第19卷 第7期 控 制 与 决 策 2004年7月
Vol 19 No. 7 Control and Decision July 2004

文章编号: 1001-0920(2004)07-0720-04

部分信息下极大终止时期望对数效用及价值测算

杨招军, 黄立宏
(湖南大学 数学与计量经济学院, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 研究部分信息下极大化终止时刻期望对数效用的最优投资策略问题. 代替随机动态规划方法, 利用 Itô 公式及非线性滤波技术, 直接导出了部分信息下最优投资策略的显式解, 并给出了简洁的信息价值测算公式.

关键词: 投资; 非线性滤波; 对数效用; 信息价值
中图分类号: O 231. 4 **文献标识码**: A

Maximizing the expected logarithmic utility from terminal wealth under the partial information and the valuation of information

YANG Zhao-jun, HUANG Li-hong
(College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082, China. Correspondent: YANG Zhao-jun, E-mail: zjyang@hnu.cn)

Abstract: The problem of maximizing the expected logarithmic utility from terminal wealth under the case of partial information is dealt with. An explicit solution to the optimal strategy is presented by means of the nonlinear filter and Itô's formula. A concise formula is proposed for the valuation of information.

Key words: investment; nonlinear filter; logarithmic utility; valuation of information

1 引 言

投资本质上可分为风险投资和无风险投资, 如何分配风险资产与无风险资产的投资比例, 是投资者经常需要面对的问题. 在完备信息假设下, 对于投资者极大化终止时刻期望效用问题已有较系统的研究[1]. 但是, 完备信息假定风险资产价格动态方程中的布朗运动 W 及漂移系数是可直接观测的, 显然这不符合实际, 因为二者是建模时虚构的数量. 或者说, 投资者所掌握的信息流不可能是布朗运动 W 生成的 σ-域流 $\{F_t\}_{0\le t\le T}$ (完备信息), 而是其中的一部分, 即过去观测到的价格所生成的信息流 $\{G_t\}_{0\le t\le T}$ (部分信息), 故只有 $\{G_t\}_{0\le t\le T}$-适应的过程才是可观测的, 投资者的决策依据是信息流 $\{G_t\}_{0\le t\le T}$. Lakner[2,3] 运用鞅方法, 在部分信息条件下取得了重要进展, 但文献[2]没有给出最优投资策略, [3]假定漂移过程是具有均值保持特性的 Ornstein-Uhlenbeck 过程, 且二者均未研究信息价值测算问题; [4]和[5]分别得到了投资者极大化生命期期望消费效用的策略, [5]还进一步研究了信息价值测算.

与上述内容不同, 本文研究的是部分信息下极大化终止时刻期望对数效用及信息价值测算问题. 建立了部分信息下的投资模型, 并运用非线性滤波技术, 给出风险资产平均收益率的最优估计. 利用 Itô 公式, 导出对数效用时的显式解, 并进一步提供了一个简单的信息价值计算公式.

收稿日期: 2003-07-14; **修回日期**: 2003-10-29.
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(04JJ3009).
作者简介: 杨招军(1964—), 男, 湖南邵阳人, 教授, 博士后, 从事金融数学、金融工程的研究; 黄立宏(1963—), 男, 湖南岳阳人, 教授, 博士, 从事金融数学、微分方程动力系统的研究.

2 部分信息下的投资模型

考虑在时间段$[0, T]$内组合投资问题, 投资者面临的经济环境是不确定的, 它随着时间的变化而变化. 为刻画这种随机环境, 引入概率空间$\{\Omega, F, P\}$, 其中每个$\omega \in \Omega$代表直到时刻T才最终确定的一个经济状态. 假设市场上有两种资产, 价格动态方程为

$$\begin{cases} dB_t = r_t B_t dt, \\ dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

其中随机过程$W = \{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$为布朗运动. 记

$$F_t = \sigma(W_u; 0 \leq u \leq t),$$
$$G_t = \sigma(S_u; 0 \leq u \leq t).$$

过程$\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq T}$为$\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$-适应的; 过程$\{r_t\}_{0 \leq t \leq T}$, $\{\sigma_t\}_{0 \leq t \leq T}$为$\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$-适应的.

以往均假设投资者所掌握的信息流是$\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$, 即投资者可观测到布朗运动及风险资产平均收益率在过去的所有取值, 显然这不合实际. 事实上, 投资者所观测到的只是过去的资产价格, 即所掌握的信息流应为$\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$, 从而必须对平均收益率进行估计. 对此, 进一步假设$\sigma_t \equiv \sigma$(常数) > 0, 过程$\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq T}$满足随机微分方程(状态方程)

$$d\mu_t = a\mu_t dt + b dW_t, 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

其中a和b为标量常数.

设投资者具有初始财富X_0, 采用自融资交易策略. 假设在任意时刻t, 投资者将比例为π_t的财富$\pi_t X_t$购买风险资产, 其余全部投资于无风险资产, 则其财富过程X是如下随机微分方程的解:

$$dX_t = [r_t + \pi_t(\mu_t - r_t)]X_t dt + \sigma\pi_t X_t dW_t, 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

考虑到部分信息, 过程$\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq T}$必须是$\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$-适应的. 综上所述, 投资选择问题可叙述为

$$\max_{\{\pi_t\}_{0 \leq t \leq T}} E[U(X_T)]. \tag{4}$$

约束条件

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ d\mu_t = a\mu_t dt + b dW_t, \\ dX_t = [r_t + \pi_t(\mu_t - r_t)]X_t dt + \sigma\pi_t X_t dW_t. \end{cases} \tag{5}$$

其中: $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$为观测过程, $\{\mu_t\}_{0 \leq t \leq T}$为不可观测的状态过程. 因此, 式(4)和(5)是部分可观测的动态系统最优化问题.

3 平均收益率的非线性滤波估计

借助文献[6]的结论, 导出平均收益率的非线性滤波估计. 记

$$m_t \equiv E[\mu | G_t], \gamma_t \equiv E[(\mu_t - m_t)^2 | G_t]. \tag{6}$$

引理 1 若条件分布$F_{G_0}(x) = P(\mu_0 \leq x | G_0)$是均值为$m_0$, 方差为$\gamma_0$的正态分布(a. s), 则条件分布$F_{G_t}(x) = P(\mu_t \leq x | G_t)$也是正态的(a. s), 其均值与方差分别为$m_t$和$\gamma_t$.

证明参见文献[6]中定理 11. 1.

于是m_t是μ_t在获得信息G_t后的最优估计. 由文献[6]的定理 12. 1, 得估计m_t, γ_t满足如下条件:

引理 2 假设随机过程$\{\mu_t, S_t\}_{0 \leq t \leq T}$满足

$$\begin{cases} d\mu_t = a\mu_t dt + b dW_t, \\ dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dW_t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \tag{7}$$

条件分布$P(\mu_0 \leq x | G_0)$为正态分布$N(m_0, \gamma_0)$, 则在适当条件下[6], 有

$$\begin{cases} dm_t = am_t dt + \left(b + \dfrac{\gamma_t}{\sigma}\right) \times \dfrac{1}{\sigma}\left(\dfrac{dS_t}{S_t} - m_t dt\right), \\ \dot{\gamma}_t = 2a\gamma_t + b^2 - \left(b + \dfrac{\gamma_t}{\sigma}\right)^2. \end{cases} \tag{8}$$

记$\Lambda \equiv a\sigma^2 - b\sigma$对式(8)求解得

$$\gamma_t = \begin{cases} \dfrac{\gamma_0\sigma^2}{\gamma_0 t + \sigma^2}, \Lambda = 0, \\ 2\Lambda\left[1 - \left(1 + \dfrac{\gamma_0}{2\Lambda - \gamma_0}\exp\left(\dfrac{2\Lambda t}{\sigma^2}\right)\right)^{-1}\right], \Lambda \neq 0. \end{cases} \tag{9}$$

定义新息过程, 其微分为

$$d\overline{W}_t \equiv \frac{1}{\sigma}\left(\frac{dS_t}{S_t} - m_t dt\right). \tag{10}$$

由滤波理论[6], 过程$\overline{W} = \{\overline{W}_t\}_{0 \leq t \leq T}$关于概率$P$及$\sigma$-域流$\{G_t\}_{0 \leq t \leq T}$为布朗运动. 因策略是自融资的, 故$dX_t = \pi_t X_t \dfrac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t)X_t r_t dt$. 所以式(3)可表示为

$$dX_t = [r_t X_t + (m_t - r_t)\pi_t X_t]dt + \sigma\pi_t X_t d\overline{W}_t. \tag{11}$$

同样的, 结合式(8)和(10)容易得到

$$\begin{cases} dS_t = m_t S_t dt + \sigma S_t d\overline{W}_t, \\ dm_t = am_t dt + \left(b + \dfrac{\gamma_t}{\sigma}\right) d\overline{W}_t. \end{cases} \tag{12}$$

4 对数效用与显式解

对数效用函数$U(\cdot) = \ln(\cdot)$为常见双曲绝对风险回避函数(HARA)的一种, 其绝对风险回避 Arrow-Pratt 系数为财富水平的倒数, 体现了投资者财富越多, 风险厌恶程度越小的普遍心态, 因其简单实用而被诸多文献引用[7]. 为得到明确的结果, 设

$U(\cdot)=\ln(\cdot)$, $r_t\equiv r$, $a=b=0$. 于是由式(9), (11)和(12), 最优化问题可具体表述为

$$\max_{\{\pi_t\}_{0\le t\le T}} E[\ln(X_T)]. \tag{13}$$

约束条件

$$\begin{cases} \mathrm{d}m_t=\dfrac{\gamma_t}{\sigma}\mathrm{d}\overline{W}_t,\\ \mathrm{d}X_t=[r+\pi_t(m_t-T)]X_t\mathrm{d}t+\\ \qquad \sigma\pi_tX_t\mathrm{d}\overline{W}_t,\\ \gamma_t=\dfrac{\gamma_0\sigma^2}{\gamma_0t+\sigma^2}. \end{cases} \tag{14}$$

该优化问题可用随机动态规划求解, 但本文运用Itô公式直接导出最优解, 极大地简化了计算. 为此, 定义间接效用函数

$$J(t,m_t,X_t)\equiv\max_{\{\pi_u\}_{t\le u\le T}}E[\ln(X_T)|G_t]. \tag{15}$$

根据 Itô 公式, 有

$$\ln(X_T)=\ln(X_t)+\int_t^T[r+\pi_u(m_u-r)-\frac{1}{2}\pi_u^2\sigma^2]\mathrm{d}u+\int_t^T\pi_u\sigma\mathrm{d}\overline{W}_u. \tag{16}$$

根据随机积分性质得到

$$J(t,m_t,X_t)=\ln(X_t)+\max_{\{\pi_u\}_{t\le u\le T}}E\Big[\int_t^T\Big(r+\pi_u(m_u-r)-\frac{1}{2}\pi_u^2\sigma^2\Big)\mathrm{d}u\,|G_t\Big]. \tag{17}$$

该问题有唯一最优解

$$\pi_u=\frac{m_u-r}{\sigma^2},\ t\le u\le T. \tag{18}$$

将式(18) 代入(17) 得间接效用函数

$$J(t,m_t,X_t)=\ln(X_t)+r(T-t)+\frac{1}{2\sigma^2}\int_t^TE[(m_u-r)^2|G_t]\mathrm{d}u. \tag{19}$$

由式(14) 知

$$m_u=m_t+\int_t^u\frac{\gamma_0\sigma}{\gamma_0\tau+\sigma^2}\mathrm{d}\overline{W}_\tau,\ t\le u\le T. \tag{20}$$

所以, 关于G_t, m_u是条件正态的

$$m_u\sim N\Big(m_t,\frac{\gamma_0^2\sigma^2(u-t)}{(\sigma^2+\gamma_0t)(\sigma^2+\gamma_0u)}\Big). \tag{21}$$

故通过繁琐的推导, 由式(19) 导出间接效用函数的显式解

$$J(t,m_t,X_t)=\ln(X_t)+r(T-t)+\frac{\gamma_0(T-t)}{2(\sigma^2+\gamma_0t)}-\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\sigma^2+\gamma_0T}{\sigma^2+\gamma_0t}\Big)+\frac{1}{2\sigma^2}(m_t-r)^2(T-t). \tag{22}$$

于是得到下面定理:

定理1 在任意时刻t, 部分信息下的最优投资决策问题式(13) 和(14) 的最优投资比例为

$$\pi_t=\frac{m_t-r}{\sigma^2}, \tag{23}$$

对应的间接效用函数为式(22). 特别地, 当$t=0$时, 最优目标函数(13) 为

$$J(0,m_0,X_0)=\ln(X_0)+\Big[r+\frac{\gamma_0+(m_0-r)^2}{2\sigma^2}\Big]T-\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\sigma^2+\gamma_0T}{\sigma^2}\Big). \tag{24}$$

注1 因$\{m_u\}_{t\le u\le T}$与决策$\{\pi_u\}_{t\le u\le T}$无关, 故式(18) 成立; 否则, 需用随机动态规划求解.

5 对数效用时信息价值测算

假设市场上有一个内部交易者, 他比别人掌握了更多的市场信息, 以至于在时刻零后, 他就准确地知道随机变量μ的取值, 即他掌握了完备信息. 直观上, 他必定获得比非内部交易者更大的效用值式(24). 显然, 二者的差额记为V, 反映了该内部交易者所掌握的信息价值. 文献[5] 解决了极大化生命期消费总效用的信息价值测算, 而本文讨论极大化终止效用. 首先给出下面定理:

定理2 设投资者掌握了完备信息流$\{F_t\}_{0\le t\le T}$, 风险资产平均收益率μ为F_0可测的随机变量, 服从正态分布

$$\mu\sim N(m_0,\gamma_0), \tag{25}$$

其中m_0, r_0为已知常数. 则得完备信息下的最优目标函数值为

$$J_F=\ln(X_0)+\Big[r+\frac{\gamma_0+(m_0-r)^2}{2\sigma^2}\Big]T. \tag{26}$$

证明 对$\ln(X_T)$运用Itô公式及随机积分性质, 得

$$\max_{\{\pi_u\}_{t\le u\le T}}E[\ln(X_T)|F_t]=\ln(X_t)+\max_{\{\pi_u\}_{t\le u\le T}}E\Big[\int_t^T\Big(r+\pi_u(\mu-r)-\frac{1}{2}\sigma^2\pi_u^2\Big)\mathrm{d}u\,|F_t\Big].$$

与式(18) 一样, 有最优解$\pi_u^*=\dfrac{\mu-T}{\sigma^2}$. 于是利用条件期望的性质, 得

$$J_F=\max_{\{\pi_t\}_{0\le t\le T}}E[E(\ln(X_T)|F_0)]\le E\Big[\max_{\{\pi_t\}_{0\le t\le T}}E(\ln(X_T)|F_0)\Big]=E\Big[\ln(X_0)+\Big(r+\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}\Big)T\Big]\le$$

$$\max_{\{\pi_t\}_{0\le t\le T}} E[E(\ln(X_T)|F_0)].$$

最后, 由 μ 的正态性, 定理得证 □

另一方面, 若投资者只获得部分信息, 则由定理 1, 他得到的最大期望效用为

$$J_P = \ln(X_0) + \left[r + \frac{\gamma_0 + (m_0 - r)^2}{2\sigma^2}\right]T - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sigma^2 + \gamma_0 T}{\sigma^2}\right). \tag{27}$$

比较式(26) 与(27) 得到如下信息价值测算公式:

定理 2(内部交易者获得的) 信息价值为

$$V \equiv J_F - J_P = \ln\left(1 + \frac{\gamma_0}{\sigma^2}T\right). \tag{28}$$

6　结　　论

1) 信息价值公式(28) 的计算很简单, 易于投资者操作 例如, 由观测到的风险资产历史价格序列, 借助随机过程统计学[6] 及金融计量学[8] 理论, 导出参数 γ_0, σ 的估计值; 然后根据目标期 T 的大小, 由式(28) 计算出信息价值 V. 2) 信息价值只与 γ_0, T 和 σ 有关, 无风险资产平均收益率 μ 的不确定性 γ_0 越大, 信息价值越大; 目标期 T 越长, 信息价值越大; 无风险资产价格波动性 σ 越大, 信息价值越小 所有这些, 与直观是相吻合的, 但直观无法给出它们之间的精确数量关系 3) 文中得到的信息价值式(28) 对投资者决策具有参考意义, 如: 是否值得去寻求内部信息决定于信息价值与信息成本的差额; 此外, 结合该公式与基于消费的资产定价模型(CCAPM), 有可能得到更深刻的资产定价理论 4) 若投资者的效用函数不是对数型, 或风险资产的变动不满足式(1) 和(2), 则式(28) 不成立, 相关结果的推算是一个有待解决的问题, 根据本文分析, 不可能得到解析解

参考文献(References):

[1] Merton R C. *Continuous-Time Finance*[M]. Cambridge: Blackwell, 1990.

[2] Lakner P. Utility maximization with partial information[J]. *Stochastic Process Appl*, 1995, 56: 247-273.

[3] Lakner P. Optimal trading strategy for an investor: The case of partial information[J]. *Stochastic Process Appl*, 1998, 76: 77-97.

[4] 杨昭军, 李致中, 邹捷中. 部分信息下的最优投资消费策略显式解[J]. 应用概率统计, 2001, 16(4): 390-398. (Yang Z J, Li Z Z, Zou J Z. Explicit Sloution for the optimal strategy for the investment-consumption with partial information[J]. *Chinese J of Applied Probability and Statistics*, 2001, 16(4): 390-398.)

[5] Yang Z J, Ma C Q. Optimal trading strategy with partial information: The simplified and generalized models[J]. *Int J of Heoretical & Applied Finance*, 2001, 4(5): 759-772.

[6] Liptser R S, Shiryayev A N. *Statistics of Random Process*[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[7] Föllmer H, Schied A. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2002. 60-73.

[8] Campbell J, Lo A, Mackinlay A C. *The Econometrics of Financial Markets*[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1997.

(上接第 819 页)

5　结　　论

本文对具有未知恒定参数的随机系统的学习与控制问题进行了研究, 提出了基于两级参数算法的对偶控制方法 原问题采用目标函数(4) 是不可解的, 而采用效用函数(5) 代替原目标函数, 再利用两级参数算法求解控制信号, 问题则变得非常容易 尽管所得的解仍是次优的, 但它具有对偶特性, 对未知参数的学习能力和对输出的调节作用较强 与 TSDC 的比较结果表明, 本文控制策略可得到更好的参数辨识结果与控制性能 本文提出的对偶控制方法只适用于未知参数恒定的情况, 对于未知参数变化的随机控制问题是继续研究的方向

参考文献(References):

[1] Feldbaum A A. Dual control theory I-IV[J]. *Automat Remote Contr*, 1960, 21(4): 874-1033.

[2] Alster J, Belanger P R. A technical for the dual adaptive control[J]. *Automatica*, 1974, 10(3): 627-634.

[3] Milito R, Padilla C S, Padilla R A. An innovations approach to dual control[J]. *IEEE Trans on Automat Control*, 1982, 27(1): 132-137.

[4] Maitelli A L, Yoneyama T. Two-stage suboptimal dual controller for systems with stochastic parameters using optimal predictors[J]. *IEE Proc D Control Theory Application*, 1994, 141(4): 253-260.

[5] Maitelli A L, Yoneyama T. A multistage suboptimal dual controller using optimal predictors[J]. *IEEE Trans on Automat Control*, 1999, 44(5): 1002-1008.

[6] Chen H F, Guo L. A robust stochastic adaptive controller[J]. *IEEE Trans on Automat Contr*, 1988, 33(11): 1035-1043.

[7] Liang J. Dual adaptive control[J]. *Control Theory and Applications*, 1997, 14(3): 297-305.