

文章编号: 1001-0920(2004)07-0831-03

TSP 基于参考点的相邻插入法和两阶段方法

王 凌, 童行行, 郑大钟
(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘 要: 通过分析已有的最近插入法, 提出了一种基于参考点的相邻插入法(RPBN I)及其改进策略(I-RPBN I), 用于求解旅行商问题(TSP), 时间性能分别为 $O(n^2)$ 和 $O(n^3)$; 进而提出了结合模拟退火算法和I-RPBN I的两阶段方法通过典型算例的数值仿真, 验证了所提出算法的有效性、高效性和鲁棒性

关键词: 旅行商问题; 参考点; 相邻插入法; 模拟退火

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

Reference point based near insertion approach and two-stage approach for TSP

WANG Ling, TONG Hang-hang, ZHENG Da-zhong

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China Correspondent: WANG Ling, E-mail: wangling@mails.tsinghua.edu.cn)

Abstract By analyzing the existing nearest insertion method, a kind of reference point based near insertion approach (RPBN I) and its improvement version (I-RPBN I) with $O(n^2)$ and $O(n^3)$ polynomial time performances are proposed respectively to solve traveling salesman problem (TSP). Furthermore, an effective two-stage approach combining simulated annealing with I-RPBN I is proposed. Numerical simulations based on typical benchmarks demonstrate the effectiveness, efficiency and robustness of the proposed approach.

Key words: traveling salesman problem; reference point; near insertion approach; simulated annealing

1 引 言

旅行商问题(TSP)具有很强的工程背景,它是运筹学和优化领域研究的重要课题之一。鉴于TSP的NP-hard特性^[1],目前已有许多构造性近似求解方法,如最近邻点、最近合并、最远插入、最近插入、贪婪插入和极小代数法等^[1~5]。尽管构造性方法求解速度快,但其解的质量较差;模拟退火、遗传算法、禁忌搜索等智能优化算法^[1]的优化性能较好,但计算量较大,且难以确定合适的算法参数

本文针对上述问题,提出了一种具有多项式时间性能的基于参考点的相邻插入法(RPBN I)及其

改进策略(I-RPBN I),并结合I-RPBN I和模拟退火算法提出了高效两阶段方法。通过数值仿真,验证了算法的有效性、高效性和初值鲁棒性

2 基于参考点的相邻插入法及其改进策略

对于大规模TSP,最近插入法的求解效果很差^[3],由图1可分析其原因是:1)假定A-B-C-A为已求得的3城市TSP的解,当新增城市D位于BC线段时,按照最近插入法,应插入AC或AB之间,但D插入到BC之间将更好。所以在考虑D的插入位置时,仅考虑与它距离最近的城市有可能使解劣化。2)新增城市的插入位置总在k城市子TSP的某相

收稿日期: 2003-06-20; 修回日期: 2003-09-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60204008, 60374060); 国家973计划项目(2002CB312200)

作者简介: 王凌(1972—),男,江苏武进人,副教授,博士,从事智能优化理论与方法的研究; 郑大钟(1935—),男,浙江绍兴人,教授,博士生导师,从事HDS和调度等研究

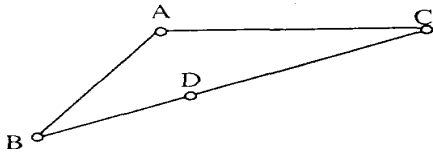


图1 最近插入法图示分析

邻两城市之间,如此得到的 $k+1$ 城市的解可能不是最优解.当城市数增多时,这种误差将累积而影响最终解的质量.

针对原因1),应考虑已有路线上的所有相邻点来找到插入位置.另外,可设置一个参考点并基于它与各城市间的距离,由小到大排列来确定各城市的插入顺序,这样待插入点将在很大程度上位于已确定的TSP子回路的外部,从而在一定程度上避免了交叉路径的出现.

由此提出如下一种求解 n 城市(C_1, C_2, \dots, C_n)TSP的基于参考点的相邻插入法(RPBN I).

Step 1: 随机产生参考点 O ,按各城市与 O 的距离从小到大进行排列,记城市排列 S_Z 为(f_1, f_2, \dots, f_n).

Step 2: 取 S_Z 中的前3点 f_1, f_2 和 f_3 ,则关于这3个城市的解 S_3 ,只能是 $f_1-f_2-f_3-f_1$,计算相应路径长度 D_3 .

Step 3: 令 $k = 4$.

Step 4: 对当前解 S_{k-1} 按贪婪原则,将城市 f_k 插入到当前解的所有顶点中某相邻的两个城市之间(简称规则1),从而得到 k 个城市的解 S_k ,计算其相应的路径长度 D_k ,并令 $k = k + 1$.

Step 5: 若 $k = n$,则返回Step 4;否则,结束搜索并输出解.

规则1由以下两步实现:

1) 找出最小化

$$L = \begin{cases} d(f_j, f_k) + d(f_k, f_{j+1}) - d(f_j, f_{j+1}), \\ \quad j = 1, \dots, k-2; \\ d(f_1, f_k) + d(f_k, f_{k-1}) - d(f_1, f_{k-1}), \\ \quad j = k-1. \end{cases} \quad (1)$$

的城市 f_j ;

2) 若 $j < k-1$,则将 f_k 插到 f_j 与 f_{j+1} 之间,否则将 f_k 插到 f_1 与 f_{k-1} 之间.

增添第 k 个城市时,需要 k 次子路径比较,而最近插入法需要首先通过 k 次比较来确定插入参考点,然后再经过一次比较来确定插入位置,二者计算

量相近.因此,该方法的时间复杂性为

$$f_1(n) = O\left[\sum_{k=3}^n k = \frac{(n-2)(n-3)}{2}\right] = O(n^2), \quad (2)$$

显然式(2)为多项式.

针对原因2),应该考虑将待增城市插入到已有 k 城市子TSP的任意两城市之间.文献[4]仅在插入待增城市后进行盲目的换位、移位和倒位操作,效率较低.本文则对很多不可能的插入位置不予考虑.假定已找到 k 个城市的最优解 $S_k: C_1-C_2-\dots-C_k-C_1$,相应路径长度为 D_k ,待插城市 C 的插入位置按上述方法确定,相应 $k+1$ 城市的解及其路径长度分别为 S_{k+1} 和 D_{k+1} .假设将 C 插入到 C_p 与 C_q 之间($p, q = 1, 2, \dots, k; p - q = 2$)可获得更优的解 S_{k+1} ,相应路径长度为 D_{k+1} ,即 $D_{k+1} < D_k$.显然, S_{k+1} 可由以下两步得到: 1) 求得满足 C_p 和 C_q 依次访问 k 个城市 C_1, C_2, \dots, C_k 后所得的最优解 S_n 及其路径长度 D_k ,显然有 $D_k \geq D_k$; 2) 采用相邻插入法将城市 C 添加到 S_k 中,得到 S_{k+1} 及其路径长度 D_{k+1} ,则

$$D_{k+1} = D_k + d(C, C_p) + d(C, C_q) - d(C_p, C_q). \quad (3)$$

显然,要使 $D_{k+1} < D_k$ 成立,必须有

$$d(C, C_p) + d(C, C_q) - d(C_p, C_q) < D_k - D_{k+1}. \quad (4)$$

因此,只有满足式(4)的 C_p 和 C_q 才能使路径长度得以改善,从而按式(4)寻找 C_p 和 C_q 将比随机搜索的计算量小.

另外,在仿真时发现,考虑插入点位于 C_1, C_2, \dots, C_k 子回路中,且间隔一个城市以上的两城市间的情况对性能提高作用不大.因此,在寻求满足式(4)的 C_p 和 C_q 改进性能时,仅考虑插入点位于子回路中,间隔一个城市的两城市间的情况来减少搜索量,即 $p - q = 2$.因为只有插入点位于已有最优解的某相邻两城市之间才可直接插入新增城市,否则所得解肯定不是最优的.所以,一旦确定 C_p 和 C_q ,首先在 S_k 中用 C 代替 C_{q+1} 得到 S_k ,然后利用相邻插入法将 C_{q+1} 添加到 S_k 中得到 S_{k+1} .

基于上述分析,在此提出一种改进的基于参考点的相邻插入法(IRPBN I).

Step 1: 随机产生一参考点 O ,根据各城市与 O 的距离从小到大对 C_1, C_2, \dots, C_n 进行重排,得到城市排列 $S_Z: f_1, f_2, \dots, f_n$.

Step 2: 取 S_Z 中的前3点 f_1, f_2 和 f_3 ,确定3个城市的解 $S_3: f_1-f_2-f_3-f_1$ 和路径长度 D_3 .

Step3: 令 $k = 4$

Step4: 对当前解 S_{k-1} 按规则 1 将城市 f_k 插入到当前解的某相邻两城市之间, 得到 k 个城市的解 S_k 及路径长度 D_k , 并令 $k = k + 1$.

Step5: 根据式 (4) 得到可能成为新插入点的城市 $C_p, C_q (p, q = 1, 2, \dots, k; p - q = 2; C_{k+1} = C_1, C_{k+2} = C_2)$, 并存在表 L 中.

Step6: 若 L 为空, 则令 $k = k + 1$ 并跳至 Step10; 否则, 从表 L 中取出一对 C_p, C_q , 然后删除

Step7: 在 S_k 中用 C 代替 C_{q+1} 得到 S_k .

Step8: 利用相邻插入法将 C_{q+1} 添加到 S_k 中, 得到 S_{k+1} 及路径长度 D_{k+1} .

Step9: 若 $D_{k+1} < D_{k+1}$, 则用 S_{k+1} 代替 S_{k+1} , D_{k+1} 代替 D_{k+1} .

Step10: 若 $k = n$, 则返回 Step4; 否则, 结束搜索, 输出解

改进方法的时间复杂性为

$$f_2(n) = O\left(\sum_{k=3}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6 - 5\right) = O(n^3), \quad (5)$$

仍为多项式

3 两阶段算法及其实现

IRPBN I 本质上仍是基于规则的构造性算法, 它同样可能陷入局部极小. 因此本文将其与模拟退火算法(SA)相结合, 提出如下两阶段方法:

Step1: 利用 IRPBN I 方法得到 n 个解, 从而确定初温和 SA 的初始解, 并令 $k = 0$

Step2: 若算法终止准则满足, 则结束搜索并输出最优 best so far 解; 否则, 继续下一步骤

Step3: 由当前解 x 随机产生新解 y , 记新旧状态的目标值差为 Δ

Step4: 产生 $[0, 1]$ 之间的随机数 ξ , 若 $\xi < \min[1, \exp(-\Delta/t_k)]$, 令 $x = y$; 否则, 保持当前解 x .

Step5: 若抽样准则满足, 则退温, 并令 $k = k + 1$, 然后返回 Step2; 否则, 返回 Step3

显然, 两阶段方法一方面能利用 IRPBN I 方法保证解的质量; 另一方面, 能利用 SA 的突跳性搜索避免陷入局部极小而趋于最优解. 本文采用如下算法实现方案:

1) 初始化: 用 IRPBN I 产生 20 个解, 令初温为 $t_0 = 10\Delta_{\max}/N$, 其中 Δ_{\max} 为 IRPBN I 所得 20 个解中两两解间的最大路径长度差, N 为城市数目. 由于初

温与问题规模以及 IRPBN I 的性能存在一定联系, 可避免初温的盲目选取. 另外, 令 20 个解中的最优解作为 SA 的初始解.

2) 采用定步长抽样准则, 即 $20 \times N$ 步, 显然抽样次数与问题规模相关.

3) 新状态产生方式: 基于路径编码, 新解一般采用 SWAP, NV 或 NS 方式^[1]. 在此, 为丰富新解的产生方式, 算法每次随机从 SWAP, NV 和 NS 中选取一种作为新解产生方式.

4) 采用指数退温, 即 $t_{k+1} = \lambda \times t_k$, 退温速率取 0.98.

5) 采取设置终止温度阈值的方式终止算法, 即若 $t_k \leq 1.0$, 则终止搜索.

4 仿真与分析

在 CY366A/128M RAM 计算机上, 采用典型的 30, 50 和 75 城市 TSP^[1,5] 进行仿真, 分别用最近插入法, RBN I, IRBN I, 单一 SA 和两阶段方法各进行 20 次随机实验, 统计结果如表 1~ 表 5 所示. 其中 n 表示城市数, d_b, d_a 和 d_w 分别表示最佳值、平均值和最差值, δ 为方差, T 为平均时间.

表 1 最近插入法的优化结果

n	d_b	d_a	d_w	δ	$T/m s$
30	461.375	488.596	515.755	470.854	0.1
50	505.224	525.61	576.306	446.177	0.3
75	645.728	694.636	794.576	1.611.55	0.8

表 2 RPN I 的优化结果

n	d_b	d_a	d_w	δ	$T/m s$
30	425.266	440.286	461.609	235.486	0.1
50	453.152	480.882	501.072	235.886	0.35
75	614.094	622.613	637.000	281.591	0.9

表 3 改进的 IRPBN I 的优化结果

n	d_b	d_a	d_w	δ	$T/m s$
30	423.741	429.015	438.382	36.602	1
50	440.207	454.035	484.425	204.401	10
75	574.967	580.874	597.590	220.325	20

表 4 单一模拟退火算法的优化结果

n	d_b	d_a	d_w	δ	T/s
30	423.741	425.661	428.847	2.856	4.5
50	434.315	441.243	449.365	23.726	6.0
75	568.524	573.244	586.878	32.190	9.1

(下转第 837 页)

表 1 机器人定位数据分析表

编号	1	2	3	4
计算坐标 /mm	(1 530, 660)	(1 766, 800)	(970, 1 000)	(2 864; 1 200)
实际坐标 /mm	(1 525, 665)	(1 758, 805)	(980, 988)	(2 870, 1 195)
最大误差 /%	0.75	0.63	1.2	0.42
计算角度 /($^{\circ}$)	68	150	100	80
实际角度 /($^{\circ}$)	69	148	103	78

果将滞后于实际位置。由于 T_s 很小, 定位算法的实时性特征完全取决于 T_c 的大小。通过现场实验证明, 当机器人的速度大于 0.8 m/s 时, 霍夫变换定位算法周期较长, 它计算的定位坐标明显滞后于机器人的真实位置, 而本算法能及时准确地获得机器人的当前位置, 表现出良好的实时性特征。

4 结 论

本文描述了基于特征点提取的机器人快速自定位算法。它利用特征函数, 以较低的运算量从传感器的空间信息中分离出环境特征点, 通过环境特征点

建立机器人坐标系与参考坐标系的坐标映射关系, 实现了机器人的快速自定位。本算法定位精度高、实时性好, 其有效性通过实验得到了验证。

参考文献 (References):

- [1] Yuny Cao, Alex S. Fukunage, et al. Cooperative mobile robotics: Antecedents and directions [J]. *Autonomous Robots*, 1997, 4(1): 7-27.
- [2] Olson C. F. Probabilistic self-localization for mobile robots [J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 2000, 16(1): 55-66.
- [3] Kleeman L. Optimal estimation of position and heading for mobile robots using ultrasonic beacons and dead reckoning [A]. *Proc IEEE Int Conf Robotics and Automation* [C]. Nice, 1992. 2582-2587.
- [4] Leonard J, Durrant-Whyte H. F. Mobile robot localization by tracking geometric beacons [J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1991, 7(3): 376-382.
- [5] CHEN Lirjie. Robotic self-localization and obstacle-localizing based on hough transform [J]. *Computer Science*, 2002, 29(10): 48-53.

(上接第 833 页)

表 5 两阶段方法的优化结果

n	d_b	d_a	d_w	δ	T/s
30	423.741	423.849	424.673	0.393	1.8
50	429.227	430.988	435.006	5.850	3.3
75	547.777	552.496	560.610	21.031	6.2

由仿真结果可见: 1) RPBN I 方法的优化性能远好于传统最近插入法, 而且时间性能几乎相同; 2) IRPBN I 方法较 RPBN I 方法虽然优化时间有所增加, 优化质量却有较大提高, 均方差减少, 但与问题的真正最优解还存在一定差距; 3) 相对构造性方法, 具有全局优化能力和突跳特性的单一 SA 算法性能较好, 但优化时间大大增加; 4) 两阶段方法的解质量和初值鲁棒性 (优化结果的方差较小) 优于单一 SA 和构造性方法, 且优化时间较单一 SA 较短。

两阶段方法是解决 TSP 问题的一种有效方法, 它融合了 IRPBN I 和 SA 的优点, 包含确定性和随机性的搜索, IRPBN I 方法为 SA 快速构造具有一定质量的初始解, 并用以确定合适初温, 缩小了单一 SA 的退火历程, 且 SA 的突跳性搜索对 IRPBN I 方法的解有补充搜索能力, 可有效避免陷入局部极小。

5 结 论

本文针对平面 TSP, 提出了多项式时间性能的一种基于参考点的相邻插入法及其改进方法, 进而提出了结合 SA 与 IRPBN I 的两阶段方法。仿真结果验证了所提出方法的有效性、高效性和初值鲁棒性。探讨 IRPBN I 与其他智能方法的结合, 以及并行算法的开发, 将是进一步研究的课题。

参考文献 (References):

- [1] 王凌. 智能优化算法及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [2] Fang Y. D., Hao J. Z., Yu Y. L., et al. Genetic algorithms and its application to TSP [J]. *J of South China University of Technology*, 1994, 22(3): 23-127.
- [3] 卢开澄. 图论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1981.
- [4] Pan L. D., Huang X. F. A heuristic greedy method for the traveling salesman problem [J]. *J of Beijing University of Chemical Technology*, 1998, 25(2): 46-50.
- [5] Fogel D. B. Applying evolutionary programming to selected traveling salesman problems [J]. *Cybernetics and Systems*, 1993, 24(1): 27-36.