

文章编号: 1001-0920(2004)06-0621-05

时滞反馈控制的局限性及其改进

陈亮, 韩正之

(上海交通大学 电子信息与电气工程学院, 上海 200030)

摘要: 研究混沌离散系统中不稳定周期轨道的镇定问题. 首先从理论上证明了具有线性结构的时滞反馈控制都具有“奇数局限性”; 然后根据线性周期时滞系统的特点, 提出一种改进的时滞反馈控制策略, 它可在一定程度上克服上述局限性; 最后给出了数值仿真结果.

关键词: 混沌控制; 时滞反馈; 稳定性; 不稳定周期轨道

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Limitation of the delayed feedback control and its modification

CHEN Liang, HAN Zheng-zhi

(School of Electronic Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China.

Correspondent: CHEN Liang, E-mail: chenliang@sjtu.edu.cn)

Abstract: The delayed feedback control (DFC), as an important method for chaos control, deserves more thorough studies. The stabilization problem of unstable periodic orbits embedded in chaotic discrete-time systems is discussed. It is shown that there exists an “odd number limitation” for stabilization when the linear delayed feedback control is used. According to the characteristic of time-delay periodic systems, a modified DFC is suggested to relax the limitation. A sufficient and necessary condition for stabilization is given. A numerical example is presented to test the theoretical results.

Key words: chaos control; delayed feedback; stability; unstable periodic orbit

1 引言

时滞反馈控制^[1]是控制混沌的一种重要理论方法和技术手段, 在混沌控制理论体系中占据着举足轻重的地位. 目前, 时滞反馈控制的研究重点集中在两点: 一是针对“奇数局限性”的研究, 即时滞反馈控制不能稳定那些具有奇数特征的不稳定周期轨道; 二是为克服这种局限性而提出的各种改进方法. 详细综述可参见文献[2].

本文从上述两个方面出发, 研究混沌离散系统中不稳定周期轨道的镇定问题. 指出具有线性结构的各种时滞反馈控制方法都具有这种“奇数局限性”, 然后根据线性周期时滞系统的特点, 提出一种改进的时滞反馈控制, 可在一定程度上克服这种局

限性.

2 线性时滞反馈控制的局限性

考虑一般混沌离散系统

$$x(k+1) = f[x(k), u(k)]. \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 是系统状态, $u \in R^l$ 是控制输入, 函数 f 可微. 控制目标是将系统稳定在其固有的不稳定 T -周期轨道 $\Gamma: = \{x^*(0), x^*(1), \dots, x^*(T)\}$ 处. 将非控系统(1) ($u(k) = 0$) 在 Γ 处线性化, 得

$$x(k+1) = G(k)x(k). \quad (2)$$

其中: $x(k) = x(k) - x^*(k)$, $G(i) = D_x f(x^*(i), 0) \in R^{n \times n}$ ($i = 0, 1, \dots, T-1$), 并且 $G(k+T) = G(k)$. 系统(2) 渐近稳定的充要条

收稿日期: 2003-05-19; 修回日期: 2003-09-05.

作者简介: 陈亮(1976—), 女(回族), 江苏常熟人, 博士生, 从事非线性系统混沌、混沌控制等研究; 韩正之(1947—), 男, 浙江慈溪人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究.

件是 $G(k)$ 的状态转移矩阵 $G(T, 0) = G(T - 1) \dots G(1) G(0)$ 的特征值均在单位圆内.

因为 T 是不稳定的,所以在对系统施加控制时,不能像一般控制方法那样直接将 T 作为反馈信号.于是 Pyragas 提出了如下时滞反馈控制:

$$u(k) = K[x(k - T) - x(k)]. \quad (3)$$

其中 $K \in R^{l \times n}$ 是反馈增益.注意到当状态 $x(k)$ 收敛到 T 时,控制作用 $u(k)$ 将消失.为改善控制器性能,人们相继提出了许多改进方法.本节将证明具有如下线性结构的时滞反馈控制都具有“奇数局限性”.

$$u(k) = \sum_{m=1}^M K_m E_m [x(k - mT), x(k)] \times [x(k - mT) - x(k)]. \quad (4)$$

其中: M 为正整数, $K_m \in R^{l \times n}$ 为增益矩阵, $E_m(x_1, x_2) \in R^{n \times n}$ 为矩阵函数.式(3)和广义时滞反馈控制^[3]及指数型时滞反馈控制^[4]均为式(4)的特殊形式.对闭环系统(1)和(4)进行局部稳定性分析,可得如下结论:

定理 1 对于在 T 处的线性化系统(2),如果状态转移矩阵 $G(T, 0)$ 有奇数个实特征值大于 1,则线性时滞反馈控制(4)不能稳定周期轨道 T .等价地,系统(1)和(4)局部渐近稳定的必要条件是

$$\det[I_n - G(T, 0)] > 0, \quad (5)$$

其中 I_n 为 $n \times n$ 单位矩阵.

证明 将闭环系统(1)和(4)在 T 处线性化,得

$$x(k + 1) = G_K(k) x(k) + \sum_{m=1}^M H_m(k) x(k - mT). \quad (6)$$

其中: $H_m(i) = D_{pf}[x^*(i), 0] K_m E_m[x^*(i), x^*(i)] (i = 0, 1, \dots, T - 1)$, 并且 $H(k + T) =$

$$H(k), G_K(k) = G(k) - \sum_{m=1}^M H_m(k). \text{ 定义}$$

$$\bar{x}(k) = [x(k) \dots x(k - MT)]^T \in R^{(MT+1)n},$$

$$\bar{G}(k) =$$

$$\begin{bmatrix} G_K(k) & 0 & H_1(k) & \dots & H_M(k) \\ I_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n(T-1)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & I_{n(T-1)} & 0 \end{bmatrix}.$$

则式(6)可变为

$$\bar{x}(k + 1) = \bar{G}(k) \bar{x}(k). \quad (7)$$

其状态转移矩阵为

$$\bar{G}(T, 0) = \bar{G}(T - 1) \dots \bar{G}(1) \bar{G}(0) = \begin{bmatrix} G_K(T, 0) & V_1(T) & \dots & V_M(T) \\ W(T) & X_1(T) & \dots & X_M(T) \\ 0 & I_{Tn} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I_{Tn} & 0 \end{bmatrix}_{\substack{(MT+1)n \times \\ (MT+1)n}}$$

其中

$$W(T) = \begin{bmatrix} G_K(T - 1, 0) \\ W(T - 1) \end{bmatrix}_{Tn \times n}, W(1) = I_n;$$

$$X_m(T) = \begin{bmatrix} 0 & V_m(T - 1) \\ 0 & X_m(T - 1) \end{bmatrix}_{Tn \times Tn}, X_m(1) = 0;$$

$$V_m(T) = [H_m(T - 1), G_K(T, T - 1) V_m(T - 1)]_{n \times Tn},$$

$$V_m(1) = H_m(0).$$

于是,式(7)的特征多项式为

$$F(z, K_m, E_m) = \det[zI_{(MT+1)n} - \bar{G}(T, 0)].$$

当 $z = 1$ 时,有

$$F(1, K_m, E_m) = \det[I_{(MT+1)n} - \bar{G}(T, 0)].$$

按如下方式分割矩阵:

$$I_{(MT+1)n} - \bar{G}(T, 0) = \begin{bmatrix} I_n - G_K(T, 0) & -P(T)_{n \times MTn} \\ -Q(T)_{MTn \times n} & U(T)_{MTn \times MTn} \end{bmatrix}.$$

其中

$$P(T) = (V_1(T), V_2(T), \dots, V_M(T)),$$

$$Q(T) = (W(T), 0, \dots, 0),$$

$$U(T) =$$

$$\begin{bmatrix} I_{Tn} - X_1(T) & -X_2(T) & \dots & -X_M(T) \\ -I_{Tn} & I_{Tn} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -I_{Tn} & I_{Tn} \end{bmatrix}.$$

则

$$F(1, K_m, E_m) = \det[U(T)] \det[I_n - G_K(T, 0) - P(T) U^{-1}(T) Q(T)] = \det[I_{Tn} - \sum_{m=1}^M X_m(T)] \det[I_n - G_K(T, 0) - P(T) U^{-1}(T) Q(T)]. \quad (8)$$

因为

$$\det[I_n - \sum_{m=1}^M X_m(1)] = 1,$$

$$j = r, r + 1, \dots, r + T - 1.$$

则 $z = 0$. 令

$$z = [A(j + 1 + T, j + 1) - I_n] \tilde{z},$$

代入上式并注意到

$$\begin{aligned} & A(r + T, j + 1) \times \\ & [A(j + 1 + T, j + 1) - I_n] = \\ & [A(j + 1 + T, j + 1) - I_n] \times \\ & A(r + T, j + 1), \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} & A(r + T, r) \tilde{z} = \tilde{z}, \\ & [A(r + T, j + 1) \tilde{B}(j)] \tilde{z} = 0 \\ & j = r, r + 1, \dots, r + T - 1. \end{aligned}$$

并且 $z = 0$ 与 $\tilde{z} = 0$ 等价的充要条件是

$$\det[A(j + 1 + T, j + 1) - I_n] \neq 0, \quad j = r, r + 1, \dots, r + T - 1.$$

因为 A 为 T 周期矩阵, 所以上式等价于

$$\det[A(k + T, k) - I_n] \neq 0, 0 \leq k < T.$$

基于上述两个引理, 可得如下结论:

定理 2 如果 $[A(k), B(k)]$ 是完全可达对, 则存在 T 周期反馈增益 $K(k)$, 使得系统(11) 在控制器

$$u(k) = K(k) \left\{ A(k + T, k) e(k) - \sum_{i=k-T+1}^k A(k, i) B(i - 1) u(i - 1) \right\} \quad (14)$$

作用下, 局部渐近稳定的充要条件是

$$\det[A(k + T, k) - I_n] \neq 0, 0 \leq k < T. \quad (15)$$

证明略.

下面讨论混沌系统(1) 不稳定周期轨道的镇定问题. 将系统(1) 在 $[x(k - T), u(k - T)]$ 处泰勒展开, 得

$$\begin{aligned} x(k + 1) = & f[x(k - T), u(k - T)] + \\ & A(k)[x(k) - x(k - T)] + \\ & B(k)[u(k) - u(k - T)] + \psi(k). \end{aligned} \quad (16)$$

其中: $\psi(k) = [x(k) - x(k - T), u(k) - u(k - T)]$, $\psi(k)$ 是关于 ψ 的高阶无穷小项; 另外,

$$x(k + 1 - T) = f[x(k - T), u(k - T)]. \quad (17)$$

式(16) 减式(17), 得

$$\begin{aligned} e(k + 1) = & A(k) e(k) + B(k)[u(k) - \\ & u(k - T)] + \psi(k), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $e(k) = x(k) - x(k - T)$. 在局部稳定中,

$A(k)$ 和 $B(k)$ 可近似看作 T -周期矩阵. 假设 $\psi(k)$ 在 $\psi = 0$ 附近 Lipschitz 连续, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0$. 由 Poincare-Lyapunov 定理^[6] 知, 当控制器为式(14) 时, 系统(11) 的渐近稳定等价于系统(18) 在 $e(k) = 0$ 附近渐近稳定, 即如果选取如下反馈控制:

$$u(k) = K(k) \left\{ A(k + T, k) [x(k) - x(k - T)] - \sum_{i=k-T+1}^k A(k, i) B(i - 1) u(i - 1) \right\}, \quad (19)$$

则系统(1) 将实现不稳定周期轨道的局部镇定, 而且镇定条件(15) 在很大程度上放宽了线性时滞反馈控制的镇定条件(5).

为验证上述方法的有效性, 现给出仿真实例. 考虑如下混沌映射:

$$x(k + 1) = 3x(k)[1 - x^2(k)] + u(k),$$

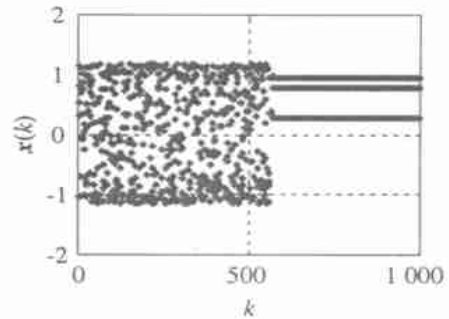
系统有 3 个周期轨道

$$\begin{aligned} \mathcal{S} := & \{x^*(0), x^*(1), x^*(2)\} = \\ & \{0.953\ 0, 0.276\ 3, 0.765\ 7\}. \end{aligned}$$

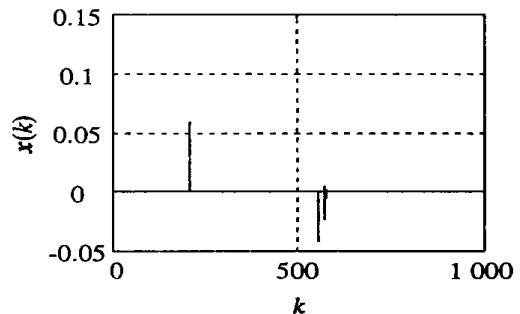
在 \mathcal{S} 处将系统线性化, 得

$$x(k + 1) = A(k) x(k) + u(k).$$

其中: $A(k) = 3 - 9x^*(r)$, $r = k \pmod{3}$. 根据定理 1 知, 线性时滞反馈控制(4) 不能镇定 \mathcal{S} . 现对系统施加控制(19), 3 -周期反馈增益 $K(k)$ 取



(a) 系统状态变化



(b) 控制输入变化

图 1 系统的动力行为

$$K(0) = - A(0) / [A(0) A(2) A(1) - 1],$$

$$K(1) = 0, K(2) = 0.$$

为不改变混沌吸引子中不稳定周期轨道的属性,在实际应用中,通常当 $x(k) - x(k - T) < \epsilon$ 时才施加控制,这里 ϵ 为小的正数.

图 1 显示了系统的动力行为,其中 $x(0) = -0.5, u(0) = 0.015$. 由图可以看出,系统最终稳定在 3-周期轨道 x_3 处,而且控制输入 $u(k)$ 收敛到 0.

4 结 论

文献[4]根据 Floquet 理论,研究了连续时滞反馈控制的稳定品质. 本文则重点讨论混沌离散系统中不稳定周期轨道的镇定问题,指出具有线性结构的时滞反馈控制方法同样具有奇数局限性,从而在这一点上实现了离散与连续时滞反馈控制理论统一. 另外,本文从线性周期时滞系统的特点出发,提出一种改进的时滞反馈控制策略,给出了控制器设计的系统方法. 理论和仿真均表明,这种方法可在很

大程度上克服线性时滞反馈控制的稳定局限性.

参考文献 (References) :

[1] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback[J]. *Physics Letters A*,1992,170:421-428.

[2] 陈亮,韩正之. 混沌系统时滞反馈控制综述[J]. *控制与决策*,2004,19(1):1-6.
(Chen Liang, Han Zhengzhi. A survey on time-delayed feedback control for chaotic systems[J]. *Control and Decision*,2004,19(1):1-6.)

[3] Socolar J E S, Sukow D W, Gauthier D J. Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamic systems[J]. *Physical Review E*,1994,50(4):3245-3248.

[4] Nakajima H, Ueda Y. Limitation of generalized delayed feedback control[J]. *Physics D*,1998,111:143-150.

[5] Hernandez V, Urbano A. Pole-assignment problem for discrete-time linear periodic systems[J]. *Int J of Control*,1986,46(2):687-697.

[6] Verhulst F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems* [M]. 2nd Edition. Berlin Springer-Verlag,1996.

(上接第 620 页)

7 结 论

本文提出一类基于神经网络的 H_∞ 自适应跟踪控制系统的设计问题. 与一般的非线性控制方法相比,这种方法能克服非线性系统中未建模不确定外部扰动带来的影响,对于解决一类非线性系统的设计问题具有实际意义. 倒立摆小车仿真示例验证了新方法的实用性.

参考文献 (References) :

[1] Yang G H, Weng J L, Soh Y C. Reliable guaranteed cost control for uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*,2000,45(11):2188-2192.

[2] Lewis F L, Yesidirek A, Liu K. Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*,1996,7(2):388-399.

[3] Calise D Enns, Elgersma M, Vougaris P. Direct adaptive reconfigurable control of a tailless advanced fighter aircraft

[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control* [J]. 1999,14(9):999-1012.

[4] McFarland M B, Calise A J. Multilayer neural networks and adaptive control of agile anti-air missiles[A]. *Presented at AIAA GNC Conf*[C]. New Orleans,1997. 1-10.

[5] Tanaka K. An approach to stability criteria of neural-network control systems[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*,1996,7(3):629-642.

[6] Limanond S, Si J. Neural-network-based control design: An LMI approach[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*,1998,9(6):1422-1429.

[7] Choi H H, Chung M J. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control[J]. *Automatica*,1995,31(6):917-919.

[8] Su W Z, De Souza C E, Xie L H. H_∞ control for asymptotically stable nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*,1999,44(4):1188-1191.

