

文章编号: 1001-0920(2004)06-0699-03

## 基于多目标进化算法的混合 $H_2/H$ 优化控制

马清亮<sup>1</sup>, 胡昌华<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072; 2. 第二炮兵工程学院 自动化系, 陕西 西安 710025)

**摘要:** 提出一种用于混合  $H_2/H$  优化控制的多目标进化算法. 为加快算法的收敛进程, 将 LMI 方法的优化结果作为初始代种群, 并采用群体排序、小生境和最优保留等关键技术. 仿真结果表明, 与 LMI 方法相比, 多目标进化算法的优化结果具有更小的保守性.

**关键词:**  $H_2/H$  控制; 多目标进化算法; 状态反馈; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

### Mixed $H_2/H$ optimal control based on multiobjective evolutionary algorithm

MA Qing-liang<sup>1</sup>, HU Chang-hua<sup>2</sup>

(1. College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi an 710072, China; 2. Department of Automation, Second Artillery Engineering College, Xi an 710025, China. Correspondent: MA Qing-liang, E-mail: mq199@sohu.com)

**Abstract:** A kind of multiobjective evolutionary algorithm is presented for mixed  $H_2/H$  optimal control. To accelerate the convergence speed, it takes the solutions of linear matrix equalities (LMI) method as initial population. Non-dominated sorting, niche and elitist strategy are also employed in order to ensure a better convergence to the true Pareto-optimal front. Simulation results show that the solutions found by the proposed algorithm are less conservative compared with LMI method.

**Key words:**  $H_2/H$  control; multiobjective evolutionary algorithm; state feedback; LMI

### 1 引言

混合  $H_2/H$  控制将  $H$  性能设计与  $H_2$  性能设计相结合, 使闭环系统同时具有较好的鲁棒性和优良的调节性能, 因而具有重要的研究和应用价值<sup>[1]</sup>. 混合  $H_2/H$  控制问题已被证明是一个 NP-hard 问题<sup>[2]</sup>. 文献[1]中的 Riccati 方程法需要求解耦合的 Riccati 方程, 并且只能得到问题的次优解. [3]中的 LMI 方法在求解时由于引入了附加约束条件, 从而使其优化结果具有一定的保守性. [4]利用单目标遗传算法进行求解, 只能得到一个最优

解. 由于系统的  $H_2$  性能与  $H$  性能往往相互冲突, 混合  $H_2/H$  控制本质上是一个多目标优化问题, 其最优解是由众多 Pareto 解组成的集合. 通过绘制  $H_2/H$  控制问题的最优值曲线, 可在  $H_2$  性能和  $H$  性能之间作出合理的折衷, 从而设计出最满意的控制器. [5]将多目标优化问题转化为一个单目标优化问题进行求解, 每次运算只能得到一个解, 且需要较多的先验知识.

本文针对混合  $H_2/H$  控制问题的特点, 提出一种基于群体排序、小生境和最优保留的多目标进

收稿日期: 2003-07-17; 修回日期: 2003-12-09.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69931040).

作者简介: 马清亮(1974—), 男, 河南商水人, 博士生, 从事智能控制、多目标优化的研究; 胡昌华(1966—), 男, 湖北罗田人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、先进控制算法等研究.

化算法,并将其应用到混合  $H_2/H$  状态反馈控制器设计. 仿真结果表明多目标进化算法具有很高的优化效率.

### 2 混合 $H_2/H$ 控制问题

考虑由如下状态方程描述的线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \\ z_1(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \\ z_2(t) = C_2 x(t) + D_{22} u(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in R^n$  是系统的状态,  $u(t) \in R^m$  是控制输入,  $w(t) \in R^q$  是扰动输入,  $z_1(t) \in R^{r_1}$  和  $z_2(t) \in R^{r_2}$  是被调输出.

对于混合  $H_2/H$  状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in R^{m \times n}, \quad (2)$$

相应的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_2 K)x(t) + B_1 w(t), \\ z_1(t) = (C_1 + D_{12} K)x(t) + D_{11} w(t), \\ z_2(t) = (C_2 + D_{22} K)x(t). \end{cases} \quad (3)$$

混合  $H_2/H$  状态反馈控制要求设计一个控制器(2),满足以下性能指标<sup>[3]</sup>:

- 1) 闭环系统(3)是渐近稳定的;
- 2)  $H$  性能:对于给定的标量  $\epsilon > 0$ ,从  $w$  到  $z_1$  的闭环传递函数  $T_{z_1 w}(s)$ ,其  $H$  范数满足  $\|T_{z_1 w}(s)\| < \epsilon$ ;
- 3)  $H_2$  性能:极小化从  $w$  到  $z_2$  的闭环传递函数  $T_{z_2 w}(s)$  的  $H_2$  范数  $\|T_{z_2 w}(s)\|_2$ .

为了一次性获得对应于不同  $\epsilon$  约束下的混合  $H_2/H$  控制问题的最优解,将上述问题转化为如下多目标优化问题:

$$\begin{cases} \min_K [\|T_{z_1 w}(s)\|, \|T_{z_2 w}(s)\|_2]; \\ \text{s. t. } K = A(K), \\ \|T_{z_1 w}(s)\| < \epsilon, \\ \|T_{z_2 w}(s)\|_2 < \epsilon. \end{cases} \quad (4)$$

其中  $A(K)$  是所有使闭环系统(3)渐近稳定的状态反馈控制器(2)的集合.

### 3 用于混合 $H_2/H$ 控制的多目标进化算法

近年来,进化计算已在多目标优化领域得到广泛的应用,并形成了多种多目标进化算法,如 NSGA-II<sup>[6]</sup>等.多目标进化算法通过对整个种群进行选择、交叉和变异等遗传操作,使种群不断进化,可一次性获得大量的多目标优化问题的非劣解.

用于混合  $H_2/H$  控制的多目标进化算法,是在标准遗传算法的基础上加以改进而得到的,其主要特点是:

1) 将LMI方法的优化结果作为初始代种群.在运用LMI方法求解时,让目标函数  $T_{z_1 w}(s)$  和  $T_{z_2 w}(s)$  的权重  $\alpha$  和  $\beta$  在  $[0,1]$  之间不断均匀变化取值,可得到一系列不同的优化结果.将这些结果作为多目标进化算法的初始种群,不仅能保证初始种群中个体的可行性,而且可加快算法的收敛进程.

2) 将闭环系统稳定性约束条件  $K = A(K)$  转化为辅助优化目标.闭环系统(3)渐近稳定的充要条件是矩阵  $A + B_2 K$  的所有特征值均具有负实部,即

$$\text{Re}\{\lambda_i(A + B_2 K)\} < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

式(5)等价于矩阵  $A + B_2 K$  的特征值的最大实部值小于0,即

$$\max\{\text{Re}\{\lambda_i(A + B_2 K)\}\} < 0. \quad (6)$$

为便于处理稳定性约束条件  $K = A(K)$ ,可构造辅助极小化目标函数

$$f(K) = \max\{\text{Re}\{\lambda_i(A + B_2 K)\}\}. \quad (7)$$

当该函数值小于0时,所设计的状态反馈控制器可使闭环系统渐近稳定.

3) 调用 MATLAB 函数进行目标适应度估计.对于种群中的每一个体,在计算其目标适应度  $T_{z_1 w}(s)$  和  $T_{z_2 w}(s)$  时,需要进行大量的矩阵运算.为充分发挥 MATLAB 语言强大的数值计算能力,可采用 C++ / MATLAB 混合编程的方法.即首先编写出计算  $T_{z_1 w}(s)$  和  $T_{z_2 w}(s)$  的 MATLAB 函数;然后用 MATLAB 编译器将其转化为相应的 C++ 函数供程序调用.

4) 群体排序:在进行选择运算之前,根据个体的非劣解水平将种群分级.具体方法为:将当前种群中所有非劣解个体划分为同一等级,并赋予相同的等级为1,然后将这些个体从种群中移去,在剩余个体中找出新的非劣解,并赋予其等级为2.重复上述过程,直到种群中所有个体都被赋予相应的级别为止.

5) 小生境技术:将种群中的每一个体与同级别相邻的两个体之间的局部拥挤距离称为该个体的虚拟适应度,并将其作为个体的一个属性.通过选择运算,虚拟适应度高的个体有较多的机会参与繁殖和进化,从而有利于维持种群的多样性.

6) 最优保留:为保护在进化过程中出现过的优秀个体,将父代与子代种群合并成混合种群,对该种

群进行群体排序,并计算其中所有个体的虚拟适应度.依据个体非劣解等级的高低和虚拟适应度的大小,在混合种群中选择较优的 50% 个体作为执行新一轮进化的下代种群.

该算法的流程如图 1 所示.

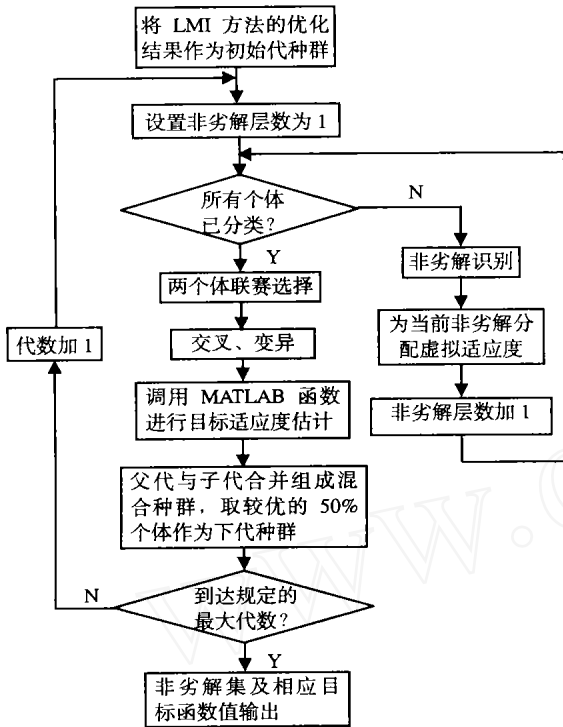


图 1 用于  $H_2/H$  控制的多目标进化算法

#### 4 算 例

设系统 (1) 中的系数矩阵为<sup>[3]</sup>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0], D_{11} = 0, D_{12} = 1,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

设计状态反馈控制器 (2),要求使闭环系统 (3) 渐近稳定,并在满足约束  $T_{z_1w}(s) < 0.8$  的前提下,极小化目标函数  $T_{z_1w}(s)$  和  $T_{z_2w}(s)$ .

首先应用 LMI 方法进行优化,让目标函数权重和  $[0 \ 1]$  之间不断均匀变化取值,并将得到的一系列优化结果作为多目标进化算法的初始种群.

然后运用图 1 所示的多目标进化算法进行优化,采用浮点数编码方式,将稳定性约束条件  $K$

$A(K)$  转化为辅助优化目标.选择种群规模为 250,交叉概率为 0.95,变异概率为 0.20,最大进化代数 为 100.优化结果如图 2 所示.

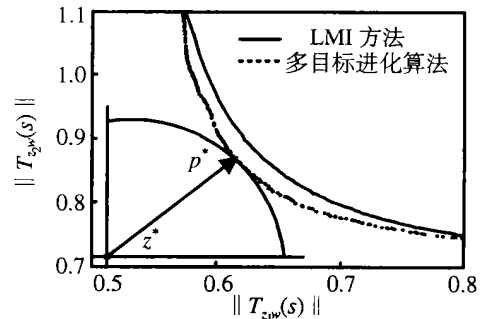


图 2 多目标进化算法与 LMI 方法的比较

由图 2 可以看出,与 LMI 方法相比,采用群体排序、小生境技术和最优保留的多目标进化算法,可获得具有更小保守性的优化结果.

对于由多目标进化算法得到的众多非劣解,需要从中选择一个满意解作为最终的设计方案.如果以距离该问题的理想点  $z^* = [0.514 \ 3 \ 0.715 \ 6]$  最短为准则,则应选择  $p^*$  点作为满意解,相应的最优状态反馈控制器为

$$u^*(t) = [-3.356 \ 8 \ -9.985 \ 4 \ 2.976 \ 8]x(t). \quad (8)$$

在控制器 (8) 的作用下,闭环系统 (3) 的极点为  $-3.496 \ 2 \pm 4.628 \ 1i$  和  $-6.993 \ 0$ ,  $H$  性能指标为  $0.633 \ 1$ ,  $H_2$  性能指标为  $0.845 \ 2$ .所设计的状态反馈控制器不仅能使闭环系统渐近稳定,而且满足给定的约束条件  $T_{z_1w}(s) < 0.8$ .

#### 5 结 论

本文提出一种用于混合  $H_2/H$  控制的多目标进化算法.该算法可一次性获得大量混合  $H_2/H$  控制问题的非劣解,具有很高的优化效率.与 LMI 方法相比,其优化结果具有更小的保守性.

#### 参考文献 (References):

[1] Bernstein D S, Haddad W M. LQG control with an  $H$  performance bound: A Riccati equation approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34 (4): 293-305.  
 [2] Masubuchi I, Ohara A, Suda N. LMF-based controller synthesis: A unified formulation and solution[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1998, 8(8): 669-686.

(下转第 706 页)

5.077 3, 对应的滤波器参数为

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.0848 & -0.7383 \\ 1.1187 & -0.4100 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} -0.0854 \\ -0.1202 \end{bmatrix}, C_f = \begin{bmatrix} -0.1185 \\ -0.0120 \end{bmatrix}^T.$$

对于由全阶滤波器构成的滤波误差系统,在和取不同值时作图.图1给出了通道  $w_1 \bar{z}$  的  $l_1$  性能指标,图2给出了通道  $w_2 \bar{z}$  的  $H$  性能指标.从图中可以看出,  $\gamma^*(\phi = 0.0149) = 5.0773$  是  $l_1$  性能指标的上界,并且通道  $w_2 \bar{z}$  满足  $H$  性能指标小于2的约束.

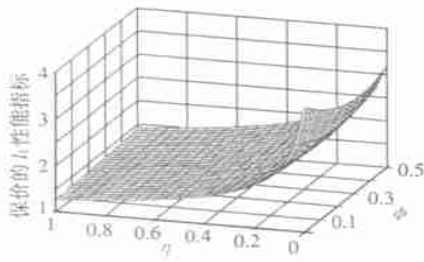


图1 系统(4)  $w_1 \bar{z}$  通道的  $l_1$  性能指标

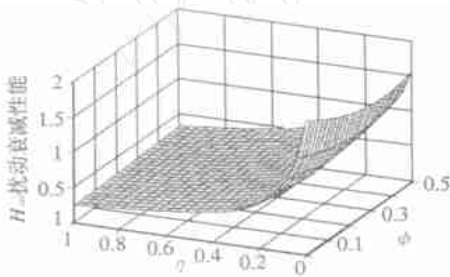


图2 系统(4)  $w_2 \bar{z}$  通道的  $H$  性能指标

对于降阶滤波,当  $n = 3$  时,得到  $\gamma^*(\phi = 0.0097) = 8.3713$ ,对应的滤波器参数为  $A_f = \begin{bmatrix} -0.8837 & -0.8624 \\ 1.1187 & -0.4100 \end{bmatrix}$ ,  $B_f = \begin{bmatrix} -0.0854 \\ -0.1202 \end{bmatrix}$ ,  $C_f = \begin{bmatrix} -0.1185 \\ -0.0120 \end{bmatrix}^T$ .与全阶情况类似,通过相同方法作图分析,可验证本文的

结论.

## 5 结 论

本文对于在凸有界域内的线性离散不确定系统,成功地设计出全阶和降阶鲁棒  $l_1/H$  保价滤波器.所得的鲁棒  $l_1/H$  性能判据是基于参数依赖 Lyapunov 稳定性结果,这使得可用参数依赖型 Lyapunov 函数进行多目标鲁棒滤波设计.计算示例说明了本文设计方法的优越性和可行性.

## 参考文献 (References):

- [1] Abedor J, Nagpal K, Poolla K. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1996, 6(5): 899-927.
- [2] Vincent T, Abedor J, Nagpal K, et al. Discrete-time estimators with guaranteed peak-to-peak performance [A]. *Proc 13th IFAC Triennial World Congress* [C]. San Francisco, 1996. 43-48.
- [3] Jin S H, Park J B. Robust  $H$  filter for polytopic uncertain systems via convex optimization[J]. *IEE Proc Control Theory Application*, 2001, 148(1): 55-59.
- [4] Sznajder M, Bu J Y. Mixed  $l_1/H$  control of MIMO systems via convex optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(9): 1229-1241.
- [5] Salapaka M V, Dahleh M, Voulgaris P G. MIMO optimal control design: The interplay between the  $H_2$  and the  $l_1$  norms[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(10): 1374-1388.
- [6] Palhares R M, Peres P L D. LMI approach to the mixed  $H_2/H$  filtering design for discrete-time uncertain systems [J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, 37(1): 292-296.

(上接第 701 页)

- [3] Scherer C, Cahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896-911.
- [4] Chen B S, Cheng Y M, Lee C H. A genetic approach to mixed  $H_2/H$  optimal PID control [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, 15(5): 51-60.

- [5] Takahashi R H C, Peres P L D, Ferreira P A V. Multiobjective  $H_2/H$  guaranteed cost PID design [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1997, 17(5): 37-47.
- [6] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II [J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.