

文章编号: 1001-0920(2004)06-0680-03

## 时延不确定离散时间系统的鲁棒跟踪控制

李春文, 姜培刚, 龙图景, 姜偕富

(清华大学 自动化系, 北京 100084)

**摘要:** 研究一类时延不确定离散时间系统的鲁棒跟踪控制问题. 基于线性矩阵不等式(LMI)的控制方法, 设计无记忆反馈控制器, 构造了适用于时延不确定离散时间系统的 Lyapunov 函数. 通过求解一个 LMI 便可得到控制器的增益矩阵, 从而使系统的状态变量渐近跟踪预先设定的轨迹. 仿真示例说明所提出的鲁棒跟踪控制算法是有效的.

**关键词:** 不确定系统; 线性矩阵不等式; 时延; 跟踪; 鲁棒性

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

### Robust state tracking control for uncertain discrete systems with time-varying delay

LI Chun-wen, JIANG Pei-gang, LONG Tu-jing, JIANG Xie-fu

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: JIANG Pei-gang, E-mail: jpg99@mails.tsinghua.edu.cn)

**Abstract:** The problem of robust state tracking for a class of linear discrete systems with uncertain parameters and time delay in state is discussed. By choosing a Lyapunov function candidate, a memoryless feedback controller is obtained from the solution of a linear matrix inequality (LMI), and the system state is asymptotically tracking to the designed reference signal. Example results illustrate the effectiveness of the proposed control method.

**Key words:** uncertain systems; linear matrix inequality (LMI); time delay; track; robustness

### 1 引言

时延是化工过程和通信设备等工业系统中常见的现象之一, 它常造成系统不稳定, 或者影响系统的性能<sup>[1~4]</sup>. 跟踪控制就是要求系统状态变量或系统输出变量跟踪预定的参考轨迹, 它是控制理论与应用领域的-一个基本问题<sup>[4,5]</sup>. 近年来, 时延系统的跟踪控制引起了研究者的兴趣, 并已取得了一些研究成果<sup>[5,6]</sup>. 对于时延不确定的离散时间系统的跟踪控制, 目前还没有相关的研究成果.

针对一类具有参数不确定性和时延的连续时间系统, Oucheriah<sup>[6]</sup>设计了线性控制器, 使系统输出

跟踪预先设定的参考模型. 当系统满足匹配条件时, 跟踪误差达到一致有界, 且有界值可以任意小; 当系统不满足匹配条件时, 误差达到有界, 但有界值范围不可控制. 基于这一研究成果, 针对线性时变离散时间系统, Cohen<sup>[7]</sup>提出了  $H$ -优化跟踪控制方法, 并得到系统存在平衡点的充分必要条件, 但该控制方法不能应用于时延系统.

本文研究一类既含有参数不确定性又含有时延不确定性的离散时间系统的鲁棒跟踪控制问题, 系统的参数不确定性是未知但有界的, 系统的时延是未知且时变的. 基于线性矩阵不等式(LMI)的控制

收稿日期: 2003-04-14; 修回日期: 2003-06-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69774011); 国家自然科学基金重点项目(69934010); 国家重点基础研究专项基金项目(G1998020307).

作者简介: 李春文(1958—), 男, 河南焦作人, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、鲁棒控制等研究; 姜培刚(1976—), 男, 江苏南通人, 博士生, 从事时延控制、鲁棒控制的研究.

方法,设计无记忆反馈控制器,构造了适用于时延不确定离散时间系统的 Lyapunov 函数.通过求解一个 LMI 便可得到控制器的增益矩阵,从而使系统的状态变量渐近跟踪预先设定的轨迹.最后给出了一个仿真示例,说明本文提出的鲁棒跟踪控制算法的有效性.

### 2 问题描述

考虑如下具有参数不确定性和时延不确定性的离散时间系统:

$$x_{k+1} = [A + \Delta A]x_k + [E + \Delta E]x_{k-1} + Bu_k. \tag{1}$$

其中:系统初始条件为  $x_k = x_k, k \in [-1, 0]$ ,且  $x_{-1} \in R^n$  是初始向量函数;  $x_k \in R^n$  和  $u_k \in R^m$  分别表示系统状态向量和控制输入向量;  $\tau$  是不确定时延,满足

$$0 < \tau < m; \tag{2}$$

$A \in R^{n \times n}, E \in R^{n \times n}$  和  $B \in R^{n \times m}$  是已知的定常矩阵;  $\Delta A$  和  $\Delta E$  是具有合适维数的不确定矩阵,满足

$$\Delta A = M_1 F_1 N_1, \quad \Delta E = M_2 F_2 N_2. \tag{3}$$

其中:  $M_1, N_1$  和  $M_2, N_2$  是具有合适维数的定常已知矩阵;  $F_1$  和  $F_2$  是未知的范数有界矩阵,满足

$$F_1^T F_1 = I, \quad F_2^T F_2 = I, \quad \forall k. \tag{4}$$

为使系统(1)的状态变量跟踪预先设定的参考轨迹,本文设计如下线性无记忆反馈控制器:

$$v_{k+1} = v_k + r - x_k, \tag{5}$$

$$u_k = k_1 x_k + k_2 v_k. \tag{6}$$

其中:  $r \in R^n$  是参考轨迹信号,  $v_k$  是变量,  $k_i (i = 1, 2)$  是控制器的增益矩阵.选择合适的增益矩阵,使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = r$ .

### 3 鲁棒跟踪控制

基于控制器(5)和(6),系统(1)可改写为

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + Bk_1 + \Delta A)x_k + (E + \Delta E)x_{k-1} + Bk_2 v_k, \\ v_{k+1} = -x_k + v_k + r. \end{cases} \tag{7}$$

为书写方便,定义

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A + Bk_1 & Bk_2 \\ -I & I \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K.$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \end{bmatrix} F_1 [N_1 \quad 0] := \tilde{M}_1 F_1 \bar{N}_1, \tag{8}$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} M_2 \\ 0 \end{bmatrix} F_2 [N_2 \quad 0] := \tilde{M}_2 F_2 \bar{N}_2. \tag{9}$$

因此式(7)可改写为

$$\bar{x}_{k+1} = [\bar{A} + \Delta \bar{A}]\bar{x}_k + [\bar{E} + \Delta \bar{E}]\bar{x}_{k-1} + \bar{B}r. \tag{10}$$

**定理 1** 考虑具有参数不确定性和时延不确定性的离散时间系统(1),参数不确定性满足式(2),时延不确定性满足式(3).给定  $0 < \tau < 1/2$ ,如果存在矩阵  $S = S^T > 0, U = U^T > 0$ ,以及系统  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ,满足如下线性矩阵不等式(LMI):

$$\begin{bmatrix} -S + U & 0 & S\bar{A}_1^T + F^T \bar{B}^T & S\bar{N}_1^T & 0 \\ 0 & -\lambda_1 U & S\bar{E}^T & 0 & S\bar{N}_2^T \\ \bar{A}_1 S + \bar{B} F & \bar{E} S & * & 0 & 0 \\ \bar{N}_1 S & 0 & 0 & -\lambda_1 I & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 S & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

其中  $* = -S + \lambda_1 \tilde{M}_1 \tilde{M}_1^T + \lambda_2 \tilde{M}_2 \tilde{M}_2^T$ , 并且  $\text{rank}(B) = n, \text{rank} \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \right) = n$ . 则通过控制器(5)和(6)的反馈控制,系统(1)的状态变量可跟踪任意定常参考轨迹  $r$ . 控制器的增益矩阵为

$$k_1 = [I \quad 0] F S^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, k_2 = [I \quad 0] F S^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**证明** 定义

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ [k_1^{-1} B^{-1} (I - A - Bk_1 - A - E - E)] r \end{bmatrix},$$

可得

$$q = [\bar{A} + \Delta \bar{A}]q + [\bar{E} + \Delta \bar{E}]q + \bar{B}r. \tag{12}$$

由于不确定矩阵  $\Delta A$  和  $\Delta E$  的存在,  $q_2$  的具体数值是无法得到的.事实上,在推导过程中只关心  $q_1 = r$ ,而不管  $q_2$  的具体数值.

定义  $e_k$  为  $\bar{x}_k$  与  $q$  之差,即  $e_k = \bar{x}_k - q$ . 式(10)与(12)相减,得

$$e_{k+1} = [\bar{A} + \Delta \bar{A}]e_k + [\bar{E} + \Delta \bar{E}]e_{k-1}. \tag{13}$$

定义  $e_k = [e_k^T, e_{k-1}^T, \dots, e_{k-m}^T]^T$ , 选择 Lyapunov 函数

$$V_k = e_k^T P e_k + \sum_{i=1}^m (e_{k-i}^T W e_{k-i}) = \begin{bmatrix} P & & & & \\ & W & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & W \end{bmatrix} e_k,$$

其中:  $P = P^T > 0, W = W^T > 0$ .

参考文献[8]中引理 1 和定理 1 的推导过程,可

得到  $\lim_k x_k = r$ .

### 4 示例仿真

选择系统(1)的系数矩阵如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = M_2 = N_1 = N_2 = \text{diag}(0.1, 0.1);$$

预定的参考轨迹为

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad \tau = 0.49;$$

系统的时延设为  $\tau = \text{int}[2 + 2\sin(k/4)]$ , 则有  $m = 4$ .  $\text{int}(\cdot)$  表示截取括号内变量整数部分的函数.

采用 MATLAB LMI 工具包, 通过求解线性矩阵不等式(11), 得到

$$S = \begin{bmatrix} 143.5 & 0 & 134.2 & 0 \\ 0 & 143.5 & 0 & 134.2 \\ 134.2 & 0 & 1102.7 & 0 \\ 0 & 134.2 & 0 & 1102.7 \end{bmatrix},$$

$U =$

$$\begin{bmatrix} 139.0582 & 0 & 135.6006 & 0 \\ 0 & 139.0582 & 0 & 135.6006 \\ 135.6006 & 0 & 205.8179 & 0 \\ 0 & 135.6006 & 0 & 205.8179 \end{bmatrix},$$

$F =$

$$\begin{bmatrix} -72.7045 & -28.7032 & 51.0182 & -26.8334 \\ 28.7032 & -44.0013 & 26.8334 & 77.8515 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau_1 = 4, \quad \tau_2 = 5.$$

由于  $K = FS^{-1}$ , 可得

$K =$

$$\begin{bmatrix} -0.6204 & -0.2 & 0.1218 & 0 \\ 0.2 & -0.4204 & 0 & 0.1218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由  $k_1 = [I \ 0]K \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $k_2 = [I \ 0]K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 得到

$$k_1 = \begin{bmatrix} -0.6204 & -0.2 \\ 0.2 & -0.4204 \end{bmatrix},$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 0.1218 & 0 \\ 0 & 0.1218 \end{bmatrix},$$

且  $\text{rank}(k_1) = 2$ .

系统的初始条件为

$$x^T(t) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \end{bmatrix}, \quad v^T(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [-1, 0].$$

系统的状态轨迹和参考轨迹分别如图 1 和图 2 所示.

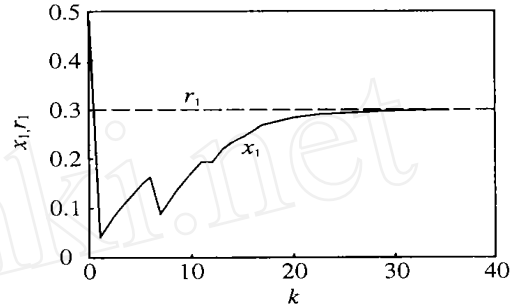


图 1 状态轨迹  $x_1$  和参考轨迹  $r_1$

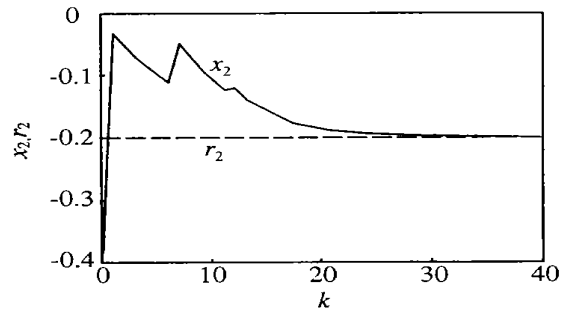


图 2 状态轨迹  $x_2$  和参考轨迹  $r_2$

### 5 结 语

本文研究一类既含有参数不确定性又含有时延不确定性的离散时间系统的鲁棒跟踪控制问题. 基于线性矩阵不等式(LMI)的控制方法, 设计了无记忆反馈控制器, 并构造出适用于时延不确定离散时间系统的 Lyapunov 函数. 通过求解线性矩阵不等式(11), 得到了控制器的增益矩阵, 从而使系统的状态变量渐近跟踪任意预先设定的轨迹, 即  $\lim_k x_k = r$ . 最后给出一个示例, 说明本文提出的鲁棒跟踪控制算法是有效的.

#### 参考文献 (References):

[1] Shengyuan Xu, James Lam, Chengwu Yang. Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay[J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 43(2): 77-84.

[2] Schapiro N S, Palmor ZJ. Output stabilizing robust control for discrete uncertain systems[J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 731-739.

(下转第 686 页)

的最短时间. 在 fcGA 中, 每 10 代取一对观测数据  $(p_{ij}^k, k_l)$ , 共得到 100 对这样的数据. 以这些数据作为样本, 用最小二乘法估计 50 000 代时的概率值. fcGA, cGA 和 GA<sup>[6]</sup> (WALL 用 C++ 开发的关于 TSP 问题的 GA 程序库) 分别运行 10 次.

表 1 fcGA, cGA 和 GA 的仿真结果

n	S	fcGA		cGA		GA	
		Fitness	t/s	Fitness	t/s	Fitness	t/s
300	4	997	74	997	148	$C_r = 4$	400
	8	999	63	997	89	994	
	16	994	71	1 000	108		
500	4	994	100	997	124	$C_r = 8$	390
	8	974	105	993	150	970	
	16	998	124	970	180		
800	4	993	191	1 000	250	$C_r = 10$	401
	8	970	179	983	274	1 000	
	16	1 000	234	998	329		

表 1 中给出了执行一次所需的平均时间. 在 cGA 和 fcGA 中, 模拟种群规模  $n = \{300, 500, 800\}$ , 选择压力  $s = \{4, 8, 16\}$ ; 在 GA 中, 种群规模  $n = \{300, 500, 800\}$ , 交叉长度  $C_r = \{4, 8, 10\}$ , 交叉概率  $P_c = 0.8$ , 变异概率  $P_m = 0.2$ .

从表 1 可以看出, 在参数选取相同的情况下, fcGA 所用的时间最少, 因此效率最高. 这说明引入

最小二乘法进行估算是有效的.

## 6 结 语

本文首先给出了压缩遗传算法的收敛性分析以及相关参数的分析, 并给出了该算法的模式定理; 然后提出一种快速压缩遗传算法, 即用算法在最初几代内得到的概率值及其对应的运行代数作为样本, 引入最小二乘方法对几万代以后的概率值进行估算, 并用估算值组成一个概率矩阵, 再用这个概率矩阵产生新的个体; 最后利用旅行商问题的仿真证明了该算法的有效性.

## 参考文献 (References):

- [1] Baraglia R, Hidalgo J I, Perego R. A hybrid heuristic for the traveling salesman problem[J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2001, 5(6): 613-622.
- [2] Harik G, Lobo F, Goldberg D. The compact genetic algorithm[J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 287-297.
- [3] Wu Zhiming, Zhao Chunwei. Genetic algorithm approach to job shop scheduling and its use in real-time cases[J]. *Int J of Computer Intergrated Manufacturing*, 2000, 13(5): 422-429.
- [4] 吴翌. 应用统计学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995. 135-180.
- [5] 汪荣鑫. 随机过程[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1987. 183-201.

(上接第 682 页)

- [3] Magdi S M. Robust  $H^\infty$  control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays[J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 627-635.
- [4] Carlos E S, Minyue F, Lihua Xie.  $H^\infty$  analysis and synthesis of discrete-time systems with time-varying uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(3): 459-462.
- [5] Guan X, Lin Z, Duan G. Robust guaranteed cost control for discrete-time uncertain systems with delay[J]. *IEE Proc Control Theory Application*, 1999, 146(6): 598-602.
- [6] Oucheriah S. Robust tracking and model following of uncertain dynamic delay systems by memoryless linear con-

trollers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(7): 1473-1477.

- [7] Cohen A, Shaked U. Linear discrete-time  $H^\infty$ -optimal tracking with preview [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(2): 270-276.
- [8] 姜培刚, 李春文, 龙图景, 等. 参数和时延不确定性离散时间系统的  $H^\infty$  鲁棒控制 [J]. *控制与决策*, 2003, 18(2): 190-194.  
(Jiang P G, Li C W, Long T J, et al. Robust  $H^\infty$  control for discrete-time systems with parameter uncertainty and time-delayed uncertainty[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(2): 190-194.)