第 19 卷 第 6 期 控 制 与 决 策 2004 年 6 月
Vol. 19 No. 6 Control and Decision June 2004

文章编号: 1001-0920(2004)06-0702-05

# 离散时间不确定系统的混合 $l_1/H_\infty$ 滤波

李艳辉, 王常虹, 高会军
(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘 要**: 研究离散时间不确定线性系统的混合 $l_1/H_\infty$ 滤波器设计问题,目的是找到一个稳定的线性滤波器,使滤波误差系统在不同的滤波通道内具有不同的性能指标. 利用参数依赖 Lyapunov 函数法,推导出新的鲁棒 $l_1/H_\infty$ 性能准则. 基于该性能准则推导了全阶和降阶鲁棒 $l_1/H_\infty$ 滤波器存在的充分条件,并将滤波器的设计问题转化为具有线性矩阵不等式约束的凸优化求解问题.

**关键词**: 鲁棒滤波; $l_1/H_\infty$ 性能; 线性矩阵不等式; Lyapunov 函数; 凸优化
**中图分类号**: TP13 **文献标识码**: A

# Mixed $l_1/H_\infty$ filtering for discrete-time uncertain systems

*LI Yan-hui, WANG Chang-hong, GAO Hui-jun*
(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: LI Yan-hui, E-mail: ly-hui@hotmail.com)

**Abstract**: The design problems of mixed $l_1/H_\infty$ filter for linear discrete-time uncertain systems are dealt with. The aim is to design a linear asymptotically stable filter which guarantees that the filtering error system has the different performance in the different filtering channel. Based on parameter-dependent Lyapunov function, new robust $l_1/H_\infty$ performance criteria is proposed. Upon the proposed performance criteria, sufficient conditions for the existence of full-order and reduced-order robust $l_1/H_\infty$ filters are presented. The filter design problem is converted into a convex optimization problem subject to linear matrix inequality (LMI) constraints.

**Key words**: robust filtering; $l_1/H_\infty$ performance; LMI; Lyapunov functions; convex optimization

## 1 引 言

鲁棒滤波是控制领域的重要问题,所涉及的内容是从可测的系统输出中吸取信息,进而提供状态估计,并使滤波误差系统闭环传递函数的加权范数最小,保证期望的性能指标,如 $l_1$ 滤波[1,2]、$H_\infty$ 滤波[3] 等. 这些滤波方法在控制领域已被广泛接受,具有重要的工程应用价值. 然而,上述方法存在一定的局限性,如部分噪声信号是峰值有界的,而另一部分是能量有限的,或者需要在不同的范数下测量性能. 显然,单一范数不足以捕捉这些不同的经常矛盾的设计指标,设计者不得不使用更复杂的设计过程来满足更高的设计要求. 近年来,控制系统的多目标设计方法受到学者们的重视,已广泛应用于控制器的设计[4,5],但在滤波中并未受到广泛的关注[6].

本文针对凸多面体的离散时间不确定系统,讨论基于参数依赖 Lyapunov 函数的鲁棒 $l_1/H_\infty$ 滤波问题. 假定噪声输入信号部分是峰值有界的,而另一部分是任意的能量有限信号. 考虑两个不同的通道,所设计的线性稳定滤波器保证一个通道相对所有峰值有界的噪声输入信号,使最劣情况下的滤波误差

**收稿日期**: 2003-06-19; **修回日期**: 2003-08-29.
**基金项目**: 国家自然科学基金资助项目(69874008).
**作者简介**: 李艳辉(1970 —),女,辽宁法库人,副教授,博士生,从事鲁棒控制、神经网络的研究; 王常虹(1961 —),男,黑龙江哈尔滨人,教授,博士生导师,从事神经网络、远程控制等研究.

信号的峰值最小,而另一个通道相对能量有限噪声输入信号,滤波误差系统具有给定的 $H_\infty$ 扰动衰减水平. 设计方法是利用参数依赖 Lyapunov 稳定性结果,推导出新的混合 $l_1/H_\infty$ 性能准则,并采用 LMI 技术推导此类不确定系统的全阶和降阶鲁棒 $l_1/H_\infty$ 状态估计新方法,将滤波器的设计转化为一个凸优化求解问题. 计算示例表明此滤波设计方法是有效的.

## 2　问题描述

考虑如下线性离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1 w_1(k) + B_2 w_2(k), \\ y(k) = Cx(k) + D_1 w_1(k) + D_2 w_2(k), \\ z(k) = Lx(k). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(k) \in R^n$ 为状态变量, $y(k) \in R^m$ 为测量输出, $w_i(k) \in R^{q_i} (i = 1,2)$ 为噪声输入, $z(k) \in R^p$ 为要估计的信号. 假设 $w_1(k)$ 和 $w_2(k)$ 分别为峰值有界和能量有限的噪声信号,不确定性系统矩阵可表达为若干个顶点矩阵的凸组合,即

$$\begin{cases} \Xi \doteq (A, B_1, B_2, C, D_1, D_2, L) \in \mathbf{R}, \\ \mathbf{R} \tilde{=} \left\{ \Xi \,\middle|\, \Xi = \sum_{i=1}^{h} \tau_i \Xi_i, \tau_i \geq 0, \sum_{i=1}^{h} \tau_i = 1 \right\}. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Xi_i = (A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_{1i}, D_{2i}, L_i)$.

构造如下形式的 $l$ 阶滤波器:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_f \hat{x}(k) + B_f y(k), \\ \hat{z}(k) = C_f \hat{x}(k). \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\hat{x}(k) \in R^l$ (全阶滤波 $l = n$, 降阶滤波 $1 \leq l \leq n$).

取状态变量 $\bar{x}(k) = \{x(k)^{\mathrm T}, \hat{x}(k)^{\mathrm T}\}^{\mathrm T}$, 误差输出 $\bar{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$, 则滤波误差系统状态方程为

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}_1 w_1(k) + \bar{B}_2 w_2(k), \\ \bar{z}(k) = \bar{C}\bar{x}(k). \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f D_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_f D_2 \end{bmatrix}, \bar{C} = [L \quad -C_f].$$

则噪声信号 $w_1(k)$ 和 $w_2(k)$ 到估计误差信号 $\bar{z}(k)$ 的 $z$ 传递函数分别为

$$\begin{cases} T_1(z) = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B}_1, \\ T_2(z) = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B}_2. \end{cases} \tag{5}$$

**定义 1**　式(5)中传递函数 $T_1(z)$ 的 $l_1$ 范数定义为

$$\|T_1(z)\|_{l_1} \doteq \sup_{0 \neq w_1 \in l_\infty} \|\bar{z}\|_{l_\infty} / \|w_1\|_{l_\infty} = \sup_{0 \neq w_2 \in l_\infty} \left( \sup_k \|\bar{z}(k)\|_2 / \sup_k \|w_1(k)\|_2 \right).$$

**定义 2**　式(5)中传递函数 $T_2(z)$ 的 $H_\infty$ 范数定义为

$$\|T_2(z)\|_\infty \doteq \sup_{0 \neq w_2 \in l_2} \|\bar{z}\|_{l_2} / \|w_2\|_{l_2} = \sup_{0 \neq w_2 \in l_2} \left( \left[\sum_{k=0}^{\infty} \|\bar{z}(k)\|_2^2\right]^{1/2} / \left[\sum_{k=0}^{\infty} \|w_2(k)\|_2^2\right]^{1/2} \right).$$

本文要研究的问题是:在系统矩阵 $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2, L)$ 满足式(2)的情况下,求出滤波器参数矩阵 $(A_f, B_f, C_f)$, 使滤波误差系统(4)稳定,并使对应于通道 $w_1 \to \bar{z}$ 的滤波误差的峰值-峰值增益上界 $\xi (\xi > 0)$ 最小,且对应于通道 $w_2 \to \bar{z}$, 保证 $\|T_2(z)\|_\infty$ 小于给定的 $\gamma (\gamma > 0)$. 即 $\min_{(A_f, B_f, C_f)} \{ \|T_1(z)\|_{l_1} : \|T_2(z)\|_\infty \leq \gamma \}$.

## 3　主要结果

### 3.1　$l_1$ 性能准则

**引理 1**[1,2]　考虑系统(1), 设 $\Xi \in \mathbf{R}$ 为任意确定性常值矩阵, 令 $\xi > 0$. 则滤波误差系统(4)的通道 $w_1 \to \bar{z}$ 稳定, 且 $\|T_1(z)\|_{l_1} < \xi$, 其充要条件为存在矩阵 $0 < P_1 = P_1^{\mathrm T} \in R^{(n+1)\times(n+1)}$, $\alpha \in R^+$, $\mu \in R$, 满足

$$\begin{bmatrix} P_1 & \bar{A}P_1 & \bar{B}_1 \\ P_1\bar{A}^{\mathrm T} & (1-\alpha)P_1 & 0 \\ \bar{B}_1^{\mathrm T} & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha P_1 & 0 & P_1\bar{C}^{\mathrm T} \\ 0 & (\xi - \mu) I & 0 \\ \bar{C}P_1 & 0 & \xi I \end{bmatrix} > 0, \tag{7}$$

其中 $\alpha \in (0, 1 - (\max|\lambda(A)|)^2)$.

**注 1**　峰值-峰值增益的最小化与 $\alpha$ 的选择有关, 即 $\|T(z)\|_{l_1} < \xi(\alpha)$. 因此对 $\alpha$ 必须进行线性搜索, 以得到更紧的 $\xi$ 界.

下述定理给出一个与引理 1 等价且具有参数依赖 Lyapunov 矩阵的 $l_1$ 性能判据.

**定理 1**　考虑系统(1), 设 $\Xi \in \mathbf{R}$ 为任意确定性常值矩阵, 给定 $\xi > 0$, $\alpha > 0$. 则滤波误差系统(4)的通道 $w_1 \to \bar{z}$ 稳定, 且 $\|T_1(z)\|_{l_1} < \xi(\alpha)$, 其充要条件为存在矩阵 $0 < Y_1 = Y_1^{\mathrm T} \in R^{(n+1)\times(n+1)}$, $G_1 \in R^{(n+l)\times(n+l)}$, 标量 $\mu \in R$, 满足

$$\begin{bmatrix} G_1+G_1^{\mathrm T}-Y_1 & G_1^{\mathrm T}\bar A & G_1^{\mathrm T}\bar B_1 \\ \bar A^{\mathrm T}G_1 & (1-\alpha)Y_1 & 0 \\ \bar B_1^{\mathrm T}G_1 & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha Y_1 & 0 & \bar C^{\mathrm T} \\ 0 & (\xi-\mu)I & 0 \\ \bar C & 0 & \xi I \end{bmatrix} > 0. \tag{9}$$

**证明** 由于 $P_1>0$,用 $J_1 \doteq \mathrm{diag}\{P_1^{-1}, P_1^{-1}, I\}$ 对式(6) 进行全等变换,并定义 $Y_1 \doteq P_1^{-1}$,则有

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_1\bar A & Y_1\bar B \\ \bar A^{\mathrm T}Y_1 & (1-\alpha)Y_1 & 0 \\ \bar B^{\mathrm T}Y_1 & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0. \tag{10}$$

为证明式(8) 成立,只需证明式(8) 与式(10) 等价即可. 若式(10) 成立,则选择 $G_1=G_1^{\mathrm T}=Y_1$,可获得式(8),说明(10) →(8). 若式(8) 成立,则有 $G_1+G_1^{\mathrm T}-Y_1>0$. 考虑到 $Y_1>0$,可知 $G_1$ 可逆. 由 $(G_1^{\mathrm T}-Y_1)Y_1^{-1}(G_1-Y_1)\geq 0$,得 $G_1^{\mathrm T}Y_1^{-1}G_1 \geq G_1+G_1^{\mathrm T}-Y_1$. 于是由式(8) 可推得

$$\begin{bmatrix} G_1^{\mathrm T}Y_1^{-1}G_1 & G_1^{\mathrm T}\bar A & G_1^{\mathrm T}\bar B_1 \\ \bar A^{\mathrm T}G_1 & (1-\alpha)Y_1 & 0 \\ \bar B_1^{\mathrm T}G_1 & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0.$$

用 $J_2 \doteq \mathrm{diag}\{G_1^{-1}Y_1, I, I\}$ 对上式进行全等变换,可得式(10),说明(8) →(10). 用 $J_3 \doteq \mathrm{diag}\{P_1^{-1}, I, I\}$ 对式(7) 进行全等变换,由定义 $Y_1 \doteq P_1^{-1}$ 可推得式(9) 成立. □

### 3.2 H∞性能准则

应用离散时间系统的有界实引理[6],并采用与定理 1 类似的推导方法,可得到一个 Lyapunov 矩阵与系统矩阵之间解耦的 $H_\infty$性能准则.

**定理2** 考虑系统(1),设 $\Xi \in \mathbf{R}$为任意确定性常值矩阵,并给定 $\gamma>0$. 则滤波误差系统(4) 的通道 $w_2 \to \bar z$ 稳定,且 $\|T_2(z)\|_\infty < \gamma$,其充要条件为存在矩阵 $0<Y_2=Y_2^{\mathrm T}\in R^{(n+l)\times(n+l)}$, $G_2 \in R^{(n+l)\times(n+l)}$,满足

$$\begin{bmatrix} Y_2-G_2-G_2^{\mathrm T} & 0 & G_2^{\mathrm T}\bar A & G_2^{\mathrm T}\bar B_2 \\ 0 & -I & \bar C & 0 \\ \bar A^{\mathrm T}G_2 & \bar C^{\mathrm T} & -Y_2 & 0 \\ \bar B_2^{\mathrm T}G_2 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

其证明与定理 1 的证明类似,此略.

### 3.3 鲁棒 $l_1/H_\infty$性能准则

在定理 1 和定理 2 的基础上,由凸多面体不确定系统的内在特性,很容易得到保证滤波误差系统(4) 稳定的鲁棒 $l_1/H_\infty$性能准则.

**定理3** 设 $\Xi \in \mathbf{R}$为不确定性系统矩阵,并给定 $\xi>0$, $\alpha>0$, $\gamma>0$. 则滤波误差系统(4) 稳定,且 $\|T_1(z)\|_{l_1} < \xi(\alpha)$, $\|T_2(z)\|_\infty < \gamma$,其充分条件为存在矩阵 $0<Y_{1i}=Y_{1i}^{\mathrm T}\in R^{(n+l)\times(n+l)}$, $0<Y_{2i}=Y_{2i}^{\mathrm T}\in R^{(n+l)\times(n+l)}$, $G\in R^{(n+l)\times(n+l)}$,标量 $\mu \in R$,满足

$$\begin{bmatrix} G+G^{\mathrm T}-Y_{1i} & G^{\mathrm T}\bar A_i & G^{\mathrm T}\bar B_{1i} \\ \bar A_i^{\mathrm T}G & (1-\alpha)Y_{1i} & 0 \\ \bar B_{1i}^{\mathrm T}G & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha Y_{1i} & 0 & \bar C_i^{\mathrm T} \\ 0 & (\xi-\mu)I & 0 \\ \bar C_i & 0 & \xi I \end{bmatrix} > 0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{2i}-G-G^{\mathrm T} & 0 & G^{\mathrm T}\bar A_i & G^{\mathrm T}\bar B_{2i} \\ 0 & -I & \bar C_i & 0 \\ \bar A_i^{\mathrm T}G & \bar C_i^{\mathrm T} & -Y_{2i} & 0 \\ \bar B_{2i}^{\mathrm T}G & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{14}$$

其中:$(\bar A_i, \bar B_{1i}, \bar B_{2i}, \bar C_i)$ 为滤波误差系统(4) 的顶点矩阵, $G \doteq G_1 = G_2$, $\forall i = 1,2,\cdots,h$.

**注2** 定理 3 通过引入一个附加矩阵 $G$,实现了 Lyapunov 变量与系统矩阵之间的解耦,这一特性使得当其应用于凸多面体不确定系统时,可得到较低保守性的结果. 对于实凸多面体不确定性系统的鲁棒多目标设计问题,根据传统方法,受一组 LMIs(通过二次稳定概念得到) 的约束,最小化 $\xi$需要一个共同的Lyapunov 变量 $P \doteq P_1 = P_2$;而根据新方法,受式(14) ～(16) 的约束,最小化 $\xi$需要一个共同的辅助松弛变量 $G \doteq G_1 = G_2$,这将进一步降低保守性.

### 3.4 鲁棒 $l_1/H_\infty$滤波器设计

**定理4** 考虑系统(1),设 $\Xi \in \mathbf{R}$为不确定性系统矩阵,令 $\alpha>0$, $\xi>0$, $\gamma>0$. 则可保证滤波误差系统(4) 稳定,且 $\|T_1(z)\|_{l_1} < \xi(\alpha)$, $\|T_2(z)\|_\infty < \gamma$,其充分条件为存在矩阵 $0<X_i=X_i^{\mathrm T}\in R^{n\times n}$, $0<V_i=V_i^{\mathrm T}\in R^{l\times l}$, $Z_i\in R^{n\times l}$, $0<H_i=H_i^{\mathrm T}\in R^{n\times n}$, $0<K_i=K_i^{\mathrm T}\in R^{l\times l}$, $Q_i\in R^{n\times l}$, $R\in R^{n\times n}$, $F\in R^{l\times l}$, $U\in R^{n\times l}$, $M\in R^{l\times l}$, $N\in R^{l\times m}$, $T\in R^{p\times l}$,标量 $\mu\in R$,满足

$$\begin{bmatrix} R+R^{\mathrm T}-X_i & * & * & * & * \\ U^{\mathrm T}+F^{\mathrm T}E^{\mathrm T}-Z_i^{\mathrm T} & F+F^{\mathrm T}-V_i & * & * & * \\ A_i^{\mathrm T}R+C_i^{\mathrm T}N^{\mathrm T}E^{\mathrm T} & A_i^{\mathrm T}U+C_i^{\mathrm T}N^{\mathrm T} & (1-\alpha)X_i & * & * \\ M^{\mathrm T}E^{\mathrm T} & M^{\mathrm T} & (1-\alpha)Z_i^{\mathrm T} & (1-\alpha)V_i & * \\ B_{1i}^{\mathrm T}R+D_i^{\mathrm T}N^{\mathrm T}E^{\mathrm T} & B_{1i}^{\mathrm T}U+D_i^{\mathrm T}N^{\mathrm T} & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0, \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha X_i & * & * & * \\ \alpha Z_i^{\mathrm{T}} & \alpha V_i & * & * \\ 0 & 0 & (\xi-\mu)I & * \\ L_i & -T & 0 & \xi I \end{bmatrix} > 0, \qquad (16)$$

$$\begin{bmatrix} -R-R^{\mathrm{T}}+H_i & * & * & * & * & * \\ -U^{\mathrm{T}}-F^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}+Q_i^{\mathrm{T}} & -F-F^{\mathrm{T}}+K_i & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -I & * & * & * \\ A_i^{\mathrm{T}}R+C_i^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} & A_i^{\mathrm{T}}U+C_i^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}} & L_i^{\mathrm{T}} & -H_i & * & * \\ M^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} & M^{\mathrm{T}} & -T^{\mathrm{T}} & -Q_i^{\mathrm{T}} & -K_i & * \\ B_{2i}^{\mathrm{T}}R+D_i^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} & B_{2i}^{\mathrm{T}}U+D_i^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \qquad (17)$$

若以上线性矩阵不等式组有解,则滤波器(3) 的参数矩阵可由下式构造:

$$A_f = F^{-1}M,\ B_f = F^{-1}N,\ C_f = T. \qquad (18)$$

其中: $E \doteq [I_{l\times l}\quad 0_{l\times(n-1)}]^{\mathrm{T}}$, $\forall i = 1,2,\cdots,h$.

**证明**　由式(15) 可知 $F$ 非奇异,由此可找到非奇异方阵 $G_{21}$ 和 $G_{22}$,满足 $F = G_{21}^{\mathrm{T}}G_{22}^{-1}G_{21}$. 引入如下矩阵:

$$\begin{cases} J \doteq \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_{22}^{-1}G_{21} \end{bmatrix},\ G_{11} \doteq R, \\ G_{12} \doteq UG_{21}^{-1}G_{22},\ G \doteq \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21}E^{\mathrm{T}} & G_{22} \end{bmatrix}, \\ Y_{1i} \doteq \begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{12i} \\ Y_{12i}^{\mathrm{T}} & Y_{22i} \end{bmatrix} = J^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X_i & Z_i \\ Z_i^{\mathrm{T}} & V_i \end{bmatrix}J^{-1}, \\ Y_{2i} \doteq \begin{bmatrix} S_{11i} & S_{12i} \\ S_{12i}^{\mathrm{T}} & S_{22i} \end{bmatrix} = J^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix} H_i & Q_i \\ Q_i^{\mathrm{T}} & K_i \end{bmatrix}J^{-1}, \\ \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & 0 \end{bmatrix} \doteq \\ \begin{bmatrix} G_{21}^{-\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & N \\ T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{21}^{-1}G_{22} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{cases} \qquad (19)$$

如果线性矩阵不等式组(15) ～(17) 有解,则上面引入的矩阵变量 $J$, $G$, $Y_{1i}$, $Y_{2i}$ 及式(19) 定义的矩阵变量可唯一确定. 经简单的矩阵运算可得

$$\begin{bmatrix} J^{\mathrm{T}}(G+G^{\mathrm{T}}-Y_i)J & J^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\bar{A}_iJ & J^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\bar{B}_{1i} \\ J^{\mathrm{T}}\bar{A}_i^{\mathrm{T}}GJ & (1-\alpha)J^{\mathrm{T}}Y_iJ & 0 \\ \bar{B}_{1i}^{\mathrm{T}}GJ & 0 & \mu I \end{bmatrix} > 0, \qquad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha J^{\mathrm{T}}Y_iJ & 0 & J^{\mathrm{T}}\bar{C}_i^{\mathrm{T}} \\ 0 & (\xi-\mu)I & 0 \\ \bar{C}_iJ & 0 & \xi I \end{bmatrix} > 0, \qquad (21)$$

$$\begin{bmatrix} J^{\mathrm{T}}(Y_{2i}-G-G^{\mathrm{T}})J & 0 & J^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\bar{A}_iJ & J^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\bar{B}_{2i} \\ 0 & -I & \bar{C}_iJ & 0 \\ J^{\mathrm{T}}\bar{A}_i^{\mathrm{T}}GJ & J^{\mathrm{T}}\bar{C}_i^{\mathrm{T}} & -J^{\mathrm{T}}Y_{2i}J & 0 \\ \bar{B}_{2i}^{\mathrm{T}}GJ & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \qquad (22)$$

用 $J_5 \doteq \mathrm{diag}\{J^{-1}, J^{-1}, I\}$, $J_6 \doteq \mathrm{diag}\{J^{-1}, I, I\}$, $J_7 \doteq \mathrm{diag}\{J^{-1}, I, J^{-1}, I\}$ 分别对式(20) ～(22) 进行全等变换,可得式(12) ～(14). 由定理 3 可知,式(19) 定义的滤波器参数矩阵可保证滤波误差系统(4) 稳定,且 $\|T_1(z)\|_{l_1} < \xi(\alpha)$, $\|T_2(z)\|_\infty < \gamma$.

由式(19) 可求出满足要求的滤波器参数矩阵,然而构造滤波器参数矩阵所需的 $G_{21}$ 和 $G_{22}$ 并未包含在式(15) ～(17) 中. 为此,将滤波器(3) 由 $y(t)$ 到 $\hat{z}(t)$ 的传递函数表示为 $T_{\hat{z}y}(s) = C_f(sI-A_f)^{-1}B_f$. 将式(19) 代入并考虑关系式 $F = G_{21}^{\mathrm{T}}G_{22}^{-1}G_{21}$, 可得 $T_{\hat{z}y}(s) = T(sI - F^{-1}M)^{-1}F^{-1}N$. 由此可知满足要求的滤波器参数矩阵可由式(18) 构造. □

**推论 1**　通过求解如下凸优化问题:

$$\begin{cases} \min\limits_{X_i, V_i, Z_i, H_i, K_i, Q_i, R, F, M, N, T, U, \xi, \mu} \xi(\alpha), \\ \text{s.t.}\ (15) \sim (17), \end{cases} \qquad (23)$$

其中 $\forall i = 1,2,\cdots,h$. 可设计系统(1) 的最优化鲁棒 $l_1/H_\infty$ 保价滤波器,对 $\alpha$ 在给定区间内执行线性搜索.

## 4　计算示例

考虑式(1) 描述的不确定离散系统,其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 1.2-\phi & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.35 \end{bmatrix},$$

$$C = [0.35+\eta\quad -0.65],$$

$$D_1 = 1.3,\ D_2 = 0.4,\ L = [0.2\quad 0].$$

式中不确定参数 $0 \le \phi \le 0.5$, $0 \le \eta \le 1$. 假定 $w_1(t)$ 为峰值有界信号, $w_2(t)$ 为能量有限信号. $\alpha$ 在区间 $\alpha \in (0.1 - (\max\{|\lambda(A_{\beta=-0.9})|, |\lambda(A_{\beta=0.3})|\})^2) \equiv (0, 0.0202)$ 内执行线性搜索.

采用本文方法,对于全阶滤波,当 $\gamma = 2$ 时,得到最优的保价峰 - 峰指标为 $\xi^*(\alpha = 0.0149) =$

5.077 3, 对应的滤波器参数为

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.084\,8 & -0.738\,3 \\ 1.118\,7 & -0.410\,0 \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} -0.085\,4 \\ -0.120\,2 \end{bmatrix},\ C_f = \begin{bmatrix} -0.118\,5 \\ -0.012\,0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

对于由全阶滤波器构成的滤波误差系统,在 $\phi$ 和 $\eta$ 取不同值时作图. 图 1 给出了通道 $w_1 \to \bar{z}$ 的 $l_1$ 性能指标,图 2 给出了通道 $w_2 \to \bar{z}$ 的 $H_\infty$ 性能指标. 从图中可以看出, $\xi^*(\alpha = 0.014\,9) = 5.077\,3$ 是 $l_1$ 性能指标的上界,并且通道 $w_2 \to \bar{z}$ 满足 $H_\infty$ 性能指标小于 2 的约束.

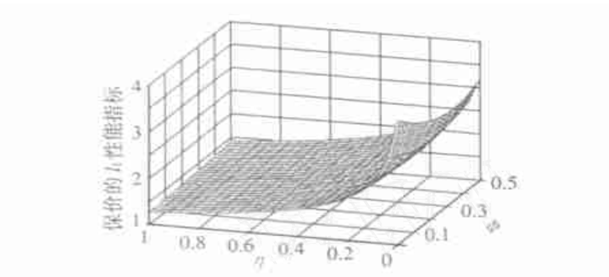


**图 1 系统(4) $w_1 \to \bar{z}$ 通道的 $l_1$ 性能指标**

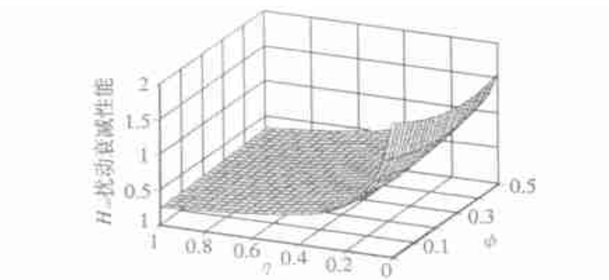


**图 2 系统(4) $w_2 \to \bar{z}$ 通道的 $H_\infty$ 性能指标**

对于降阶滤波, 当 $\gamma = 3$ 时, 得到 $\xi^*(\alpha = 0.009\,7) = 8.371\,3$, 对应的滤波器参数为 $A_f = -0.883\,7$, $B_f = -0.862\,4$, $C_f = -0.030\,0$. 与全阶情况类似,通过相同方法作图分析 ,可验证本文的结论.

## 5 结 论

本文对于在凸有界域内的线性离散不确定系统,成功地设计出全阶和降阶鲁棒 $l_1/H_\infty$ 保价滤波器. 所得的鲁棒 $l_1/H_\infty$ 性能判据是基于参数依赖 Lyapunov 稳定性结果, 这使得可用参数依赖型 Lyapunov 函数进行多目标鲁棒滤波设计. 计算示例说明了本文设计方法的优越性和可行性.

参考文献(References) :

[1] Abedor J , Nagpal K, Poolla K. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1996, 6(5): 899-927.

[2] Vincent T, Abedor J, Nagpal K, et al. Discrete-time estimators with guaranteed peak-to-peak performance [A]. *Proc 13th IFAC Triennial World Congress* [C]. San Francisco, 1996. 43-48.

[3] Jin S H, Park J B. Robust $H_\infty$ filter for polytopic uncertain systems via convex optimization[J]. *IEE Proc Control Theory Application*, 2001, 148(1): 55-59.

[4] Sznaier M, Bu J Y. Mixed $l_1/H_\infty$ control of MIMO systems via convex optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(9): 1229-1241.

[5] Salapaka M V, Dahleh M, Voulgaris P G. MIMO optimal control design: The interplay between the $H_2$ and the $l_1$ norms[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(10): 1374-1388.

[6] Palhares R M, Peres P L D. LMI approach to the mixed $H_2/H_\infty$ filtering design for discrete-time uncertain systems [J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, 37(1): 292-296.

(上接第 701 页)

[3] Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896-911.

[4] Chen B S, Cheng Y M, Lee C H. A genetic approach to mixed $H_2/H_\infty$ optimal PID control [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, 15(5): 51-60.

[5] Takahashi R H C, Peres P L D, Ferreira P A V. Multiobjective $H_2/H_\infty$ guaranteed cost PID design [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1997, 17(5): 37-47.

[6] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-Ⅱ[J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.