrix inequality

1 引 言

近年来, 时滞相关鲁棒稳定及鲁棒稳定化得到了广泛的研究[1~6]. 从最近的文献看, 采用的方法基本是对系统进行模型变换, 将原系统模型变换为与原系统等价或不等价的新系统[1], 然后利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函和LMI方法, 引入各种技巧, 获得时滞相关鲁棒稳定条件及鲁棒控制器 这类思想已广泛用于实际工程系统[2,3]. 然而采用这种思想所得到的条件具有一定的保守性 如何减小这种保守性, 扩大系统稳定的时滞界限, 以及如何设计控制器, 尚在进一步研究之中

本文提出一种新的方法, 讨论了不确定线性多时变时滞系统的鲁棒稳定性及鲁棒稳定化等问题 首先利用Park不等式[7]建立了基于二次型项的积

收稿日期: 2003-05-19; **修回日期**: 2003-06-23
基金项目: 教育部博士点基金资助项目(2000053303); 教育部青年教师奖励计划资助项目(教人[2002]5 号).
作者简介: 张先明(1967—), 男, 湖南桃江人, 博士生, 从事鲁棒控制等研究; 吴敏(1963—), 男, 广东化州人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、智能控制和过程控制等研究

分不等式, 然后利用这一不等式, 采用 Lyapunov-Krsasovskii 泛函方法, 不必对原系统进行模型变换, 得到系统时滞相关与时滞导数相关的鲁棒稳定条件, 并给出一种新的时滞状态反馈控制器的设计方法. 实例表明, 本文所获得的时滞相关鲁棒稳定条件和鲁棒控制器, 较已有文献均具有较小的保守性.

全文沿用如下记号: A^{-T} 表示矩阵 A 的转置的逆; $P>0$ 表示 P 为对称正定阵; $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 分别表示实数域上的 n 维向量空间与 $n\times n$ 矩阵空间; I 表示具有适当维数的单位矩阵; $\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z\end{bmatrix}$ 表示对称矩阵 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z\end{bmatrix}$.

2　问题描述

为简单起见, 考虑如下具两个时变时滞的不确定线性时滞系统:

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)+\sum_{j=1}^{2}(A_j+\Delta A_j(t))x(t-h_j(t))+Bu(t),\tag{1}$$

$$x(t)=\varphi(t),\ \forall t\in[-\max\{\bar{h}_1,\bar{h}_2\},0].\tag{2}$$

其中: $x(t)\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态, $u(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制输入; $h_j(t)\ (j=1,2)$ 为时变时滞, 且满足: $0\le h_j(t)\le\bar{h}_j<\infty$, $0\le\dot{h}_j(t)\le d_j<1$, $j=1,2$; $\varphi(t)$ 为初始条件; A,A_1,A_2,B 为具有适当维数的常数实矩阵; $\Delta A(t),\Delta A_1(t),\Delta A_2(t)$ 为实矩阵函数, 表示时变参数不确定性, 具有以下形式:

$$\begin{cases}\Delta A(t)=DF(t)E,\\ \Delta A_j(t)=DF(t)E_j,\ j=1,2,\end{cases}\tag{3}$$

其中: $F(t)$ 为具有适当维数的时变未知实矩阵, 且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\le I$, $\forall t$; D,E,E_1,E_2 为已知的常数实矩阵.

为便于讨论, 引入如下时滞状态反馈:

$$u(t)=Kx(t)+\sum_{j=1}^{2}K_jx(t-h_j(t)).\tag{4}$$

具有时滞的状态反馈(4) 充分考虑了时滞的大小, 因而较通常的无记忆控制器

$$u(t)=Kx(t)\tag{5}$$

具有较小的保守性.

本文主要讨论不确定系统(1) 和(2) 的鲁棒稳定以及鲁棒稳定化依赖于时滞及时滞导数的充分条件, 然后设计形如式(4) 的控制器镇定原系统. 为此, 首先引入如下引理.

引理 1[8]　给定矩阵 $Q=Q^{\mathrm{T}}$, $R=R^{\mathrm{T}}>0$, 以及适当维数的矩阵 H 和 E, 则

$$Q+HFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0$$

对任意满足 $F^{\mathrm{T}}F\le I$ 的 F 成立的充要条件是存在 $\epsilon>0$, 使得

$$Q+\epsilon^{-1}HH^{\mathrm{T}}+\epsilon E^{\mathrm{T}}E<0.$$

引理 2[7]　对 $\forall a,b\in\mathbf{R}^n$, $\forall R=R^{\mathrm{T}}>0$, $\forall M\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 有如下不等式成立:

$$-2a^{\mathrm{T}}b\le\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R & RM\\ M^{\mathrm{T}}R & (M^{\mathrm{T}}R+I)R^{-1}(RM+I)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}.$$

下面利用引理 2 建立一个基于二次型项的积分不等式, 它在后面的分析中起着重要作用.

引理 3　设 $x(t)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上具有连续一阶导数的向量函数, 则对 $\forall M_1,M_2\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\forall R>0$, $\forall h\ge 0$, 满足不等式

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s\le \xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}M_1^{\mathrm{T}}+M_1 & -M_1^{\mathrm{T}}+M_2\\ * & -M_2^{\mathrm{T}}-M_2\end{bmatrix}\xi(t)+h\xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}M_1^{\mathrm{T}}\\ M_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}R^{-1}[M_1\ \ M_2]\xi(t).$$

其中

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h)].$$

证明　由 Leibniz-Newton 公式, 有

$$x(t)-x(t-h)=\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

于是对 $\forall N_1,N_2\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 有

$$0=2[x^{\mathrm{T}}(t)N_1^{\mathrm{T}}+x^{\mathrm{T}}(t-h)N_2^{\mathrm{T}}]\times\left[x(t)-x(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right].$$

利用引理 2 不难证得, 在此从略. □

3　主要结果

下面讨论系统(1) 和(2) 的鲁棒稳定性与鲁棒稳定化问题. 首先建立系统(1) 和(2) 的时滞相关鲁棒稳定条件, 然后利用这一条件讨论系统的鲁棒稳定化, 同时给出鲁棒控制器的设计方法.

定理 1　如果存在 $P>0$, $R_j>0$, $Q_j>0$, $j=1,2$, 以及 $M_{j1},M_{j2}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $j=1,2$, 使得如下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \bar{h}_1 A^{\mathrm{T}} R_1 & \bar{h}_2 A^{\mathrm{T}} R_2 & \bar{h}_1 M_{11}^{\mathrm{T}} & \bar{h}_2 M_{21}^{\mathrm{T}} & PD & \epsilon E^{\mathrm{T}} \\ * & \varphi_{22} & 0 & \bar{h}_1 A_1^{\mathrm{T}} R_1 & \bar{h}_2 A_1^{\mathrm{T}} R_2 & \bar{h}_1 M_{12}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \epsilon E_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & \varphi_{33} & \bar{h}_1 A_2^{\mathrm{T}} R_1 & \bar{h}_2 A_2^{\mathrm{T}} R_2 & 0 & \bar{h}_2 M_{22}^{\mathrm{T}} & 0 & \epsilon E_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -\bar{h}_1 R_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{h}_1 R_1 D & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{h}_2 R_2 & 0 & 0 & \bar{h}_2 R_2 D & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{h}_1 R_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{h}_2 R_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases} \varphi_{11} = PA + A^{\mathrm{T}} P + \sum_{j=1}^{2} [Q_j + M_{j1}^{\mathrm{T}} + M_{j1}], \\ \varphi_{12} = PA_1 - M_{11}^{\mathrm{T}} + M_{12}, \\ \varphi_{13} = PA_2 - M_{21}^{\mathrm{T}} + M_{22}, \\ \varphi_{22} = -(1 - d_1) Q_1 - M_{12}^{\mathrm{T}} - M_{12}, \\ \varphi_{33} = -(1 - d_2) Q_2 - M_{22}^{\mathrm{T}} - M_{22}, \end{cases} \tag{7}$$

则未扰系统(1) 和(2) 对 $\forall h_j(t) \in [0, \bar{h}_j]\,(j = 1, 2)$ 鲁棒渐近稳定.

证明　记 $A_R = A + DF(t)E$, $A_{jR} = A_j + DF(t)E_j$, $j = 1, 2$, 取Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(t) = x^{\mathrm{T}}(t) P x(t) + \sum_{j=1}^{2} \int_{-\bar{h}_j}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_j \dot{x}(s) \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta + \sum_{j=1}^{2} \int_{t-h_j(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s) Q_j x(s) \,\mathrm{d}s,$$

则 $V(t)$ 沿系统(1) 的导数为

$$\dot{V}(t) = 2x^{\mathrm{T}}(t) P \dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{2} \bar{h}_j \dot{x}^{\mathrm{T}}(t) R_j \dot{x}(t) + \sum_{j=1}^{2} [x^{\mathrm{T}}(t) Q_j x(t) - (1 - \dot{h}_j(t)) \times x^{\mathrm{T}}(t - h_j(t)) Q_j x(t - h_j(t))] - \sum_{j=1}^{2} \int_{t-\bar{h}_j}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_j \dot{x}(s) \,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

因为 $h_j(t) \leqslant \bar{h}_j$, 于是

$$-\int_{t-\bar{h}_j}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_j \dot{x}(s) \,\mathrm{d}s \leqslant -\int_{t-h_j(t)}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s) R_j \dot{x}(s) \,\mathrm{d}s$$

利用引理 3, 并令

$$\xi^{\mathrm{T}}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t) \quad x^{\mathrm{T}}(t - h_1(t)) \quad x^{\mathrm{T}}(t - h_2(t))],$$

得到

$$\dot{V}(t) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t) \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ * & \varphi_{22} & 0 \\ * & * & \varphi_{33} \end{bmatrix} \xi(t) + \xi^{\mathrm{T}}(t) \begin{bmatrix} A_R^{\mathrm{T}} \\ A_{1R}^{\mathrm{T}} \\ A_{2R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) \times [A_R \quad A_{1R} \quad A_{2R}] \xi(t) + \sum_{j=1}^{2} \bar{h}_j \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h_j(t)) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} M_{j1}^{\mathrm{T}} \\ M_{j2}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \times R_j^{-1} [M_{j1} \quad M_{j2}] \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h_j(t)) \end{bmatrix}.$$

如果LMI(6) 有解, 则经适当整理, 利用引理 1 及 Schur 补[9], 有 $\dot{V}(t) < 0$, 从而结论得证. □

定理 1 给出了未扰系统(1) 和(2) 的时滞相关与时滞导数相关鲁棒稳定条件, 该条件中自由矩阵 $M_{j1}, M_{j2} \in \mathbf{R}^{n \times n}\,(j = 1, 2)$ 的引入, 为设计形如式(4) 的鲁棒控制器提供了一种新的方法.

系统(1) 和(2) 经状态反馈控制律(4) 作用后的闭环系统为

$$\dot{x}(t) = (A + BK + \Delta A(t)) x(t) + \sum_{j=1}^{2} (A_j + BK_j + \Delta A_j(t)) \times x(t - h_j(t)). \tag{9}$$

定理 2　给定 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}$, 如果存在 $\bar{P} > 0$, $\bar{R}_j > 0$, $\bar{Q}_j > 0$, $j = 1, 2$, 具有适当维数的矩阵 Y, Y_1, Y_2, $0 < \bar{\epsilon} \in \mathbf{R}$, 使得如下LMI成立:

$$
\begin{bmatrix}
\omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{15} & 0 & 0 & \bar P & \bar P & \bar\epsilon D & \varphi_1 \\
* & \omega_{22} & & \omega_{24} & \omega_{25} & \bar h_1 \bar P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_2 \\
* & * & \omega_{33} & \omega_{34} & \omega_{35} & 0 & \bar h_2 \bar R_2 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 \\
* & * & * & -\bar h_1 \bar R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar\epsilon \bar h_1 D & 0 \\
* & * & * & * & -\bar h_2 \bar R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar\epsilon \bar h_2 D & 0 \\
* & * & * & * & * & -\bar h_1 \bar R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\bar h_2 \bar R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -\bar Q_1 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\bar Q_2 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar\epsilon I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar\epsilon R^{-1}
\end{bmatrix} < 0, \tag{10}
$$

其中

$$\varphi_1 = \bar P E^{\mathrm T} - \lambda_1 \mu_1^{-1} \bar Q_1 E_1^{\mathrm T} - \lambda_2 \mu_2^{-1} \bar Q_2 E_2^{\mathrm T},$$

$$\varphi_2 = \mu_1^{-1} \bar Q_1 E_1^{\mathrm T},\ \varphi_3 = \mu_2^{-1} \bar Q_2 E_2^{\mathrm T},$$

$$\omega_{11} = A \bar P + \bar P A^{\mathrm T} + B Y + Y^{\mathrm T} B^{\mathrm T} - \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \mu_j^{-1} [A_j \bar Q_j + \bar Q_j A_j^{\mathrm T} + B Y_j + Y_j^{\mathrm T} B^{\mathrm T}] - \sum_{j=1}^{2} \lambda_j^2 \mu_j^{-2} (1 - d_j) \bar Q_j,$$

$$\omega_{12} = \bar P + \mu_1^{-1} A_1 \bar Q_1 + \mu_1^{-1} B Y_1 + \lambda_1 \mu_1^{-1} \bar Q_1 + \lambda_1 \mu_1^{-2} (1 - d_1) \bar Q_1,$$

$$\omega_{13} = \bar P + \mu_2^{-1} A_2 \bar Q_2 + \mu_2^{-1} B Y_2 + \lambda_2 \mu_2^{-1} \bar Q_2 + \lambda_2 \mu_2^{-2} (1 - d_2) \bar Q_2,$$

$$\omega_{14} = \bar h_1 V_0,\ \omega_{15} = \bar h_2 V_0,$$

$$V_0 = \bar P A^{\mathrm T} + Y^{\mathrm T} B^{\mathrm T} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mu_j^{-1} (\bar Q_j A_j^{\mathrm T} + Y_j^{\mathrm T} B^{\mathrm T}),$$

$$\omega_{24} = \bar h_1 \mu_1^{-1} V_1,\ \omega_{25} = \bar h_2 \mu_1^{-1} V_1,$$

$$\omega_{34} = \bar h_1 \mu_2^{-1} V_2,\ \omega_{35} = \bar h_2 \mu_2^{-1} V_2,$$

$$V_1 = \bar Q_1 A_1^{\mathrm T} + Y_1^{\mathrm T} B^{\mathrm T},\ V_2 = \bar Q_2 A_2^{\mathrm T} + Y_2^{\mathrm T} B^{\mathrm T},$$

$$\omega_{22} = -2\mu_1^{-1} \bar Q_1 - \mu_1^{-2} (1 - d_1) \bar Q_1,$$

$$\omega_{33} = -2\mu_2^{-1} \bar Q_2 - \mu_2^{-2} (1 - d_2) \bar Q_2,$$

则闭环系统(9) 鲁棒稳定, 且时滞鲁棒控制器为

$$u(t) = Y \bar P^{-1} x(t) + \sum_{j=1}^{m} Y_j \bar Q_j^{-1} x(t - h_j(t)).$$

证明　令 $A_K = A + BK$, $A_{jK} = A_j + BK_j$, 分别用 A_K 和 A_{jK} 代替定理 1 中的 A 和 A_j, $j = 1, 2$, 然后作适当的代数运算, 并令

$$
W = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & 0 & M_{22} \end{bmatrix},\ \bar A = \begin{bmatrix} A_K & A_{1K} & A_{2K} \\ I & -I & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix},
$$

由定理 1, 如果下式成立:

$$
H_K := \begin{bmatrix}
W^{\mathrm T} \bar A + \bar A^{\mathrm T} W + Q & \bar h_1 \begin{bmatrix} A_K^{\mathrm T} \\ A_{1K}^{\mathrm T} \\ A_{2K}^{\mathrm T} \end{bmatrix} & \bar h_2 \begin{bmatrix} A_K^{\mathrm T} \\ A_{1K}^{\mathrm T} \\ A_{2K}^{\mathrm T} \end{bmatrix} & \bar h_1 W^{\mathrm T} \begin{bmatrix} 0 \\ R_1^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \bar h_2 W^{\mathrm T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_2^{-1} \end{bmatrix} & W^{\mathrm T} \begin{bmatrix} \epsilon^{-1} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E^{\mathrm T} \\ E_1^{\mathrm T} \\ E_2^{\mathrm T} \end{bmatrix} \\
* & -\bar h_1 R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & \bar h_1 \epsilon^{-1} D & 0 \\
* & * & -\bar h_2 R_2^{-1} & 0 & 0 & \bar h_2 \epsilon^{-1} D & 0 \\
* & * & * & -\bar h_1 R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\bar h_2 R_2^{-1} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\epsilon^{-1} I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\epsilon^{-1} I
\end{bmatrix} < 0,
$$

其中

$$Q = \mathrm{diag}\left\{ \sum_{j=1}^{2} Q_j,\ -(1 - d_1) Q_1,\ -(1 - d_2) Q_2 \right\},$$

则闭环系统(9) 渐近稳定. 设

$$M_{j1} = \lambda_j P,\ M_{j2} = \mu_j Q_j,$$

$$\mu_j \neq 0,\ \lambda_j, \mu_j \in \mathbf{R},$$

$$j = 1, 2,$$

则 W 可逆, 且

$$
W^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ -M_{12}^{-1} M_{11} P^{-1} & M_{12}^{-1} & 0 \\ -M_{22}^{-1} M_{21} P^{-1} & 0 & M_{22}^{-1} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ -\lambda_1 \mu_1^{-1} Q_1^{-1} & \mu_1^{-1} Q_1^{-1} & 0 \\ -\lambda_2 \mu_2^{-1} Q_2^{-1} & 0 & \mu_2^{-1} Q_2^{-1} \end{bmatrix}.
$$

令 $T = \mathrm{diag}\{W^{-1}, I_{6n}\}$, 对 H_K 进行合同变换,

左乘 T^{T}, 右乘 T, 并令

$$\bar{P} = P^{-1}, Y = KP^{-1}, Y_j = K_j\bar{Q}_j^{-1},$$
$$\bar{Q}_j = Q_j^{-1}, \bar{R}_j = R_j^{-1}, j = 1, 2, \bar{\epsilon} = \epsilon^{-1}.$$

经计算、整理, 由 Schur 补[9], 如果 LMI(10) 有解, 则 $H_K < 0$. 由定理 1 知结论成立. □

4 应用实例

例 1 考虑不确定线性时滞系统[4,5]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 + \delta_1\cos t & 0 \\ 0 & -1 + \delta_2\sin t \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 + r_1\cos t & 0 \\ -1 & -1 + r_2\sin t \end{bmatrix} x(t - h(t)), \tag{11}$$

其中: $|\delta_1| \leq 1.6$, $|\delta_2| \leq 0.05$, $|r_1| \leq 0.1$, $|r_2| \leq 0.3$, $h(t) \leq \bar{h}$, $\dot{h}(t) \leq d < 1$.

为使系统(11) 鲁棒稳定, 利用定理 1 以及文献[4,5] 的结论, 得到对应于各种时滞变化率的最大时滞稳定界, 见表 1.

表 1 系统(11) 对应于 d 的最大时滞界限 $\bar{h}$

$\bar{h}$	d		
	0	0.5	0.9
$\bar{h}^{[4]}$	0.241 2	< 0.2	< 0.1
$\bar{h}^{[5]}$	0.241 2	0.219 5	0.156 1
$\bar{h}$	1.149	0.924 7	0.695 4

从表 1 可以看出, 用本文结论得到的时滞界限较文献[4,5] 明显扩大, 因而具有较小的保守性.

例 2 考虑如下不确定线性时滞系统[6]:

$$\dot{x}(t) = (A + DF(t)E)x(t) + A_1x(t - h) + Bu(t), \tag{12}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 0.2 & \\ & 0.2 \end{bmatrix}, E = I, F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leq I, h \geq 0.$$

为使系统(12) 鲁棒稳定, 利用定理 2(取 $\lambda_1 = -1.9$, $\mu_1 = 1.18$) 和文献[6,7] 的方法, 得到最大时滞稳定界限及相应的状态反馈控制器, 见表 2.

表 2 系统(12) 的最大时滞界限 $\bar{h}$ 及相应的鲁棒控制器 $u(t) = Kx(t)$

	$\bar{h}$	K
文献[7]	0.55	[- 0.022 9, - 52.865 6]
文献[6]	0.586 5	[- 0.315 5, - 4.441 7]
本文定理 2	0.635 2	[- 0.462 8, - 1.523 0]

从表 2 可以看出, 用本文方法, 得到的时滞界限以及鲁棒控制器明显优于文献[6,7].

另外, 如果用鲁棒控制器(4) 镇定系统(12), 由本文定理 2, 取 $\lambda_1 = -1.4$, $\mu_1 = 2.8$, 得到的最大时滞稳定界为 $\bar{h} \leq 0.8$, 相应的鲁棒控制器为

$$u(t) = [-7.378\,0 \quad -5.609\,5]x(t) + [3.883\,8 \quad 1.971\,4]x(t - h).$$

这表明鲁棒控制器(4) 较(5) 具有较小的保守性.

5 结 语

本文提出一种新的积分不等式方法, 讨论了线性多时变时滞系统的鲁棒稳定性与鲁棒稳定化问题. 利用 Park 不等式建立了基于二次型项的积分不等式, 在此基础上获得了系统时滞相关与时滞导数相关的鲁棒稳定条件, 同时得到了时滞状态反馈控制器的一种新的设计方法. 实例表明, 本文方法扩大了系统稳定的时滞界限, 得到的控制器具有较小的增益, 所得结果较已有方法具有较小的保守性.

参考文献(References):

[1] Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and H-infinite control: Constant and time-varying delays [J]. *Int J Control*, 2003, 76(1): 48-60.

[2] Fridman E, Shaked U. New bounded real lemma representations for time-delay systems and their applications [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(12): 1973-1979.

[3] Zheng F, Frank P M. Robust control of uncertain distributed delay systems with application to the stabilization of combustion in rocket motor chambers [J]. *Automatic*, 2002, 38(3): 487-497.

[4] Kim J H. Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty [J]. *IEEE Tran on Automatic Control*, 2001, 46(5): 789-792.

[5] Yue D, Won S C. An improvement on delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 407-408.

[6] Fridman E, Shaked U. An improved stabilization method for linear time-delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1931-1937.

[7] Park P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(4): 876-877.

[8] Xie L H. Output feedback H-infinite control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J Control*, 1996, 63(4): 741-750.

[9] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.