

文章编号: 1001-0920(2004)07-0787-04

离散时间奇异系统的可测扰动解耦

周玉成, 程放, 范留芬, 陈勇平, 安源
(中国林业科学研究院 木材工业研究所, 北京 100091)

摘要: 为离散时间广义非线性控制系统的可测扰动提供一种反演算法. 运用一类正则动态补偿器解决了系统的解耦问题, 并且证明系统既可利用动态反馈进行解耦, 也可利用拟静态反馈进行解耦.
关键词: 离散时间; 非线性控制系统; 扰动解耦; 线性迭代方法; 拟静态状态反馈
中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Dynamic measurable disturbance decoupling for discrete time singular nonlinear systems

ZHOU Yu-cheng, CHEN G Fang, FAN Liu-fen, CHEN Yong-ping, AN Yuan

(Institute of Wood Industry, Chinese Academy of Forestry, Beijing 100091, China Correspondent: ZHOU Yu-cheng, E-mail: Zhouyc@forestry.ac.cn)

Abstract: A linear algebraic solution of the dynamic disturbance decoupling problem for a singular discrete-time nonlinear system is presented. The solution is to be searched in the class of regular dynamic compensators. Moreover, it is proved that if the disturbance decoupling problem is solvable by a dynamic state feedback, then it is solvable by a quasi-static feedback.

Key words: discrete time; nonlinear systems; disturbance decoupling; linear algebraic methods; quasi-static feedback

1 引言

本文讨论一类离散时间非线性奇异控制系统的可测扰动解耦问题. 对于这类非线性奇异系统的不可测扰动解耦, 作者已给出了其解存在的充要条件和具体的求解方法^[1], 即借助于动态补偿器, 在扰动和扰动输出之间完成系统的解耦.

关于离散时间非线性奇异控制系统的可测扰动解耦, 其情况要复杂些. 对于非线性系统, 如果动态扰动解耦是可解的, 则可使用状态反馈来解决^[2]. 这一问题已扩展到连续时间系统^[3-5]. 对于离散时间的情况, 这一问题的全部解是利用反演算法, 使得出现确定的显函数或不变指数, 最后表示成公式解^[6]. 事实上, 由反演算法所定义的不变指数是系统内在

特性或算法独立系统的整数参数^[7].

2 问题描述

考虑系统 Σ :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), z(k), u(k), w(k)), \\ g(x(k), z(k), u(k)) = 0, \\ y(k) = h(x(k)). \end{cases} \quad (1)$$

其中: 状态变量 $x(k) \in X^0 \subset R^n$, 约束变量 $z(k) \in Z \subset R^l$, 控制变量 $u(k) \in U \subset R^m$, 扰动变量 $w(k) \in W \subset R^r$, 输出变量 $y(k) \in Y \subset R^p$, $p \leq m$; 映射 $f: X \times Y \times Z \times U \times W \rightarrow R^s$ ($s \leq n$), $g: X \times Z \times U \rightarrow R^q$ ($q \leq n$), $h: X \rightarrow R^p$ 是光滑的, 即 f, g, h 的任意阶导数存在且连续.

收稿日期: 2003-12-16; 修回日期: 2004-03-03

基金项目: 国家 863 计划基金项目(2002AA 245101); 国家 937 计划基金项目(G1999016001).

作者简介: 周玉成(1958—)男, 山东章丘人, 副研究员, 博士, 从事奇异系统、鲁棒控制等研究; 程放(1956—), 男, 辽宁鞍山人, 研究员, 从事木材工业自动化等研究.

利用作者使用的特殊算法^[8],可将系统化为

$$x(k+1) = f(x(k), T_1(k), T_2(k), \dots, T_{\alpha-1}(k), w, \dots, \sigma^{\alpha-1}w, v(k)).$$

简写为

$$x(k+1) = f(\bar{x}, v(k), \bar{w}).$$

不失一般性,原系统可写成

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), w(k)), \\ y(k) = h(x(k)). \end{cases} \quad (2)$$

3 主要结果

通过上述运算可将离散时间奇异系统变换成如下形式:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t), w(t)), x(0) = x_0, \\ y(t) = h(x(t)). \end{cases} \quad (3)$$

其中:状态变量 $x(t) \in X^0 \subset R^n$, 控制变量 $u(t) \in U \subset R^m$, 扰动变量 $w(t) \in W \subset R^r$, 输出 $y(t) \in Y \subset R^p$, 这里 X^0, U, W 分别是 R^n, R^m, R^r 的开集, Y 是 R^p 中的开邻域, 映射 $f: X \times U \times W \rightarrow X, h: X \rightarrow Y$ 是解析的, 即任意阶导数存在且连续

本文在子空间 $X^0 \times U \times W$ 内的点 (x^0, u, w) 开稠子集 O 上展开讨论 为解决系统的扰动解耦问题, 在运用迭代算法之前需作如下约定:

令 R 为变量 $\{x(0), u(t), w(t), t \geq 0\}$ 有限数的解析函数环, k 是它的伴随商域, 即变量 $\{x(0), u(0), w(0), t \geq 0\}$ 均为有限数的亚纯函数域

映射 $f(\cdot)$ 定义了一个浸入, 即

$$\text{rank}_k \hat{\sigma} / \partial(x, u) = n.$$

上述域 k 可定义为如下形式的向量空间:

$$\epsilon = \text{span}_k \{d\varphi, \varphi \in k\}.$$

空间 ϵ 可表示成 3 个子空间之和, 即 $\epsilon = X \oplus U \oplus W$. 其中

$$\begin{cases} X = \text{span}_k \{dx(0)\}, \\ U = \text{span}_k \{du(k), k \geq 0\}, \\ W = \text{span}_k \{dw(k), k \geq 0\}. \end{cases} \quad (4)$$

定义不同的输出空间

$$y = \text{span}_k \{dy(k), k \geq 0\}. \quad (5)$$

由式(3)可知, $y \subset \epsilon = X \oplus U \oplus W$. 在迭代运算中, 需用到位移算子 $\delta: R \rightarrow R$, 有如下定义:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}_x(0), u(j), w(k) &= \\ \mathcal{R}_f(x(0), u(0), w(0)), u(j+1), w(k+1). \end{aligned}$$

算子 δ 可导出算子 $\Delta: \epsilon \rightarrow \epsilon$, 有

$$\Delta \left(\begin{matrix} a_i d\varphi \\ \vdots \\ \delta a_i d(\delta \mathcal{R}), a_i, \varphi \in k \end{matrix} \right).$$

与不可测扰动的情况相似, 当扰动变量为可测时, 离散时间非线性系统的解耦过程也要用补偿器

(动态状态反馈) 去控制系统 Σ 此补偿器可用离散时间非线性系统方程描述为

$$\begin{cases} z(t+1) = \\ \Psi(z(t), x(t), v(t), w(t)), z(0) = z_0; \\ u(t) = \mathcal{Q}_z(z(t), x(t), v(t), w(t)). \end{cases} \quad (6)$$

其中: 状态 $z(t) \in R^n$, 新控制 $v(t) \in R^m, \Psi(\cdot)$ 和 $\mathcal{Q}(\cdot)$ 是解析函数

本文用 C 表示补偿器 与不可测扰动情况相比, C 除反馈外还包含了前馈 $w(k)$. 在这种情况下, 解耦条件比扰动为不可测时的条件弱一些

方程(6)所描述的补偿器 C 是正则的, 如果动态系统

$$\begin{cases} x(t+1) = \\ f(x(t), \mathcal{Q}_z(z(t), x(t), v(t)), w(t)), \\ z(t+1) = \Psi(z(t), x(t), v(t), w(t)), \\ u(t) = \mathcal{Q}_z(z(t), x(t), v(t), w(t)). \end{cases} \quad (7)$$

输出 $v(t)$ 和输出 $u(t)$ 是可逆的 闭环系统(3)和(6)在初始点处 (x_0, z_0) 用 Σ_C 表示 对于闭环系统 Σ_C , 定义 $V = \text{span}_k \{dv(k), k \geq 0\}, Z = \text{span}_k \{dz(0)\}$.

定义 1 在不可测扰动的情况下, 系统 Σ 的正则动态扰动解耦问题是可解的, 如果能找到形如式(6)的正则动态反馈, 使得闭环系统 Σ_C 的输出空间 y^* 满足 $y^* \subset Z \oplus X \oplus V$.

3.1 扰动系统的反演算法

Kotta^[9] 给出了离散时间非线性系统含扰动情况的反演算法解, 它涉及到非线性方程的求解问题 给出另一种形式的算法解, 即用微分 $dy(t)$ 代替输出的线性计算 考虑扰动系统迭代的两种方式: 1) 运用迭代时将控制和扰动看作两个输入; 2) 运用迭代时将扰动作为参数 如果定义 $v(u, w)$, 则将第 1 种迭代应用到系统 Σ , 这恰好是 Grizzle^[2] 给出的相对于 v 的迭代算法 本文对系统 Σ 采用第 2 种反演迭代方式 记

$$\begin{aligned} \hat{d}y(0) &= dy(0) = \\ \frac{\partial y}{\partial x(0)} dx(0) &= \bar{a}_0(x(0)) dx(0). \end{aligned}$$

Step1 计算

$$\begin{aligned} \hat{d}y(1) &= \bar{\delta a}_0(x(0)) dx(1) = \\ \bar{a}_0(f(x(0), u(0), w(0))) \times \\ \left[\frac{\partial f}{\partial x(0)} dx(0) + \frac{\partial f}{\partial u(0)} du(0) + \frac{\partial f}{\partial w(0)} dw(0) \right] &= \\ a_1 dx(0) + b_1 du(0) + c_1 dw(0), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $a_1, b_1, c_1 \in k$ 定义 $\rho_1 = \text{rank}_k b_1$, 重排 $y(1)$ 的分量, 使 b_1 的 ρ_1 排线性独立, 并将 $y(1)$ 分解成

$$d\tilde{y}_1(1) = \tilde{a}_1 dx(0) + \tilde{b}_1 du(0) + \tilde{c}_1 dw(0),$$

$$\hat{d}y_1(1) = \hat{a}_1 dx(0) + \hat{b}_1 du(0) + \hat{c}_1 dw(0).$$

其中 $\hat{y}_1(1)$ 有 ρ_1 个元素 因为 \hat{b}_1 的行是关于 \hat{b}_1 的行, 因此在 k 中存在矩阵 $M_{-1}(x(0), u(0), w(0))$, 满足 $\hat{b}_1 = M_{-1} \hat{b}_1$, 且有

$$d\hat{y}_1(1) = \hat{a}_1 dx(0) + \hat{c}_1 dw(0) + \hat{e}_1^T d\hat{y}_1(1). \quad (9)$$

Step $k+1$ ($k \geq 0$) 假定按 Step 1 的作法经过第 k 步, $\hat{y}_1(1), \hat{y}_2(2), \dots, \hat{y}_k(k), y_k(k)$ 具有如下定义:

$$d\hat{y}_1(1) = \hat{a}_1 dx(0) + \hat{b}_1 du(0) + \hat{c}_1 dw(0),$$

⋮

$$d\hat{y}_k(k) = \hat{a}_k dx(0) + \hat{b}_k du(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{c}_k^T dw(j) + \sum_{i=1}^{k-1} \hat{e}_k^{ij} d\hat{y}_i(j),$$

$$d\hat{y}_k(k) = \hat{a}_k dx(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{c}_k^T dw(j) + \sum_{i=1}^{k-1} \hat{e}_k^{ij} d\hat{y}_i(j).$$

定义 $B_k = (\hat{b}_1^T, \dots, \hat{b}_k^T)^T$, 并令 $\rho_k = \text{rank} B_k$ 计算

$$d\hat{y}_k(k+1) = a_{k+1} dx(0) + b_{k+1} du(0) + \sum_{j=0}^k \hat{c}_{k+1}^T dw(j) + \sum_{i=1}^k \hat{e}_{k+1}^{ij} d\hat{y}_i(j+1). \quad (10)$$

并且定义 $\rho_{k+1} = \text{rank} [B_k^T, b_{k+1}^T]^T$. 重排 $\hat{y}_k(k+1)$ 的分量, 使得矩阵 $[B_k^T, b_{k+1}^T]^T$ 的第 ρ_{k+1} 排线性独立 分解 $\hat{y}_k(k+1)$, 使得

$$\begin{aligned} d\hat{y}_{k+1}(k+1) &= \hat{a}_{k+1} dx(0) + \hat{b}_{k+1} du(0) + \sum_{j=0}^k \hat{c}_{k+1}^T dw(j) + \sum_{i=1}^{k+1} \hat{e}_{k+1}^{ij} d\hat{y}_i(j), \\ d\hat{y}_{k+1}(k+1) &= \hat{a}_{k+1} dx(0) + \hat{b}_{k+1} du(0) + \sum_{j=0}^k \hat{c}_{k+1}^T dw(j) + \sum_{i=1}^{k+1} \hat{e}_{k+1}^{ij} d\hat{y}_i(j). \end{aligned}$$

其中 $\hat{y}_{k+1}(k+1)$ 有 $\rho_{k+1} - \rho_k$ 个元素 记 $B_{k+1} = [B_k^T, b_{k+1}^T]^T$. 因为 b_{k+1} 排与 B_{k+1} 排相关, 因此在 k 内存在矩阵 M_{k+1} , 满足 $b_{k+1} = M_{k+1} B_{k+1}$, 使得

$$d\hat{y}_{k+1}(k+1) = \hat{a}_{k+1} dx(0) + \sum_{j=0}^k \hat{c}_{k+1}^T dw(j) + \sum_{i=1}^{k+1} \hat{e}_{k+1}^{ij} d\hat{y}_i(j). \quad (11)$$

第 Step $k+1$ 步结束

3.2 线性迭代解

Kotta 利用反演算法, 通过确定函数给出了动态不可测扰动解耦问题可解的充分必要条件, 对其

证明稍加修改, 可将这一结果描述成如下定理:

定理 1 假定非线性系统是一般浸入, 则系统 (3) 的正则动态可测扰动解耦问题几乎处处可解, 当且仅当 $k \geq 0$ 时, 有

$$d\hat{y}_k^u(k+1) = \hat{a}_k dx(0) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^k \hat{e}_k^{ij} d\hat{y}_i^u(j). \quad (12)$$

条件 (12) 说明对于每个 k , 在反演迭代的第 k 步, 函数 $\hat{y}_k^u(k)$ 不依赖于 $\{w(j), 0 \leq j \leq k\}$. 与不可测的情况相似, 本文给出与条件 (12) 等价的条件

命题 1 下述两个条件是等价的:

1) 对于 $k \geq 0$, 有

$$d\hat{y}_k^u(k+1) = a_{k+1} dx(0) + b_{k+1} du(0) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^k \hat{e}_{k+1}^{ij} d\hat{y}_i^u(j+1);$$

2) $\Delta(X \oplus Y) \subset X \oplus U$.

命题 1 的证明实际上是说, 对于系统 (3) 控制 u 应用反演算法, 导出了子空间 $(X \oplus W) \oplus Y$ 的一组基

引理 1^[9]

$$\begin{aligned} &(X \oplus W) \oplus Y, \\ &\text{span}_k \{d\hat{y}_k^u(k) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k \hat{e}_k^{ij} d\hat{y}_i^u(j), k \geq 0\} = \\ &\text{span}_k \{\hat{a}_k dx(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \hat{c}_k^T dw(j), k \geq 0\}. \end{aligned}$$

由引理 1, 命题 1 条件 2) 可写成

$$d\hat{y}_k^u(k) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k \hat{e}_k^{ij} d\hat{y}_i^u(j) = \hat{a}_k dx(0). \quad (13)$$

因此可得出如下结果:

定理 2 假定非线性系统 Σ 是一般浸入, 则系统可测扰动的正则动态扰动解耦问题可解, 当且仅当

$$\Delta(X \oplus W) \subset Y. \quad (14)$$

3.3 拟静态状态反馈

离散时间系统的拟静态状态反馈 u , 是由状态空间 x 和新控制 v 所描述的, 一般写成

$$u(t) = \mathcal{Q}x(t), v(t), v(t+1), \dots, v(t+\beta), \quad (15)$$

$$v(t) = \xi(x(t), u(t), u(t+1), \dots, u(t+\beta)). \quad (16)$$

只有式 (15) 才可用于综合反馈, 式 (16) 只反映反馈的性质 本文作出的 u 不包括动态条件 ($\beta = 0$), 因此所选用的反馈是静态反馈 下面给出可测扰动反馈的选取方法

定理 3 对于一般浸入非线性系统 Σ , 在可测扰动的情况下, 选取形如式 (15) 和 (16) 的反馈能够

解耦, 当且仅当条件(14) 成立

证明 充分性: 条件(14) 保证了应用反演算法到 Σ , 相对于控制 u 给出了算法(最后的) 第 α 步, 即

$$\begin{aligned} dy_1^u(1) &= \tilde{a}_1 dx(0) + \tilde{b}_1 du(0), \\ &\vdots \\ dy_\alpha^u(\alpha) &= \tilde{a}_\alpha dx(0) + \tilde{b}_\alpha du(0) + \\ &\quad \sum_{j=1}^{\alpha-1} \tilde{e}_\alpha^j dy_j^u(j). \end{aligned}$$

经过输入的重排, 得到关于 $du^1 = (du_1, \dots, du_{p^*})^T$ 的唯一解, 定义 $du^2 = (du_{p^*+1}, \dots, du_m)^T$. 即在每处几乎都存在函数 \mathcal{Q} 和 A_a , 满足局部的

$$\begin{aligned} u^1(t) &= \mathcal{Q}_x(t), y_i^u(t+j), u^2(t), \\ &\quad \begin{matrix} 1 & i & \alpha & i & j & \alpha \\ \left[\begin{array}{c} \tilde{y}_1^u(t+1) \\ \vdots \\ \tilde{y}_\alpha^u(t+\alpha) \end{array} \right] & = & \\ A_a[x(t), \mathcal{Q}^*, u^2(t), \tilde{y}_k^u(t+l)], \\ &\quad \begin{matrix} 1 & k & \alpha-1, k+1 & l & \alpha \end{matrix} \end{matrix} \end{aligned} \quad (17)$$

现用下述方法构成形如式(15) 的拟静态状态反馈:

$$\begin{cases} u^1(t) = \mathcal{Q}_x(t), \tilde{v}_i(t+r), v^2(t), \\ u^2(t) = v^2(t). \end{cases} \quad (18)$$

其中: $1 \leq i \leq \alpha, 0 \leq r \leq \alpha - i$

由式(17) 得出补偿器(18) 应用于 Σ , 对于 $k = 1, \dots, \alpha$ 可导出

$$\tilde{y}_k^u(t+k) = \tilde{v}_k(t), t \geq 0$$

对于 $k = 0$, 有

$$dy_k^u(k) = \sum_{j=1}^k \tilde{e}_k^j dy_j^u(j) = X.$$

因此用反馈(18) 便解决了扰动解耦问题

必要性: 假定条件(14) 不成立, 即对某些 $k > 0$, $y_k^u(t+1)$ 依赖于 w . 为记法简单, 假定 $k = 0$ (k 为其他值时证明相似), 则有

$$dy_0(1) = a_1 dx(0) + b_1 du(0) + c_1 dw(0). \quad (19)$$

因此状态反馈(15) 解决了系统 σ 的扰动解耦问题. 在这种情况下, 式(19) 已不依赖于 w , 如果在式(19) 中用式(15) 的右端代替 μ , 则式(15) 不依赖于 w 是不可能的, 除非式(15) 施加约束 $c_1(x, u, w) = 0$ 但与式(16) 矛盾. 从而必要性得证.

4 结 语

比较定理 2 和定理 3 的条件可得出结论: 对于一般浸入的非线性系统 Σ , 在扰动可测的情况下, 经由拟静态状态反馈可解, 当且仅当系统可被正则动态状态反馈解耦. 对于系统 Σ 动态扰动的可解性, 本文给出了利用线性迭代求解的充要条件, 并且证明了用拟静态状态反馈与用动态状态反馈解耦的条件是等价的. 利用本文的算法解耦, 在实际应用中更加有效.

参考文献(References):

- [1] 周玉成, 刘晓平. 一类离散时间广义非线性控制系统的动态不可测扰动解耦[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(1): 8-13.
- [2] Grizzle J W. A linear algebraic framework for the analysis of discrete-time nonlinear systems[J]. *SIAM J Contr and Optimiz a*, 1993, 1026-1044.
- [3] Respondek W. Disturbance decoupling via dynamic feedback [A]. *Controlled Dynamical Systems* [C]. Boston: Birkhauser, 1991. 347-357.
- [4] Huijberts H J C. A nonregular solution of the nonlinear disturbance decoupling problem with an application to a complete solution of the nonlinear model matching problem [J]. *SIAM J Contr and Optimiz*, 1992, 30(8): 350-366.
- [5] Pereira da Silva P S, Pinto Leite V M. Disturbance decoupling by regular for affine nonlinear systems: A linear algebraic approach [A]. *12th IFAC World Congress* [C]. Sydney, 1993. 387-390.
- [6] Moog C H, Perdon A M, Conte G. Model matching and factorization for nonlinear systems: A structural approach [J]. *SIAM J Control and Optimiz*, 1991, 29(7): 769-785.
- [7] Fliegner T, Nijmeijer H. Dynamic disturbance decoupling for nonlinear discrete-time systems [A]. *Proc 33rd IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Buena Vista, 1994. 2: 1790-1791.
- [8] 周玉成, 韩杰, 刘晓平. 一类隐含离散时间的非线性系统的精确线性化[J]. 控制与决策, 1998, 13(3): 317-321. (Zhou Y C, Han J, Liu X P. Exact linearization of a class of implicit discrete-time nonlinear singular systems [J]. *Control and Decision*, 1998, 13(3): 317-321.)
- [9] Kotta U. Dynamic disturbance decoupling for discrete-time nonlinear systems: The nonsquare and noninvertible case [J]. *Phys Math*, 1992, 41(7): 14-22.