

文章编号: 1001-0920(2004)06-0655-04

非匹配不确定系统的模糊滑模控制

李文林

(河南师范大学 数学系, 河南 新乡 453006)

摘要: 研究多输入不确定系统的模糊滑模控制问题, 利用动态补偿器和不等式技巧设计了滑动模态, 解决了非匹配不确定性的抑制问题, 并给出了保守性较小的滑模稳定性条件. 为克服滑模的抖振, 提出了用模糊数模型和双二次函数插值构造模糊滑模控制律的方法. 仿真结果表明, 该方法对于参数摄动和外部扰动具有良好的鲁棒性.

关键词: 模糊控制; 滑动模态; 动态补偿器; 鲁棒性

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

Fuzzy sliding mode control for non-matching uncertain systems

LI Wen-lin

(Department of Mathematics, He nan Normal University, Xinxiang 453006, China. E-mail: hsdllw1@tom.com)

Abstract: The fuzzy sliding mode control for non-matching uncertain systems is studied. By applying dynamic compensator and inequality technique, the sliding mode is designed and the problem of non-matching uncertainty restraint is solved. A stability condition of sliding mode with litter conservative is obtained. In order to overcome chatter phenomenon, the fuzzy number model and double quadratic function interpolation algorithm are combined to design a fuzzy sliding mode control law. Simulation results show that this method has stronger robustness against the variation of parameters and disturbance.

Key words: fuzzy control; sliding mode; dynamic compensator; robustness

1 引言

由于滑动模态对系统的参数摄动和外部干扰具有良好的鲁棒性, 滑模控制已成为控制理论研究的一个重要方向, 并取得了许多重要进展^[1]. 然而, 目前有些问题还没有很好解决^[1~3], 因而影响了滑模控制的实际应用. 突出的问题是: 1) 非匹配不确定系统滑模稳定性分析和控制器设计尚无有效的方法, 已有结论大都是保守的; 2) 抖振和控制力的频繁切换是滑模控制的主要缺点之一. 为克服或削弱抖振, 人们提出了许多解决方案^[1], 如建立边界层、设计变速趋近律等. 近年来, 随着模糊控制理论的发展, 不少学者又提出利用模糊控制取代切换控制的设计方案^[1,4~8]. 但这些方案要么控制效果不能令

人满意, 要么控制律求解过于复杂而难以实现.

本文针对上述两个问题进行研究: 1) 提出利用动态补偿器和不等式技巧设计滑动模态的新方法, 给出了保守性较小的滑模稳定性条件; 2) 用模糊数模型和双二次插值设计模糊滑模控制器, 以克服抖振和模糊控制律求解计算复杂的缺点.

2 问题描述及预备引理

考虑非匹配不确定系统

$$\dot{x} = (A + A(x, t))x + Bu + f(x, t). \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$, $u \in R^m$, (A, B) 可控, $\text{rank } B = m$, $A(x, t)$ 和 $f(x, t)$ 分别为摄动和外部干扰.

由于 $\text{rank } B = m$, 总可将式(1)变换为如下形式(否则作变换 $\bar{x} = Tx: TB = [0, B_2]^T$):

收稿日期: 2003-06-02; 修回日期: 2003-09-17.

作者简介: 李文林(1949—), 男, 河南舞阳人, 教授, 博士, 从事变结构控制、自适应控制等研究.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x + A_1(x, t) x + f_1(x, t), \\ \dot{x}_2 = A_2 x + A_2(x, t) x + B_2 u + f_2(x, t). \end{cases} \quad (2)$$

其中: B_2 为 $m \times m$ 非奇阵; $A_1(x, t)$, $A_2(x, t)$ 和 $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ 分别为参数摄动和外部干扰.

本文的目的是设计合适的切换函数和控制器, 使不确定系统(1)的运动具有满意的动态性质.

假设 1 $A_1(x, t) x + f_1(x, t) = g(t) x + F(t)$, 其中 $g(t)$ 和 $F(t)$ 为非负有界函数.

引理 1 对于系统(1), 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $K \in R^{m \times n}$ 和常数 $k > 0$, 使得当 t 充分大时, 有

$$e^{(A+BK)t} \leq k e^{-t}. \quad (3)$$

证明 由 (A, B) 可控易知, $\forall \epsilon > 0, \exists K \in R^{m \times n}$, 使 $\max(\lambda(\bar{A})) = -\epsilon, \bar{A} = A + BK$, 且

$$e^{\bar{A}t} = P \text{diag}\{e^{-\epsilon t}, \dots, e^{-\epsilon t}\} P^{-1} \leq k e^{-\epsilon t}. \quad (4)$$

其中 P 是由 \bar{A} 的特征根 $-\epsilon, \dots, -\epsilon$ 对应的特征向量构成的矩阵.

引理 2 设 $-\epsilon$ 是 \bar{A} 的第 i 个特征根, p_i 是 P 的第 i 列, P_i^{-1} 是 P^{-1} 的第 i 行, 则当 t 充分大时, 对任给的 $\epsilon > 0$, 有

$$\exp \bar{A} t \leq (1 + \epsilon) p_i P_i^{-1} e^{-\epsilon t}. \quad (5)$$

证明 由式(4), 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\hat{\epsilon} > 0$, 当 $t > \hat{\epsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \exp \bar{A} t &\leq (1 + \epsilon) P \text{diag}\{0, \dots, 0, e^{-\hat{\epsilon} t}, 0, \dots, 0\} P^{-1} \\ &= (1 + \epsilon) p_i P_i^{-1} e^{-\hat{\epsilon} t}. \end{aligned}$$

由引理 1 和引理 2, 可适当选取 K , 使 ϵ 充分大, 因此假设下列不等式成立:

$$\begin{cases} \overline{\lim}_t \frac{1}{t} \int_0^t k g(\tau) d\tau = \epsilon < \epsilon, \\ \overline{\lim}_t k F(t) = \epsilon; \end{cases} \quad (6)$$

$$\overline{\lim}_t \int_0^t k e^{-(t-\tau)} g(\tau) d\tau \leq \epsilon < 1. \quad (7)$$

3 滑动模态的稳定性

为减少控制器的保守性和增加控制器设计的自由度, 构造如下动态补偿器:

$$\dot{z} = -(A_2 + B_2 K) z. \quad (8)$$

借助于动态补偿器设计切换函数和滑动流形

$$s = x_2 + z, S_0 = \{(x, z) / s = 0\}. \quad (9)$$

引理 3 按式(8)和(9)选取切换函数, 则滑动方程为

$$\dot{x}^* = (A + BK) x^* + \begin{bmatrix} A_1 x^* + F(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

并且

$$\begin{aligned} x^*(t) &= e^{(A+BK)t} x_0 + \int_0^t e^{(A+BK)(t-\tau)} [A_1 x^*(\tau) + F(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

证明 由式(2), (8)和(9)得

$$\dot{s} = A_2(x, t) x + f_2(x, t) + B_2(u - Kx). \quad (12)$$

令 $\dot{s} = 0$, 解得等价控制

$$u_{eq} = Kx - B_2^{-1} [A_2(x, t) x + f_2(x, t)]. \quad (13)$$

式(13)代入(2)即得(10). 解方程(10), 并利用引理 1 和引理 2, 得

$$x(t) = x_0 e^{\bar{A}t} + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \begin{bmatrix} A_1(x, \tau) x(\tau) + f_1(x, \tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau,$$

$$x_0 e^{\bar{A}t} + \int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)} \begin{bmatrix} A_1(x, \tau) x(\tau) + f_1(x, \tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau,$$

$$\begin{aligned} &= k x_0 e^{-\epsilon t} + \int_0^t k e^{-(t-\tau)} \begin{bmatrix} A_1(x, \tau) x(\tau) + f_1(x, \tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^t k e^{-(t-\tau)} \begin{bmatrix} A_1(x, \tau) x(\tau) + f_1(x, \tau) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

定理 1 按式(8)和(9)设计切换函数, 并取反馈阵 K , 使式(6)和(7)成立, 则有

$$\overline{\lim}_t x^*(t) \leq \frac{\epsilon}{(1 - \epsilon)}. \quad (14)$$

特别是当 $\epsilon = 0$ 时, 滑动模态指数稳定.

证明

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_t \int_0^t k e^{-(t-\tau)} F(\tau) d\tau &= \overline{\lim}_t \left(\int_0^t e^{-F(\tau)} d\tau / e^t \right). \end{aligned}$$

对上式右端利用柯西中值定理, 并取上极限得

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_t \int_0^t e^{-F(\tau)} d\tau / e^t &= \overline{\lim}_t \frac{e^{-t} F(t)}{e^{-t}} = \overline{\lim}_t F(t) \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)} k g(\tau) d\tau \times \left[(1 - \epsilon) e^{-(t-\tau)} k g(\tau) d\tau \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

记 $(t) = [(1 - \int_0^t e^{-k(t-\tau)} g(\tau) d\tau)]^{-1}$, 代入式 (15) 得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} F(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-k(t-\tau)} k g(\tau) (\tau) d\tau. \quad (16)$$

若 $x^*(t) = (t)$, 则式(16) 代入(11), 得

$$e^{kt} [x^*(t) - (t)] = k x_0 + \int_0^t k g(\tau) e^{-k(t-\tau)} [x^*(\tau) - (\tau)] d\tau. \quad (17)$$

对式(17) 应用 Grownall 不等式, 并注意式(6) 得

$$x^*(t) - (t) \leq k x_0 \exp(-t + \int_0^t k g(\tau) d\tau) = k x_0 e^{-(1-k)t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

由式(7) 和 (t) 的定义, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t) = \frac{1}{(1-k)}.$$

推论 1 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) < \frac{1}{k}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{k}$, 则定理 1 结论成立.

4 模糊控制器设计

由式(14), 当 t 充分大时, 滑动模态将收敛到原点附近充分小的邻域内. 剩下的问题是寻求控制律, 迫使系统的运动到达 s_0 . 为克服常规滑模控制抖振大和动态性能差的缺点, 本文用模糊滑动流形 \tilde{s}_0 : s is zero 来替代常规的滑动流形. 如图 1 所示, 将 s 的变化划分为 5 个模糊集. 即

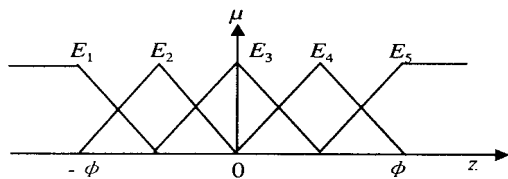


图 1 s 的隶属函数

$$E(\tilde{s}_i) = \{NB, NM, ZR, PM, PB\} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}.$$

取模糊滑模控制律

$$u = Kx - B_2^{-1} [H(x, t) +]V. \quad (18)$$

其中: $H(x, t) = A_2(x, t)x + f_2(x, t)$, $V = [v_1, \dots, v_m]^T$ 由下面的模糊控制推理来解决.

将 v_i 的模糊集 $F(v_i) (i = 1, \dots, m)$ 的论域作如下划分:

$$F(v_i) = \{NB, NS, ZR, PS, PB\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\},$$

并取图 2 所示的隶属函数. 为求出 V , 先考虑

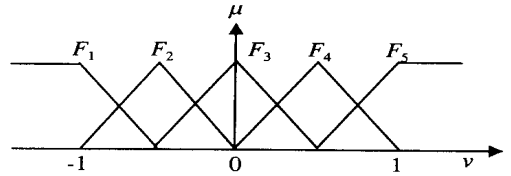


图 2 v_i 的隶属函数

$A_2(x, t)$ 和 $f_2(x, t)$ 已知的情况, 此时显然应取 $u^* = Kx - B_2^{-1} [A_2(x, t)x + f_2(x, t) - V]$. 代入式(12), 则有 $\dot{s}_i = v_i$. 要使 $\dot{s}_i = 0$, s_i 与 v_i 之间应满足如下模糊关系:

若 s_i 正大则 v_i 负大; 若 s_i 负大则 v_i 正大; ... 即应建立如下的模糊控制规则:

$$R_i^{(j)} : \text{if } s_i \text{ is } E_j \text{ then } v_i \text{ is } F_{6-j}, \quad j = 1, \dots, 5, i = 1, \dots, m. \quad (19)$$

输入采用单点模糊化、Mamdani 模糊逻辑推理和加权平均解模糊, 得

$$v_i(z) = \frac{\int F_j(z) d\mu_j}{\int F_j(z) d\mu_j}, \quad z = s_i. \quad (20)$$

由于式(20) 计算复杂繁琐, 本文采用模糊数模型和双二次函数插值反模糊方法. 分别用模糊数: $\tilde{1}, \tilde{-0.5}, \tilde{0}, \tilde{0.5}, \tilde{1}$ 取代上面的模糊集 NB, NS, ZE, PS, PB. 由模糊控制规则(19) 可得模糊数模型(表 1). 记 $h_i = -1.5 + 0.5i, i = 1, \dots, 5$, 则有

$$v_i(h_j) = -h_j, v_i(\tilde{h}_j) = -\tilde{h}_j. \quad (21)$$

表 1 模糊数模型

\tilde{z}_i	$\tilde{-1}$	$\tilde{-0.5}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0.5}$	$\tilde{1}$
\tilde{v}_i	$\tilde{1}$	$\tilde{0.5}$	$\tilde{0}$	$\tilde{-0.5}$	$\tilde{-1}$

容易看出, $F_j(z) d\mu_j$ 是形如 $(z - c)^2 + d$ 的二次函数, 且 $z = \tilde{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ 有最大值 $5/8$, 在 $z = h_i$ 处有最小值 $1/2$. 因此取插值函数

$$\begin{cases} v_i(z) = \frac{a_i z^2 + b_i z + c_i}{5/8 - 2(z - \tilde{h}_j)^2}, \\ h_j < z < h_{j+1}, j = 1, \dots, 5. \end{cases} \quad (22)$$

由表 1, 当 $h_3 = 0 < z < h_4 = 0.5$ 时, $\tilde{h}_3 = 0.25$. 代入式(21) 得

$$v_i(0) = 0, v_i(0.5) = -0.5, v_i(0.25) = -0.25. \quad (23)$$

式(23) 代入(22), 得 $c_3 = 0, a_3 = 0.5, b_3 = -3/4, c_3 = 0$. 从而

$$v_i(z) = \frac{0.5z^2 - 3z/4}{5/8 - 2(z - 0.25)^2} =$$

$$-\frac{z(2z-3)}{8z^2-4z-2}, 0 \leq z \leq 0.5.$$

同理可解得其他各段的表达式,整理得

$$v_i(z) = \begin{cases} z(3-2/z)/(8z^2-4/z-2)^{-1}, & |z| < 0.5; \\ z(3-2/z)/(3/z-1) \times \\ (8z^2-12/z+2)^{-1}, & 0.5 < |z| < 1; \\ \text{sgn } z, & |z| > 1. \end{cases} \quad (24)$$

上述结果与按加权反模糊化(20)的计算结果^[3,6]完全相同,但计算要简单得多.

由式(24),当 $|s_i| > 0.5$ 时, $v_i = -\text{sgn } s_i$; 由式(12),当 $|s_i| > 0.5$ 时,有

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= -|s_i| [H(x, t) - \\ &A_2(x, t)x + f_2(x, t) + J \\ &s_i v_i = -|s_i|. \end{aligned}$$

系统的运动将在有限时间内进入边界层 $|s_i| < 0.5$; 而且 v 是按模糊控制规则设计的,它能有效地抑制抖振,保证以准滑模的形式到达原点附近.

5 示例仿真

考虑不确定系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-2 + \sin t)x_1 + 1.2x_2 + 2te^{-t}, \\ \dot{x}_2 &= 1.1x_1 + 3.5x_2 + u + 3 + \cos t. \end{aligned}$$

希望滑动模态有极点: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4$. 按式(9)和(10)设计动态补偿器和切换函数

$$\dot{z} = 2x_1 + 5x_2, s = x_2 + z.$$

按式(18)构造控制律

$$u = -x_1 - 3x_2 - (0.1|x_1| + 0.5|x_2| + 4 + |s|)V.$$

仿真结果如图 3 ~ 图 5 所示. 从仿真结果可以看出,本文方法对扰动和参数不确定性具有较好的鲁棒性,克服了常规滑模控制的抖振和控制力频繁

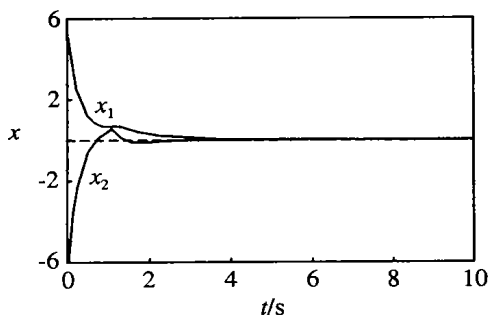


图 3 被控系统状态轨线

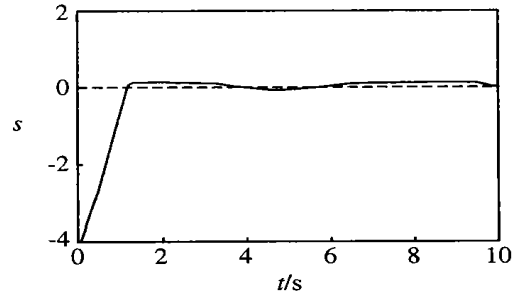


图 4 切换函数的变化

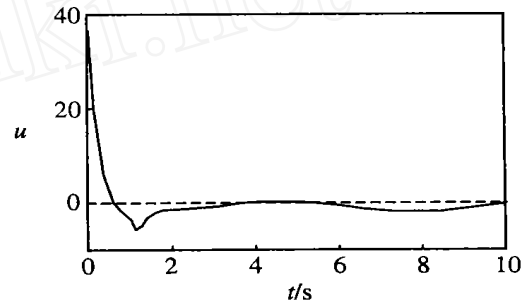


图 5 控制律的变化

切换的缺点,控制效果良好.

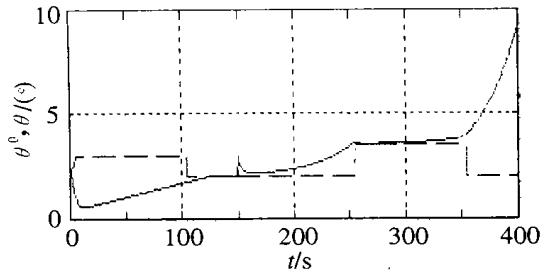
6 结 论

本文利用动态补偿器和不等式技巧解决非匹配不确定项的抑制问题,给出了保守性较小的滑模稳定性条件;提出一种双二次函数插值解模糊算法,简化了控制律分析和求解计算. 仿真结果表明,该方法能克服滑模控制抖振和频繁切换的缺点,对参数摄动和外部扰动具有良好的鲁棒性.

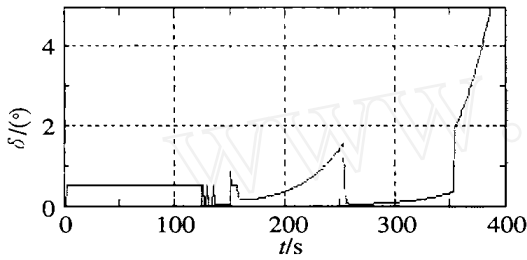
参考文献 (References):

- [1] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [2] Graham Wheeler, Chunyi Su, Yury Stepanenko. A sliding mode controller with improved adaptation law for the upper bounds on norm of uncertainties[J]. *Automatica*, 1998, 34(12): 1657-1661.
- [3] Lu X Y, Spurgeon S K. Robustness of static sliding mode control for non-linear systems[J]. *Int J Control*, 1999, 72(15): 1343-1353.
- [4] Su C Y, Stepanenko Y. Adaptive control of a class of non-linear systems with fuzzy logic[J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 1994, 2(4): 285-294.
- [5] Hwang G C, Lin S C. A stability approach to fuzzy control design for nonlinear systems[J]. *Fuzzy Set and System*, 1992, 48(2): 279-287.

(下转第 662 页)



(a) 期望值与实际输入值的变化



(b) 舵角的变化

图 4 仿真曲线

模糊值(小的顶风航行角和大的自由航行角),输出舵角则采用比例导数表达式。隶属函数和比例导数的系数值依据经验来选择和优化。

6 结 论

本文介绍一种基于 Sugeno 模糊模型的帆船航行模糊控制器。首先采用模糊逻辑控制方法,将舵手的航行经验与传统的控制技术相结合,提高了控制器的智能度;然后采用 Sugeno 模糊模型,将舵角的非线性动态控制局部线性化表示,并根据这些局部线性化模型,采用线性控制的方法分别设计控制器;最后通过模糊推理得到全局控制量。仿真实验证明,该方法能有效地控制复杂的帆船航行系统,对于帆船运动员进行科学训练是一种有效的方法。

参考文献(References):

- [1] 宋协法,付道军. 辅助风帆对船舶航行性能影响的理论研究[J]. 青岛海洋大学学报, 2002, 32(3): 391-396.
(Song X F, Fu D J. Theoretical study on sailing performance of the ship with auxiliary sails[J]. *J of Ocean University of Qingdao*, 2002, 32(3): 391-396.)
- [2] 缪国平. 帆船运动的力学原理[J]. 力学与实践, 1994, 16(1): 9-18.
(Miao G P. Dynamics theory for steering a sailboat[J]. *Lixue Yu Shijian*, 1994, 16(1): 9-18.)
- [3] Hedges K L, Richards P J. Computer modeling of downwind sails[J]. *J of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1996, 63(1): 95-110.
- [4] 从爽. 神经网络、模糊系统及其在运动控制中的应用[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2002. 110-134.
- [5] 李少远,王群仙,李焕芝,等. Sugeno 模糊模型的辨识与控制[J]. 自动化学报, 1999, 25(4): 488-492.
(Li S Y, Wang Q X, Li H Z, et al. Identification and control based on Sugeno's fuzzy model[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(4): 488-492.)
- [6] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. *IEEE Trans on SMC*, 1985, 15(1): 116-132.
- [7] 郭晨,苏辉,杨国勋. 基于 GA-FCMAC 算法的船舶运动智能控制器[J]. 中国航海, 2002, (1): 12-15.
(Guo C, Su H, Yang G X. GA-FCMAC algorithm based intelligent controller of ship steering[J]. *Navigation of China*, 2002, (1): 12-15.)
- [8] Flay R G J, Vuletic I J. Development of a wind tunnel test facility for yacht aerodynamic studies[J]. *J of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1995, 58(3): 231-258.

(上接第 658 页)

- [6] Sung-woo Kim, Jurjang Lee. Design of a fuzzy controller with fuzzy sliding surface[J]. *Fuzzy Set and System*, 1995, 71(30): 359-367.
- [7] Wang L X. Stable adaptive control of nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1993, 1(2): 146-155.
- [8] 朴营国,张俊星,张化光. 基于模糊逻辑的一类非线性系

统直接自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(1): 45-50.

(Piao Yingguo, Zhang Junxing, Zhang Huaguang. Direct adaptive control of a class of nonlinear system based on fuzzy logic[J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(1): 45-50.)