文章编号: 1001-0920(2004)06-0718-03

广义区间动力系统的鲁棒 H_∞控制

孙敏慧, 邹　云, 徐胜元
(南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094)

摘　要: 讨论了广义区间动力系统的鲁棒 H_∞控制问题. 利用线性矩阵不等式设计状态反馈控制律,使对所有满足条件的区间矩阵,闭环系统正则、无脉冲、稳定且满足一定的 H_∞性能指标.

关键词: 广义区间动力系统; 鲁棒稳定性; 线性矩阵不等式; H_∞控制
中图分类号: TP13　　　　**文献标识码**: A

Robust H_∞ control for generlized interval systems

SUN Min-hui, ZOU Yun, XU Sheng-yuan
(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: SUN Min-hui, E-mail: sun9402@sina.com.cn)

Abstract: The robust H_∞ control problem for generalized interval systems is discussed. A new sufficient condition of robust stability is given in terms of linear matrix inequalities that guarantees the system to be regular, impulse-free and stable. Then a state feedback controller is designed to stabilize the system subjected to a given H_∞ performance.

Key words: generalized interval systems; robust stability; LMI; H_∞ control

1　引　　言

区间动力系统是近年来研究较多的一类不确定系统,并且取得了长足的进展[1~4]. 其不确定性可描述为系统状态矩阵的各个元素在某些确定的区间内变化. 这种摄动虽不改变系统的阶次,但由于它的存在,可使原来以标称系统设计的性能指标衰退,甚至出现系统不稳定. 目前,对广义区间动力系统的稳定性已有一些相应的研究[5,6]. 其不足之处在于:所给出的鲁棒稳定判据难以验证,并且很少见到对该类系统 H_∞性能的讨论.

本文以 LMI 形式给出了广义区间动力系统鲁棒稳定的充分条件,该条件可保证所考虑的系统正则、无脉冲且稳定. 在此基础上,考虑系统的鲁棒 H_∞控制问题,通过设计状态反馈控制器,使对所有满足条件的区间矩阵,不仅保证闭环系统鲁棒稳定,而且将干扰抑制到一定的水平.

2　问题描述

考虑具有如下形式的广义区间动力系统:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1 w(t), \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (1b)$$

其中: $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $w(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$ 分别为系统的状态、控制输入、外部干扰、受控输出向量; E, B, B_1, C 为具有适当维数的常数矩阵,且 $\mathrm{rank}\ E = r \le n$; $A \in R^{n\times n}$ 为分量,满足如下描述形式的区间矩阵:

$$A \in [\underline{A}, \overline{A}] = \{[a_{ij}] \mid \underline{a}_{ij} \le a_{ij} \le \overline{a}_{ij}, 1 \le i, j \le n\}, \quad (2)$$

其中: $\underline{A} = [\underline{a}_{ij}]$, $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$. 本文简称系统(1)为广

收稿日期: 2003-06-17; 修回日期: 2003-09-25.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60074007); 高等学校全国优秀博士学位论文专项基金资助项目(200240); 南京理工大学优秀博士培养对象基金项目.
作者简介: 孙敏慧(1980 —), 女, 山东平度人, 博士生, 从事广义系统、鲁棒控制等研究; 邹云(1962 —), 男, 江苏宜兴人, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统、复杂系统等研究.

义区间系统. 为描述所讨论的问题,参照文献[8]的结果,给出相关的概念.

定义 1　给定 A,对于某些有限复数 s,若矩阵对 E 和 A 满足如下正则束条件:

$$\det(sE - A) \neq 0, \tag{3}$$

则称系统(1)关于给定的 A 是正则的;若

$$\operatorname{rank} E = \deg \det(sE - A), \tag{4}$$

则称系统(1)关于给定的 A 无脉冲模. 系统(1)对于给定的 A 的稳定性,定义为式(1a)的齐次方程 $E\dot{x} = Ax(t)$ 给定的 A 是 Lyapunov 渐近稳定的.

正则束条件(3)是系统(1)关于给定的 A 存在唯一状态解的充分条件,系统无脉冲模条件(4)是约束该系统在本质上具有输入 - 状态因果特性(或称物理可实现性)的充分条件.

定义 2　如果式(1a)的齐次方程对所有满足式(2)的矩阵 A 均正则、无脉冲且稳定,则称广义区间系统(1)是鲁棒稳定的.

有了上述准备,本文所研究的问题可描述如下:

广义区间系统鲁棒 H_∞ 控制问题　给定正常数 γ,寻求状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$,使得闭环系统满足如下性能指标:

1) 当 $\omega = 0$ 时,对任意 $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$,闭环系统鲁棒稳定;

2) 对任意 $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$,有 $\|G_{zw}(\mathrm{j}w)\|_\infty \leq \gamma$,其中 $G_{zw}(s) = C(sE - A - BK)^{-1}B_1$,所涉及的范数为 H_∞ 范数.

为便于讨论,引入以下几个引理:

引理 1[4]　区间矩阵 $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ 可等价描述为 $A = A_0 + G\Sigma F, \Sigma \in \Sigma^*$,其中 $A_0 = (\underline{A} + \overline{A})/2$. 令

$$H = (\overline{A} - \underline{A})/2 = [h_{ij}],$$

$$\Sigma^* = \{\Sigma \in R^{n^2 \times n^2} \mid \Sigma = \operatorname{diag}[\varepsilon_{11}, \cdots, \varepsilon_{1n}, \cdots, \varepsilon_{n1}, \cdots, \varepsilon_{nn}], |\varepsilon_{ij}| \leq 1, 1 \leq i, j \leq n\},$$

$$G = [\sqrt{h_{11}}e_1 \cdots \sqrt{h_{1n}}e_1 \cdots \sqrt{h_{n1}}e_n \cdots \sqrt{h_{nn}}e_n],$$

$$F = [\sqrt{h_{11}}e_1 \cdots \sqrt{h_{1n}}e_n \cdots \sqrt{h_{n1}}e_1 \cdots \sqrt{h_{nn}}e_n]^{\mathrm{T}}.$$

其中:$e_i(i = 1, \cdots, n)$ 为 $n \times n$ 单位矩阵的第 i 个列向量, G 为 $n \times n^2$ 阶矩阵, F 为 $n^2 \times n$ 阶矩阵.

显然,矩阵 H 的每个元素都是非负数. 对于 $\forall \Sigma \in \Sigma^*$,有 $\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma \leq I$ 成立. 由引理 1,广义区间系统(1)可等价描述为

$$E\dot{x} = A_0 x(t) + G\Sigma F x(t). \tag{5}$$

引理 2[7]　广义系统 $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ 是正则、无脉冲且稳定的,当且仅当存在矩阵 X,使得

$$E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geq 0, A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A < 0.$$

3　主要结果

定理 1　对于广义区间动力系统(1),给定常数 $\gamma > 0$,如果存在正常数 $\varepsilon > 0$,可逆矩阵 P 和矩阵 Q 使得下述两个线性矩阵不等式成立:

$$P^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} = EP \geq 0, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} P^{\mathrm{T}}A_0^{\mathrm{T}} + Q^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + A_0P + BQ + \varepsilon GG^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} \\ CP & -I & O \\ FP & O & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

则存在状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$,使得闭环系统满足性能指标 1) 和 2). 这时可取

$$K = QP^{-1}. \tag{8}$$

为证明上述定理,首先引入如下引理:

引理 3　如果存在标量 $\varepsilon > 0$ 和矩阵 $X \in R^{n \times n}$,满足下列两个线性矩阵不等式:

$$E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geq 0, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} A_0^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A_0 & X^{\mathrm{T}}G & F^{\mathrm{T}} \\ G^{\mathrm{T}}X & -\varepsilon^{-1}I & 0 \\ F & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

则广义区间系统(1)是鲁棒稳定的.

证明

$$\begin{aligned} &A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A = \\ &A_0^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A_0 + F^{\mathrm{T}}\Sigma^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}G\Sigma F \leq \\ &A_0^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A_0 + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma F + \varepsilon X^{\mathrm{T}}GG^{\mathrm{T}}X \leq \\ &A_0^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A_0 + \varepsilon X^{\mathrm{T}}GG^{\mathrm{T}}X + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F, \\ &\qquad \forall A \in [\underline{A}, \overline{A}]. \end{aligned} \tag{11}$$

由式(10)及 Schur 补引理,有

$$A_0^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A_0 + \varepsilon X^{\mathrm{T}}GG^{\mathrm{T}}X + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F < 0. \tag{12}$$

由式(9),(12)和引理 2 知,广义区间系统(1)是鲁棒稳定的. □

定理 1 证明　令 $A_{0K} = A_0 + BK, A_K = A + BK = A_{0K} + G\Sigma F$,则

$$\begin{aligned} &P^{\mathrm{T}}A_K^{\mathrm{T}} + A_KP = \\ &P^{\mathrm{T}}A_{0K}^{\mathrm{T}} + A_{0K}P + P^{\mathrm{T}}(G\Sigma F)^{\mathrm{T}} + (G\Sigma F)P \leq \\ &P^{\mathrm{T}}A_{0K}^{\mathrm{T}} + A_{0K}P + \varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F + \varepsilon X^{\mathrm{T}}GG^{\mathrm{T}}X. \end{aligned}$$

故 $\forall A \in [\underline{A}, \overline{A}]$,有

$$\begin{aligned} &P^{\mathrm{T}}A_K^{\mathrm{T}} + A_KP + P^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CP + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} \leq \\ &P^{\mathrm{T}}A_{0K}^{\mathrm{T}} + A_{0K}P + P^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CP + \\ &\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}P^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FP + \varepsilon GG^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{13}$$

将式(8)代入(13),则式(13)右边等于

$$P^{T}A_0^{T}+Q^{T}B^{T}+A_0P+BQ+$$
$$P^{T}C^{T}CP+\gamma^{-2}B_1B_1+\varepsilon^{-1}P^{T}F^{T}FP+\varepsilon GG^{T}. \tag{14}$$

由式(7) 和 Schur 补引理知式(14) 小于 0 ,故

$$P^{T}A_0^{T}+A_0P+\varepsilon^{-1}P^{T}F^{T}FP+\varepsilon GG^{T}<0,$$
$$\forall A\in[\underline{A},\overline{A}]; \tag{15}$$
$$P^{T}A_K^{T}+A_KP+P^{T}C^{T}CP+\gamma^{-2}B_1B_1^{T}<0,$$
$$\forall A\in[\underline{A},\overline{A}]. \tag{16}$$

由式(6) ,(15) 和引理2 的证明过程知闭环系统是鲁棒稳定的. 由式(6) 知式(16) 可改写为

$$-P^{T}(sE-A_K)^{*}-(sE-A_K)P+$$
$$P^{T}C^{T}CP+\gamma^{-2}B_1B_1^{T}<0,$$
$$\forall A\in[\underline{A},\overline{A}].$$

上式两端分别左乘 $B_1^{T}[(sE-A_K)^{*}]^{-1}P^{-T}$,右乘 $P^{-1}(sE-A_K)^{-1}B_1$,并令

$$M(s)=B_1^{T}P^{-1}(sE-A_K)^{-1}B_1, \tag{17}$$

则得

$$-M(s)-M(s)^{*}+B_1^{T}[(sE-A_K)^{*}]^{-1}\times$$
$$C^{T}C(sE-A_K)^{-1}B+\gamma^{-2}M(s)^{*}M(s)<0.$$

所以

$$G_{zw}(s)^{*}G_{zw}(s)<$$
$$\gamma^2I-\gamma^2I+M(s)+M(s)^{*}-\gamma^{-2}M(s)^{*}M(s)<$$
$$\gamma^2I-[\gamma I-\gamma^{-1}M(s)]^{*}[\gamma I-\gamma^{-1}M(s)]<\gamma^2I. \tag{18}$$

即 $\|G_{zw}(\mathrm{j}w)\|_\infty\le\gamma,\ \forall A\in[\underline{A},\overline{A}]$. □

4 数值算例

考虑广义区间动力系统(1) 以及控制要求 1) 和 2) ,其中

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \underline{A}=\begin{bmatrix}-10.9&0.51\\-1.3&-0.01\end{bmatrix},$$
$$\overline{A}=\begin{bmatrix}-2.9&0.69\\0.7&0.01\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.81\\-1.9\end{bmatrix},$$
$$B_1=\begin{bmatrix}0.8\\0.05\end{bmatrix},\ C=[2\quad -0.02],\ \gamma=1.$$

显然存在

$$A=\begin{bmatrix}-8&0.6\\0&0\end{bmatrix}\in[\underline{A},\overline{A}],$$

使得系统关于 A 是非正则的,因此这个广义区间系统不是鲁棒稳定的. 容易求得

$$A_0=\begin{bmatrix}-6.9&0.6\\-0.3&0\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}4&0.09\\1&0.01\end{bmatrix},$$
$$G=\begin{bmatrix}2&0.3&0&0\\0&0&1&0.1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&0.3&0&0\end{bmatrix}^{T}.$$

根据定理1 ,计算得到式(6) 和(7) 的一个可行解为 $\varepsilon=1$,且

$$P=\begin{bmatrix}0.3020&0\\-2.1801&-0.8304\end{bmatrix},$$
$$Q=[-0.0338\quad 0.6109].$$

故可取

$$K=QP^{-1}=[-5.4230\quad -0.7356].$$

5 结 论

本文研究了广义区间动力系统的鲁棒 H_∞控制问题,首先利用LMI给出了使该系统鲁棒稳定的充分条件,该充分条件使得系统正则、无脉冲且稳定. 在此基础上,设计了状态反馈控制器,使所得的闭环系统鲁棒稳定,且满足给定的 H_∞性能指标. 与已有文献结果的不同之处在于,本文得到的鲁棒稳定判据更容易检验.

参考文献(References) :

[1] Wang K, Michel A N. Sufficient conditions for the stability of interval matrices[J]. *Systems and Control Letters*, 1993 ,20(5) :345-351.

[2] Sezer M E, Siljak D D. On stability of interval systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(2): 368-371.

[3] Soh C B. Robust stability of dynamic interval systems[J]. *Control Theory and Advanced Technology*, 1994, 10(1): 73-80.

[4] 吴方向,史忠科,戴冠中. 动态区间系统的鲁棒稳定性[J]. 控制理论与应用,2001,18(1): 113-115.
(Wu F X, Shi Z K, Dai G Z. On robust stability of dynamic interval systems[J]. *Control Theory and Applications*, 2001,18(1): 113-115.)

[5] Lin J L, Chen S J. Robust stability analysis of generalized interval systems using a structured singular value[J]. *Int J System Science*, 1998, 29(2): 199-206.

[6] 徐胜元,杨成梧. 广义区间动力系统的稳定性分析[J]. 控制理论与应用,2000, 17(2): 249-251.
(Xu S Y, Yang C W. On stability analysis of generalized interval dynamic systems[J]. *Control Theory and Applications*, 2000, 17(2): 249-251.)

[7] Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara N. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalitities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669-673.

[8] Campbell S L. *Singular Systems of Differential Equations* II[M]. London: Pitman, 1982.