

文章编号: 1001-0920(2004)05-0501-05

## 移动机器人向目标点运动的变增益控制方法

沈捷, 费树岷, 郑敏

(东南大学 自动化研究所, 江苏 南京 210096)

**摘要:** 针对控制量受限的移动机器人, 研究其向目标点运动的控制问题. 提出了移动机器人有效控制的概念, 并采用变增益控制方法, 使系统的状态单调收敛, 最终到达目标点. 该方法可有效避免系统收敛于极限环上的情况. 仿真结果验证了变增益控制器的有效性.

**关键词:** 移动机器人; 有效控制; 运动控制; 单调收敛; 极限环

**中图分类号:** TP24      **文献标识码:** A

## Variable gain control method for mobile robot moving to goal

SHEN Jie, FEI Shu-min, ZHENGM in

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China Correspondent: SHEN Jie, Email: infcon@seu.edu.cn)

**Abstract:** The control problem of the mobile robot moving to goal is investigated, in which the control input is constrained. The concept of efficient control is put forward aiming at the motion control for mobile robot. Also a variable gain control method is used to control mobile robot moving to goal. During the course of motion, the system state is monotonically converged to the goal and the phenomenon of converging on limit cycle of the system is avoided. The simulation example shows the efficiency of the variable gain control.

**Key words:** mobile robot; efficient control; motion control; converge monotonically; limit cycle

### 1 引言

移动机器人向给定目标点运动是移动机器人运动控制的基本问题之一, 已被众多学者所关注并得到深入的探讨<sup>[1-7]</sup>. 该问题的研究成果可分为两类: 一类是基于路径规划, 先规划出机器人到目标点的路径, 然后控制机器人进行路径跟踪; 另一类是基于机器人运动学, 以机器人最终抵达目标点为目的, 根据运动学方程设计控制器. 文献[1]考虑了机器人的运动学和动力学约束, 首先规划出到达目标点的最短路径, 然后设计控制器, 使机器人以最快速度沿规划路径运动. 文献[2]设计机器人的运动“导航角”, 解决了有障碍物环境下机器人向目标点的运动

问题. 文献[3, 4]中要求机器人运动轨迹具有连续的曲率, 提出了光滑路径规划方案.

以上文献都是在移动机器人线速度大于零的前提下, 研究机器人向目标点运动的问题. 实际上, 移动机器人(或自主式移动小车)既可前进也可后退, 因此在速度可正可负的前提下, 研究该问题更符合实际需要, 也更具灵活性. 文献[5~7]研究的是多机器人队形的运动控制问题, 是从机器人运动控制角度设计指数稳定的控制器. 但仿真研究发现, 文献[5~7]没有考虑移动机器人运动学系统中存在的固有奇异点问题, 该奇异点可能导致系统出现极限环, 使得机器人围着目标点作圆周运动.

收稿日期: 2003-05-29; 修回日期: 2003-09-22.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(69934010).

作者简介: 沈捷(1976—), 男, 安徽铜陵人, 博士生, 从事多机器人协调控制、开关切换系统等研究; 费树岷(1961—), 男, 安徽宣城人, 教授, 博士生导师, 从事机器人控制、非线性控制系统等研究.

针对以上不足,本文在速度可正可负以及控制受限的前提下,研究移动机器人向目标点运动的控制问题.定义了有效控制的概念,采用变增益控制方法,在有效控制范围内设计控制器,防止闭环系统出现极限环,保证原定控制目标的实现.

## 2 问题描述和主要思想

### 2.1 问题描述

本文研究的问题是:针对给定的目标位置(目标点的坐标)设计控制策略,使移动机器人从其运动区域中的任意一点(初始点)出发,快速向目标位置运动,并经有限时间最终停留在目标位置上.

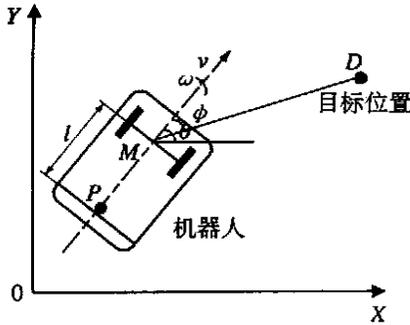


图1 机器人向目标运动

如图1所示,两个前轮为机器人的驱动轮,后轮P起支撑平衡作用.前轮轴线的中心点为M,|MP|=l为固定常数,以M点建立的坐标为M(x,y).记机器人的运动速度为v,角速度为ω,运动方向角θ∈[-π,π],则机器人的运动学模型可表示为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

移动机器人驱动系统提供其运动所需要的线速度和角速度,因此设计时控制变量通常选为u=[v,ω]<sup>T</sup>.受机器人本身的驱动系统、转动惯量及与地面的摩擦力等因素的影响,u的取值通常是受限的.本文假设|v|≤v<sub>m</sub>,|ω|≤ω<sub>h</sub>,其中v<sub>m</sub>,ω<sub>h</sub>(>0)是由具体机器人特性所决定的常数.

为更好地描述机器人与目标位置的相对状况,以机器人与目标点之间的距离s>0(即长度MD)和MD与机器人当前运动方向的夹角φ∈[-π,π]为参数,建立如下运动学方程:

$$\dot{\zeta} = g(\zeta)u \quad (2)$$

其中

$$\zeta = \begin{bmatrix} s \\ \varphi \end{bmatrix}, g(\zeta) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & 0 \\ (\sin \varphi)/s & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

当det(g)=0时,cosφ=0,系统的奇异点为(s,±π/2).如果v/ω=μs(定值),代入式(2)则得,ζ̇=0,ζ=ζ<sup>\*</sup>,导致运动轨迹收敛到极限环上.这说明如果控制方法不当,则可能使机器人在XY平面以目标点为圆心转圈.

注1 本文以M点为参考点建立运动学方程,较文献[5]以P点为参考点本质上并无区别,系统同样存在奇异点,但选择M点使得运动方程更加简单,从而可以简化分析过程.

### 2.2 主要思想

为移动机器人建模时,通常考虑其轮子不作平滑运动,且机器人不能原地转圈,故引入如下定义:

定义1 D={ [v,ω]<sup>T</sup> | 0 ≤ |v| ≤ v<sub>m</sub>, ω ∈ [-ω<sub>h</sub>, ω<sub>h</sub>] },称该区域为控制量允许取值范围.其中机器人的最小转弯半径记为r<sub>min</sub>(=v<sub>s</sub>/ω<sub>h</sub>),v<sub>s</sub>是机器人转圈时最小线速度.

定义2 称移动机器人始终向原点单调收敛,如果1)和2)同时成立:

- 1)  $\begin{cases} \dot{s} < 0, \varphi \in \pm \pi/2; \\ \dot{s} = 0, \varphi = \pm \pi/2 \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} \text{sgn}(\dot{\varphi}) < 0, \varphi \neq 0; \\ \dot{\varphi} = 0, \varphi = 0. \end{cases}$

其中  $\text{sgn}(\varphi) \triangleq \begin{cases} 1, \varphi > 0; \\ -1, \varphi < 0. \end{cases}$

定义3 对任意控制量u∈D,如果可使运动学方程(2)的动态ζ向原点单调收敛,则称该控制量u为有效控制量;如果控制律的任意控制量均为有效控制量,则称为有效控制.

当det(g)≠0时,设计如下变增益控制器:

$$u = -g^{-1}(\zeta)K(\zeta)\zeta \quad (3)$$

其中:K(ζ)=diag{k<sub>1</sub>(ζ),k<sub>2</sub>(ζ)},k<sub>1</sub>(ζ),k<sub>2</sub>(ζ)>0,g<sup>-1</sup>表示g(ζ)的逆矩阵.目的是通过设计控制器的增益K(ζ),保证控制器输出始终为有效控制量.

当det(g)=0时,应保证(v/ω)=μs(定值),从而避免机器人的运动轨迹收敛到极限环上.

由有效控制定义可知,有效控制不具有唯一性.本文遵循如下控制原则:机器人首先调整到向目标点运动的方向,即根据优化目标函数max<sub>u</sub>|φ|确定有效控制;当φ=0时,机器人再向目标点全速前进,最终抵达目标点.因此,可将机器人向目标点的运动过程分为3个阶段:1)快速调整方向;2)向目标点全速运动;3)结束.

### 3 变增益控制器的设计

在有效控制的原则下, 由于机器人运动的多样性, 对于本文的有效控制是否存在? 如果存在如何寻求? 为此有如下命题:

**命题 1** 如果存在有效控制使机器人运动到目标点, 则必然存在有效控制使机器人按最小圆弧加直线的方式运动到目标点.

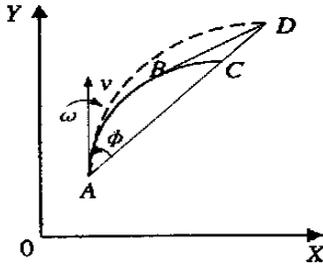


图 2 机器人向目标点运动

**证明** 首先考虑  $\varphi \in [0, \pi/2]$  的情况. 如图 2 所示, 假定  $D$  点为目标点,  $A$  点为机器人当前位置, 直线  $AD$  与机器人运动方向的夹角为  $\varphi$  ( $0, \pi/2$ ), 弧  $AC$  是机器人所能转的最小圆弧. 从  $D$  点作弧的  $AC$  切线, 切点为  $B$  (注意当  $\varphi=0$  时,  $B$  点与  $A$  点重合). 如果存在有效控制  $[v, \omega]^T$  ( $v > 0, \omega < 0$ ) 使机器人运动到目标点, 则此时机器人运动轨线的曲率必然小于圆弧  $AC$  的曲率, 即其运动轨线在圆弧  $AC$  的上方, 不妨以虚线弧  $AD$  来表示.

采用最小圆弧加直线的方法, 机器人在弧  $AB$  上运动时其控制为  $[v_s, -\omega_h]^T$ ,  $BD$  上运动的控制为  $[v_m, 0]^T$ . 根据曲率定义有  $|v/\omega| = v_s/\omega_h$ , 将  $[v_s, -\omega_h]^T$  代入式(2)有

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -v_s \cos \varphi < 0, \\ \dot{\varphi} &= \frac{-s\omega_h + v_s \sin \varphi}{s} \\ &= \frac{s\omega_h + v_s \sin \varphi}{s} < 0, \end{aligned}$$

所以  $[v_s, -\omega_h]^T$  为有效控制. 机器人沿  $BD$  运动时  $\varphi=0$ , 将  $[v_m, 0]^T$  代入式(2)有  $\dot{s} = -v_m < 0, \dot{\varphi} = 0$ , 故  $[v_m, 0]^T$  也是有效控制. 当  $\varphi = \pi/2$  时, 仍采用同样的有效控制  $[v_s, -\omega_h]^T$ . 所以当  $\varphi \in [0, \pi/2]$  时, 命题 1 成立.

当  $\varphi \in (\pi/2, \pi)$  时, 与上述情况类似, 同样采用最小圆弧加直线的方法, 只要注意此时控制为  $[-v_s, -\omega_h]^T$  即可, 此时命题 1 仍然成立.

最后由对称性可知,  $\varphi \in [-\pi, 0)$  时命题 1 仍然成立.

**注 2** 实际过程中, 机器人的运动轨迹不论是

从圆弧到直线还是从直线到圆弧, 其间都要经历加减速过程. 机器人在圆弧上加减速时, 线速度和角速度需满足条件  $|v/\omega| = v_s/\omega_h$ . 为简化分析过程, 在此不考虑机器人的加减速过程, 且认为在圆弧或直线上的控制量是统一的.

以下定理给出了有效控制的存在条件.

**定理 1** 系统(2) 存在有效控制, 使系统最终抵达原点的充分必要条件为

$$\begin{cases} s & 2r_{\min} \sin |\varphi|, \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]; \\ s & r_{\min} (-\sin |\varphi| + \sqrt{\sin^2 \varphi + 8}), \\ \varphi & [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi). \end{cases} \quad (4)$$

**证明** 文献[8] 已证明最小圆弧加直线方法所得到的运动轨迹是机器人到达目标点的最短路径. 由命题 1 可知, 只要对最小圆弧加直线方法证明是否存在有效控制即可. 图 3 中圆弧  $AD, AB, BD$  都是机器人所能转的最小圆弧, 直线  $AD$  就是机器人到达目标点的最短距离.

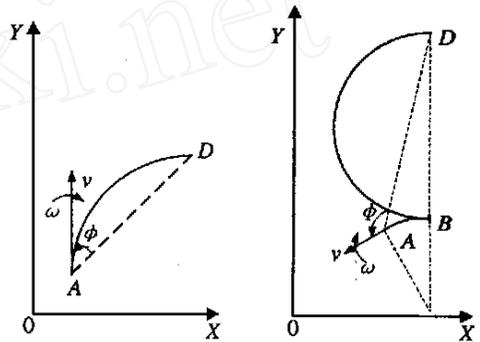


图 3 机器人与目标点最短距离示意

1) 必要性证明. 存在有效控制, 使机器人能够顺利抵达目标点.

$\varphi \in [0, \pi/2]$  的情况. 如图 3(a) 所示, 弧  $AD$  是机器人所能转的最小圆弧, 路径最短, 此时  $s = |AD| = 2r_{\min} \sin \varphi$ .

$\varphi \in (\pi/2, \pi)$  的情况. 机器人与目标点距离最短时机器人的运动轨迹如图 3(b) 所示. 因为存在有效控制量, 根据式(2) 可知机器人速度为负, 所以机器人先后退一段, 同时  $\varphi$  不断减小; 到达  $B$  点时,  $\varphi = \pi/2$ , 速度变为正值, 运动轨迹为半圆  $BD$ , 此时  $s = |AD| = r_{\min} (-\sin |\varphi| + \sqrt{\sin^2 \varphi + 8})$ .

根据对称性可知,  $\varphi \in [-\pi/2, 0)$  与  $\varphi \in [0, \pi/2]$ ,  $\varphi \in [-\pi, -\pi/2)$  与  $\varphi \in (\pi/2, \pi)$  的情况完全一样, 即条件(4) 成立.

2) 充分性证明. 如果条件(4) 成立:

当  $\varphi \in [0, \pi/2]$  时,  $\varphi=0$  表示机器人正对目

标点,可直接向目标点运动,控制为 $[v_s, 0]^T$ ,且满足 $\dot{s} = -v_s < 0, \dot{\varphi} = 0$ ,故为有效控制. $\varphi \in (0, \pi/2]$ 表示机器人在图3(a)中的圆弧AB段运动,控制为 $[v_s, -\omega_h]^T$ ,于是有

$$\dot{\varphi} = \frac{-s\omega_h + v_s \sin \varphi}{s} < -\frac{r_{\min} \omega_h \sin \varphi}{s} < 0,$$

$$\dot{s} = \begin{cases} -v_s \cos \varphi < 0, & \varphi \in \pi/2; \\ 0, & \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

故也为有效控制.

当 $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ 时,如图3(b)所示,机器人在圆弧AB和BD段运动的控制分别为 $[-v_s, -\omega_h]^T$ 和 $[v_s, -\omega_h]^T$ .在圆弧AB上,由式(2)知, $\dot{\varphi} = \frac{-s\omega_h - v_s \sin \varphi}{s} < 0$ ,且 $\dot{s} = -v_s \cos \varphi < 0$ ,所以控制 $[-v_s, -\omega_h]^T$ 为有效控制.同样,在圆弧BD上的控制也为有效控制.

根据对称性可知, $\varphi \in [-\pi/2, 0)$ 与 $\varphi \in [0, \pi/2]$ , $\varphi \in [-\pi, -\pi/2]$ 与 $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ 的情况完全一样.

下面结合2.2节控制原则确定机器人在3个运动阶段控制器的增益.

(1) 快速调整方向阶段 $K(\zeta)$ 的设计

根据控制原则,该阶段隐含 $s > 0, \varphi > 0$ .以 $\varphi \in (0, \pi/2)$ 为例,有效控制满足 $\{[v, \omega]^T | v > 0, \omega < 0\}$ .控制器 $u = -g^{-1}K(\zeta)\zeta$ 所以

$$\dot{\varphi} = \frac{s\omega + v \sin \varphi}{s} = -k_2(\zeta)\varphi.$$

增益 $k_2(\zeta)$ 的范围为

$$\frac{s\omega_h - v_s \sin \varphi}{s\varphi} < k_2(\zeta) < 0.$$

根据目标函数 $\max_u |\dot{\varphi}|$ ,可计算出增益.从优化结果看,机器人的运动轨线是其所能转的最小圆弧,此时机器人的运动方向调整得最快,这个结果与常识相符.快速调整方向阶段 $K(\zeta)$ 的取值见表1.

表1 快速调整方向阶段 $K(\zeta)$ 的设计

	$-k_1(\zeta)$	$k_2(\zeta)$
$\varphi \in (0, \pi/2)$	$v_s \cos \varphi / s$	$(s\omega_h - v_s \sin \varphi) / (s\varphi)$
$\varphi \in (-\pi/2, 0)$	$v_s \cos \varphi / s$	$-(v_s \sin \varphi + s\omega_h) / (s\varphi)$
$\varphi \in (\pi/2, \pi)$	$-v_s \cos \varphi / s$	$(v_s \sin \varphi + s\omega_h) / (s\varphi)$
$\varphi \in [-\pi, -\pi/2)$	$-v_s \cos \varphi / s$	$-(s\omega_h - v_s \sin \varphi) / (s\varphi)$

(2) 向目标点全速运动阶段 $K(\zeta)$ 的设计

根据控制原则,该阶段隐含 $\varphi = 0, \dot{s} > 0$ .机器人此时正对目标点,只要向目标点全速运动即可.因为 $\dot{s} = -v \cos \varphi = -k_1(\zeta)s$ ,所以 $k_1(\zeta) = v_m / s$ ,

$k_2(\zeta)$ ,可取任意正常数.

(3) 结束阶段 $K(\zeta)$ 的设计

机器人既可能按最小圆弧运动到目标点,也可能按直线运动到目标点.设定机器人与目标点距离为 $s_1$ 时,机器人进入结束阶段.以前一种情况为例,此时 $k_1(\zeta) = (v_s \cos \varphi) / s_1, k_2(\zeta) = (s\omega_h - v_s \sin \varphi) / (s_1 \varphi)$ .代入式(3),得 $v = sv_s / s_1, \omega = s\omega_h / s_1$ ,满足条件 $v/\omega = v_s / -\omega_h$ ,此时机器人按最小圆弧作减速运动.因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, s = 2r_{\min} \sin \varphi$ ,所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} k_2(\zeta) = v_s / s_1, k_1(\zeta) = v_s \cos \varphi / s_1 < v_s / s_1$ ,说明所设计的增益是有界的. $s_1$ 可通过实验来确定,应大于机器人以最大减速度制动时运动的距离.结束阶段 $K(\zeta)$ 的取值见表2.

表2 结束阶段 $K(\zeta)$ 的设计

	$k_1(\zeta)$	$k_2(\zeta)$
$\varphi \in (0, \pi/2)$	$v_s \cos \varphi / s_1$	$(s\omega_h - v_s \sin \varphi) / (s_1 \varphi)$
$\varphi \in (-\pi/2, 0)$	$v_s \cos \varphi / s_1$	$-(v_s \sin \varphi + s\omega_h) / (s_1 \varphi)$
$\varphi = 0$	$v_m / s_1$	任意正常数

注3 当 $\varphi = \pm(\pi/2)$ 时, $\det(g) = 0$ ,本文的控制原则要求机器人转最小圆弧来快速调整方向,此时 $|v/\omega| = r_{\min}$ .由定理1可知 $s > 2r_{\min}$ ,所以 $(v/\omega) < \mu s$ ,最终避免了系统出现极环现象.

注4 如注2所述,实际过程中机器人存在加(减)速过程,现以图3(b)中机器人从A点出发的加速过程为例,说明如何确定加(减)速过程中的增益 $K(\zeta)$ .设该反向加速过程的起始时刻为 $t_0$ ,终止时刻为 $t_f$ ,机器人的初始运动方向角为 $\theta, \pi/2 < \theta(t_0) < \pi, \Delta\theta = \left| \int_{t_0}^{t_f} \omega(t) dt \right|$ 是加速过程中运动方向角的变化量,即机器人的运动方向角为 $\theta(t_0) - \Delta\theta$ 时,加速过程结束.假设该加速过程为匀加速过程,设机器人的最大加速度为 $\dot{v}_m$ ,此时 $t_0 = 0, v = \dot{v}_m t, -v_s < v < 0$ .注意到此时的线速度和角速度应满足 $v/\omega = v_s / -\omega_h$ ,所以

$$\left| \int_0^t \omega(t) dt \right| = \left| \int_0^t \frac{\omega_h \dot{v}_m}{v_s} t dt \right| = \frac{v_s^2 \omega_h}{2v_m v_s} t^2.$$

由于机器人到达B点时需要经历减速过程,所以当机器人的运动方向角为 $(2\theta(t_0) - \pi) / 4$ 时,加速过程必须结束,否则将无法保证机器人到达B点时速度降为零,因此

$$\Delta\theta = \min \left[ \frac{2\theta(t_0) - \pi}{4}, \frac{v_s \omega_h}{2v_m} \right].$$

此时由 $u = -g^{-1}K(\zeta)\zeta$ 可得

$$k_1(\zeta) = v \cos \varphi / s,$$

$$k_2(\zeta) = \frac{v}{s\dot{\varphi}} \left( -\frac{s}{r_{\min}} - \sin\varphi \right)$$

当机器人的运动方向角为  $\pi/2 + \Delta\theta$  时, 进入减速过程, 增益  $k(\zeta)$  的确定方法与上面的讨论相同.

#### 4 仿真结果

仿真实验中有关参数选取如下:  $v_m = 1.6 \text{ m/s}$ ,  $v_s = 0.9 \text{ m/s}$ ,  $\omega_h = \pi \text{ rad/s}$ , 最大加(减)速度  $\dot{v}_m = 1 \text{ m/s}^2$ . 目标位置的坐标为 (5, 5), 机器人初始位置的坐标为 (0, 0), 初始运动方向角  $\theta = -2\pi/3$ .

机器人的运动轨迹见图 4(a). 首先进入快速调

整方向阶段, 机器人按最小圆弧后退一段(速度为负值), 到达 B 点时  $\varphi = \pi/2$ , 机器人的速度变为正值, 继续按最小圆弧运动. 到达 C 点后, 机器人的运动方向已对准目标点,  $\varphi = 0$ , 机器人开始进入向目标点全速运动阶段. 实验中设定  $s_1 = v_m^2/\dot{v}_m$ , 当机器人与目标点距离为  $s_1$  时, 进入结束阶段, 此时  $k_i(\zeta)$  ( $i = 1, 2$ ) 均为常数, 系统在该阶段是指数稳定的. 当机器人与目标点之间距离小于 1 cm 时, 认为机器人已抵达目标点. 图 4 为仿真实验结果.

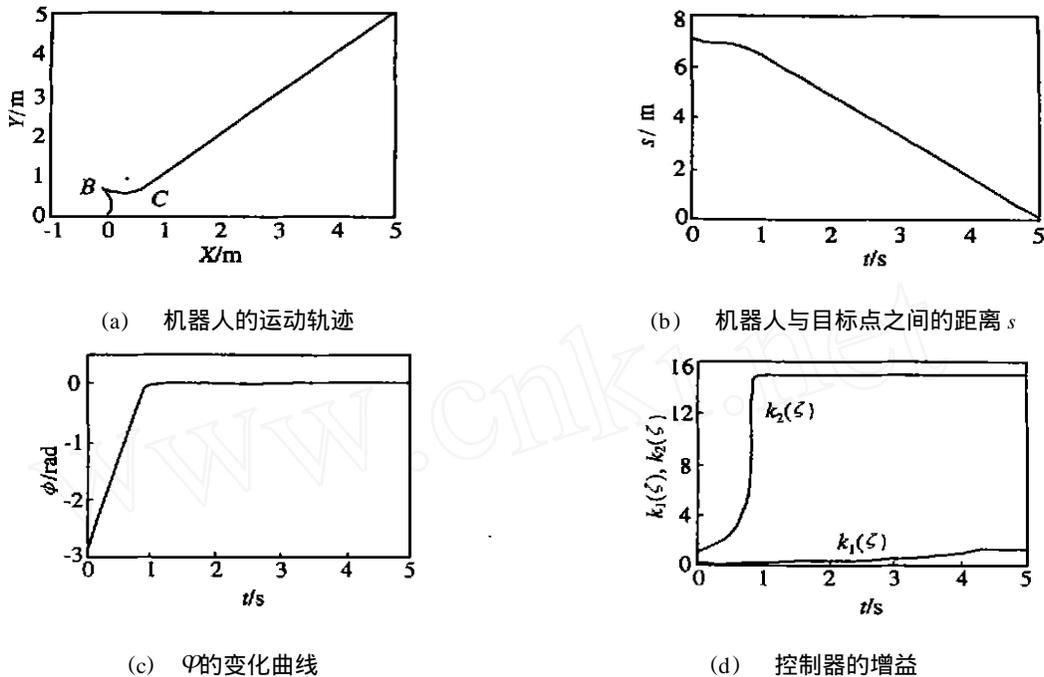


图 4 仿真实验结果

#### 5 结 语

本文在速度可正可负的前提下, 研究移动机器人向目标点运动的控制问题, 提出了有效控制的概念, 使得系统的状态变量始终向原点单调收敛, 从而体现出较高的控制效率. 采用变增益控制方法, 设计合适的增益, 可使控制量始终在取值范围内, 防止系统出现极限环, 避免了机器人围着目标点转圈的现象.

#### 参考文献(References):

[1] Wu W G, Chen H T, Woo P Y. Time optimal path planning for a wheeled mobile robot[J]. *J of Robotic Systems*, 2000, 17(11): 585-591.

[2] Fujimori A, Nikiforuk P N, Gupta M M. Adaptive navigation of mobile robots with obstacle avoidance[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1997, 13(4): 596-601.

[3] Nelson W. Continuous-curvature paths for autonomous

vehicles[A]. *Proc IEEE Int Conf Robot Automat* [C]. Arizona, 1989. 1260-1264.

[4] Kanayama Y J, Hartman B I. Smooth local path planning for autonomous vehicles[J]. *The Int J of Robotic Research*, 1997, 16(3): 263-283.

[5] 董胜龙, 陈卫东, 席裕庚. 多移动机器人编队的分布式控制系统[J], *机器人*, 2000, 22(6): 433-438. (Dong S L, Chen W D, Xi Y G. An distributed control system for multimobile robots formation [J]. *Robot*, 2000, 22(6): 433-438.)

[6] Fierro R, Das A K, Kumar V, et al. Hybrid control of formation of robots[A]. *Proc IEEE Int Conf Robot Automat* [C]. Seoul, 2001. 157-162.

[7] Desai J P, Ostrowski J, Kumar V. Controlling formations of multiple mobile robots[A]. *Proc IEEE Int Conf Robot Automat* [C]. Leuven, 1998. 2864-2869.

[8] Dubins L E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents[J]. *Amer J Math*, 1957, 79: 497-516.